

e igualando os coeficientes de t^m temos $J_m(z+y) =$

$$= \sum_{k=1}^m J_k(z) \cdot J_1(y) = \sum_{n=0}^m J_n(z) \cdot J_{m-n}(y) \quad \text{q. e. d.}$$

1008 — Ache o recíproco de $1 + \rho^2$ no corpo definido por $f(\rho) = \rho^3 - 3\rho + 1 = 0$. R: Seja $f(x) = x^3 - 3x + 1$ $g(x) = x^2 + 1$. Vamos calcular dois polinómios a e b tais que $af + bg = 1$. O recíproco pedido será evidentemente $b(\rho)$. O algoritmo de Euclides aplicado a f e g dá

$$f = x \cdot g + (1 - 4x)$$

$$g = -\frac{1}{16}(4x+1)(1-4x) + \frac{17}{16}$$

donde

$$1 = \frac{16}{17}g + \frac{1}{17}(4x+1)(1-4x)$$

$$= \frac{16}{17}g + \frac{1}{17}4x(1-x)$$

$$= g \left[-\frac{4}{17}x^2 - \frac{1}{17}x + \frac{16}{17} \right] + f \left[\frac{4}{17}x + \frac{1}{17} \right].$$

O recíproco pedido é pois

$$b(\rho) = -\frac{4}{17}\rho^2 - \frac{1}{17}\rho + \frac{16}{17}.$$

1010 — São dados um plano ω e um ponto O desse plano. Pede-se a equação geral das superfícies Σ tais que, sendo M um ponto de Σ , MN a normal em $M(N \in \omega)$, MP a perpendicular a $\omega(P \in \omega)$, seja igual a uma constante dada a^2 a área do triângulo ONP . Com os mesmos dados fazer $N\hat{O}P = \text{const}$. R: Tomando ω para plano Oxy e o ponto O para origem, a área do triângulo ONP é dada por $S = 1/2 \cdot z(py - qx)$. A equação do problema é pois $2a^2 = z(py - qx)$. O sistema das características desta equação às derivadas parciais admite os integrais primários

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{e} \quad z^2 + 4a^2\theta = C \quad (\text{em que } y = x \operatorname{tg} \theta).$$

Donde vem a solução do problema, dada por $z^2 + 4a^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} y/x - \varphi(x^2 + y^2) = O$ em que φ é uma função arbitrária.

1011 — Demonstrar que, dados os pontos M_1 e M_2 representativos dos complexos s_1 e s_2 , se M_1 descreve uma recta paralela ao eixo Ox , o ponto M representativo do produto $s_1 s_2$ descreve uma recta paralela a OM_2 . R: Sejam z'_1 e z''_1 dois valores de z_1 . Será $\arg(z'_1 z_2 - z''_1 z_2) = -\arg[(z'_1 - z''_1) z_2] = \arg(z'_1 - z''_1) + \arg z_2 = \arg z_2$ por ser $\arg(z'_1 - z''_1) = O$. A igualdade $\arg(z'_1 z_2 - z''_1 z_2) = \arg z_2$ prova a proposição enunciada.

Soluções dos problemas anteriores de Mário de Alenquer.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

25 — ALBERT A. ADRIAN — *Introduction to Algebraic Theories* — The University of Chicago Press, 1943.

Os que estudaram álgebra abstracta sabem bem que os seus métodos são simultaneamente mais simples e fáceis de assimilar e mais penetrantes do que os processos clássicos; mas os que tomaram contacto com a álgebra abstracta não ignoram que se apresenta um grande obstáculo ao estudante que deseja travar conhecimento com esta nova orientação da álgebra. O principiante tem de aprender primeiro a lidar com conceitos e a utilizá-los tão facilmente como se se tratasse de números, se bem que, depois de tal ter conseguido, note que tudo se desenvolve com mais facilidade.

Tem por objectivo esta «Introdução às teorias algébricas» auxiliar o estudante na sua tentativa

de vencer as dificuldades apontadas e de adquirir os hábitos de raciocínio abstracto, que são o fundamento, não só da álgebra abstracta, mas de quasi todas as teorias matemáticas de hoje. Visto que este livro tem o intuito de ser uma obra de iniciação, não requiere nenhum conhecimento prévio — além de técnicas algébricas já conhecidas dos matemáticos do Renascimento — ainda que uma boa vontade de trabalhar e pensar sejam indispensáveis.

Os assuntos tratados neste texto são os que naturalmente eram de esperar: matrizes, equivalência e semelhança, e certos outros assuntos ligados. Tal impõe o estudo de alguns elementos da teoria dos polinómios — por razões de ordem técnica — e dos espaços lineares, estudo este indispensável para a compreensão do significado real dos conceitos relativos às matrizes. Indicações da técnica de generalização — tão importantes no

momento actual — e da sua utilização são dadas constantemente. O último capítulo constitui o ponto culminante de toda a obra onde os conceitos fundamentais da álgebra abstracta são introduzidos como a consequência natural das considerações precedentes.

Um grande número de exercícios — tanto exemplos numéricos, como desenvolvimentos matemáticos — dão ao leitor uma oportunidade de avaliar os conhecimentos adquiridos. O livro está escrito com clareza de estilo, e os assuntos são apresentados com a elegância e precisão que eram de esperar do autor. Assim esta obra revelar-se-á valiosa tanto para o aluno como para o mestre.

(de Reinhold Baer em «Bulletin of the American Mathematical Society» Vol. XLVII, n.º 11 — Nov. 1941 — Trad. M. Z.)

26 — SMART, W. M. — *Foundations of Astronomy* — Longmans, Green and Co., London, New York and Toronto, 1942.

O Prof. W. M. Smart não necessita de apresentação como autor de livros de astronomia. Estes vão desde as divulgações populares como «O Sol, as Estrelas e o Universo» até à valiosa e compreensível obra «Dinâmica estelar», concernente ao movimento das estrelas.

A obra, agora em crítica, está entre as divulgações populares de astronomia e os livros de texto para os estudantes universitários, como o típico «Text-book» de Astronomia Esférica do mesmo autor, de que há já 2.ª edição.

Os «Fundamentos de Astronomia» são dirigidos aos estudantes que frequentam o 1.º ano dum curso de astronomia das universidades e a todos os que se interessam por estes assuntos e que têm necessidade duma base mais sólida do que a dada pela maioria dos livros descritivos. O autor deseja que o livro possa ser útil a muitos dos jovens das forças navais e aéreas que necessitam de conhecimentos de astronomia e das suas aplicações como introdução aos manuais dos serviços onde é dado relêvo especial aos assuntos técnicos.

Abriendo com os capítulos «Geometria da Esfera» e «A Esfera Celeste», o livro apresenta definições de muitos termos astronómicos, acompanhando-os de explicações completas e cuidadosas, simples de seguir, e ilustrando-os com exemplos. A salientar nestas explicações é o uso de diagramas apropriados, bem imaginados e elaborados.

Simultaneamente com as definições são dadas, por uma forma muito clara, descrições e explicações de fenómenos naturais. É de notar que a parte da trigonometria esférica utilizada depende só de uma única fórmula — a fórmula do coseno — e que esta dependência é directa em cada caso.

Apesar de se tratar principalmente de astronomia de posição, o capítulo «As estrelas» inclui uma breve introdução ao estudo dos espectros e alguns dos mais importantes e fascinantes resultados que podem obter-se a partir do estudo da constituição da luz das estrelas. Também figura um capítulo sobre a «Determinação da posição da Terra».

Caracterizadamente útil é a inclusão, no fim de quasi todos os capítulos, de exercícios para o leitor e ainda a colecção de respostas do fim do livro. Há ainda apêndices com tabelas de constantes astronómicas e elementos dos planetas e satélites, figurando também um valioso índice.

A obra é belamente impressa e em nada dá a revelar a produção do tempo de guerra.

(de J. C. P. Miller em «Nature», Vol. CLI, n.º 3819, — 1943, Jan. 9 — Trad. M. Z.)

27 — SLATER, J. C. and FRANK, N. H. — *Introduction to theoretical physics* — International Series in Physics, 1933.

Do Prefácio :

... Este curso teve origem na convicção de que a divisão do ensino da física teórica em cadeiras distintas como mecânica, teoria electromagnética, teoria do potencial, termodinâmica, tende a impedir o estudante de ver a unidade da física e de apreciar a importância da aplicação a um dado ramo dos princípios desenvolvidos para outro.

... tornou-se evidente que a estrutura da matéria não podia tratar-se sem uma compreensão perfeita dos princípios da mecânica ondulatória e que esta exigia uma cuidadosa preparação em física clássica.

No final de cada capítulo vem um conjunto de problemas. A capacidade de resolver problemas (note-se que o autor não se refere a simples exercícios com aplicação imediata de fórmulas decoradas), em nossa opinião, é essencial para uma compreensão adequada da física.

... Finalmente queremos lembrar ao leitor que

este é, exclusivamente, um livro de física teórica... (Não há dúvida ser de lamentar, do ponto de vista da unidade da física, uma separação dos aspectos experimental e teórico). Isto é particularmente certo quando nos lembramos que a maior dificuldade encontrada pelo estudante no domínio da física teórica é mais a aprendizagem do *como* aplicar a matemática a um caso físico, do *como* formular matematicamente um problema, do que a resolução dum problema já formulado. Mas a única resposta satisfatória é um *vasto treino* no qual a física teórica caminha passo a passo com a física experimental e com o trabalho de laboratório...

Fugas em sistemas no vácuo ou em circuitos eléctricos têm a sua contrapartida nas muitas coisas desastrosas que podem acontecer às equações. E é muitas vezes tão difícil encontrar um sistema matemático para tratar dum problema difícil, sem aproximações injustificáveis e complicações impossíveis, como construir um aparelho para medir uma grandeza difícil (de medir) ou para evidenciar um efeito novo. Estas coisas não podem ser ensinadas.. Mas metade da batalha está ganha se o estudante se acerca da física teórica, não como dum conjunto de fórmulas misteriosas, ou como duma rotina maçadora que se estuda por obrigação, mas antes como dum conjunto de métodos, de instrumentos, de aparelhos, submetidos a regras análogas às dos outros aparelhos físicos e conduzindo a resultados físicos de grande importância.

Titulos dos capitulos (é indicada entre parêntesis o respectivo número de página):

1. Séries de potências (10) — 2. Método das séries de potências para as equações diferenciais (20) — 3. Métodos das séries de potências e exponencial para vibrações harmónicas simples (8) — 4. Vibrações amortecidas, forçadas e resonancia (12) — 5. Energia (9) — 6. Vectores, forças e potenciais (10) — 7. Equações de Lagrange e movimento planetário (11) — 8. Momentos generalizados e equações de Hamilton (10) 9. Espaço das fases e movimento geral das partículas (13) 10. O movimento dos corpos rígidos (15) 11. Sistemas ligados (coupled) e coordenadas normais (13) — 12. A corda vibrante e as séries de Fourier (14) — 13. Coordenadas normais e a corda vibrante (12) — 14. A corda com tensão e densidades variáveis (14) 15. A membrana vibrante (12) — 16. Tensões, deformações e vibrações dum sólido elástico (13) — 17. Escoamento de fluidos (10) — 18.

Escoamento do calor (13) — 19. Electrostática, teorema de Green e teoria do potencial (15) — 20. Campos magnéticos, teorema de Stokes e potencial vector (10) — 21. Indução electromagnética e equação de Maxwell (11) — 22. Energia no campo electromagnético (12) — 23. Reflexão e refração das ondas electromagnéticas (12) — 24. Teoria electrónica e dispersão (16) — 25. Ondas electromagnéticas esféricas (14) 26. Princípio de Huygens e teorema de Green (13) — 27. Difracção de Fresnel e de Fraunhofer (14) — 28. Ondas, raios e mecânica ondulatória (16) — 29. Equação de Schrödinger a uma variável (13) — 30. O princípio de correspondência e a mecânica estatística (16) — 31. Matrizes (12) — 32. Teoria das perturbações (20) — 33. O átomo de hidrogénio e o campo central (19) — 34. Estrutura atómica (14) — 35. Forças interatómicas e estrutura molecular (15) — 36. Equações de estado dos gases (17) — 37. Vibrações nucleares em moléculas e nos sólidos (15) — 38. Colisões e reacções químicas (13) — 39. Interações electrónicas (17) — 40. Energia electrónica de átomos e moléculas (13) — 41. Estatística de Fermi e estrutura metálica (14) — 42. Dispersão, dieléctricos e magnetismo (16).

Zürich, 19-IX-43.

A. Gibert

28 — GONSETH, FERDINAND ET GAGNEBIN, SAMUEL — *Éléments de Géométrie — I Géométrie Plane* — Librairie Payot, Lausanne. Da colecção da Société Suisse des Professeurs de Mathématiques 1942.

Trata-se de um livro destinado ao ensino da Geometria nas escolas secundárias suíças, edição em língua francesa de que só está publicada esta I parte. Em língua alemã encontram-se já publicadas as duas partes de que consta a obra. É um livro cuja leitura é de aconselhar em especial aos professores de matemática que desejam fazer o seu ensino, de modo a preparar o aluno de acôrdo com as modernas correntes de estudo da matemática. E não se julgue que os autores se perdem em altas abstracções ou teorizações se bem que a matéria seja apresentada a partir das idéias de grupo de transformações que deixam invariantes as propriedades das figuras. Veja-se, por exemplo, como é introduzida a noção de plano: «Entre as melhores realizações duma superfície plana que se sabem construir, citemos as que são utilizadas na imprensa, e em metalurgia com o nome de *mármares*. Como se fabrica um mármore? Realizam-se, para começar,

três superfícies aproximadamente planas M_1 , M_2 e M_3 . Aplica-se M_1 sobre M_2 , por exemplo, e desgastam-se uma contra a outra (rodam-se uma sobre a outra) durante um certo tempo; depois substitui-se M_2 por M_3 . Interrompe-se em seguida esta operação para desgastar M_2 contra M_3 e assim por diante. Se se prolonga suficientemente este desgaste alternado, obtêm-se três superfícies lisas que se aplicam uma sobre a outra de maneira extraordinariamente perfeita, não deixando entre si qualquer espaço apreciável: eis os mármores. Além disso, se se rodam do mesmo modo um outro grupo de três mármores, cada um destes últimos gosa da mesma propriedade em relação a cada um dos primeiros. Para compreender que este processo deve conduzir a três superfícies bem planas, basta observar que o desgaste de dois mármores somente, não conduziria necessariamente a duas superfícies planas, mas antes a duas superfícies esféricas, uma convexa e outra côncava, ajustando-se uma contra a outra. Mas se se faz intervir uma terceira superfície, é excluída

esta eventualidade, pois seria necessário que aquela terceira superfície fôsse ao mesmo tempo convexa para se aplicar sobre a superfície côncava, e côncava para se aplicar sobre a superfície convexa: ela deve ser plana bem como as outras duas». E daqui conclui os postulados do plano: «Para os planos ideais, estas propriedades dos mármores conduzem-nos às duas seguintes propriedades:

Dois planos são sobreponíveis.
Uma porção qualquer de um plano pode ser deslocada livremente neste plano».

O índice dar-nos-á uma idéa exacta da disposição e coordenação dos assuntos:

Primeiras noções fundamentais: A — Introdução; B — A superfície, a linha e o ponto; C — O plano e a recta; D — A medida dos comprimentos; E — O plano, a recta e os seus deslocamentos. Angulos e rotações no plano; Simetria Axial; Os casos de igualdade dos triângulos; Pa-

ralelismo e simetria central; Os lugares geométricos, aplicações; O circulo; A medida das superfícies; Linhas proporcionais; Homotetia e

«COMO SE DEVE PROCURAR A SOLUÇÃO?»

1. *Compreender a questão.*
2. *Achar um caminho que vá da incógnita aos dados — passando, se fôr preciso, por vários problemas intermediários. (Análise).*
3. *Realizar. Efectuar as construções (Síntese).*
4. *Verificar e criticar.*

2

Formular a ou as relações entre a incógnita e os dados.
 Transformar os elementos desconhecidos. Procurar-se-á introduzir novas incógnitas mais aproximadas dos dados.
 Transformar os elementos dados. Procurar-se-á deduzir novos elementos mais aproximados das incógnitas.
 Não resolver senão uma parte do problema.
 Não satisfazer senão a uma parte das condições: que liberdade de variação se introduziu abandonando a outra parte? (Lugares geométricos).
 Generalizar. Particularizar. — Proceder por analogia.

1

De que se trata? O que se dá? O que se procura?

Os dados determinam a incógnita? Ou são insuficientes? ou superabundantes?

Pode-se pôr a questão doutro modo?

Pode-se relacionar o problema com outro que já se conheça? — cuja solução é mais simples? — ou mesmo immediata?

Estas questões devem-se repetir a cada problema intermediário. Além disso:

Tomam-se em consideração todos os factos?

«Substituir as definições no lugar dos definidos».

PASCAL

4

O resultado é plausível? Porquê?
 Pode-se fazer uma verificação?
 Há outro caminho conduzindo ao resultado? Há algum mais directo? Que outros resultados se poderiam obter pela mesma via?

Os resultados são plausíveis? Porquê?
 Pode-se fazer uma verificação?
 Há outro caminho conduzindo ao resultado? Há algum mais directo? Que outros resultados se poderiam obter pela mesma via?

semelhança; Os polígonos regulares; O comprimento da circunferência e a superfície do círculo.

Sobre todos os capítulos a partir do II dão-nos exercícios graduados em número de 507. Por último apresentam um quadro devido ao professor G. Pólya ⁽¹⁾ que pelo interesse que pode ter para

⁽¹⁾ Note-se que um nome como o de G. Pólya não se desdoura com o escrever coisas tão comensinhas, verdades à *Mr. de la Palisse*, como acham certos matemáticos, sem se lembrarem que estes conselhos são dirigidos aos que principiam, se bem que não seja mau recordá-los mesmo àqueles que percorreram longo caminho.

os alunos não resistimos à tentação de transcrever.

Enfim, o livro contém, pelo modo como são tratados, e não porque sejam novos, muitos assuntos de interesse para o nosso ensino secundário. É claro e escrito numa linguagem acessível ao meio a que é destinado, apesar de um dos seus autores, Gonseth, ser um professor do ensino superior, professor da Escola Politécnica Federal de Zúrich, e grande matemático suíço.

J. da Silva Paulo

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agronomia Lusitana — Vol. 4 — n.º 2 — 1942. (Estação Agronómica Nacional).

Agros — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XXVI — n.º 2 — Março-Abril de 1943.

Euclides — (Madrid) — Revista mensal de Ciências Exactas, Físicas, Químicas y Naturales — Tomo III, n.ºs 30 e 31.

Considerações sobre a perceptibilidade auditiva dos sinais horários rítmicos radiotelegráficos no processo das coincidências por extinção de sinais — José António Madeira — Coimbra, 1942.

Elementos da Teoria dos Anéis — Almeida Costa — Publicação n.º 1 do Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Porto, 1943.

Boletín Matemático — (Buenos Aires) — Revista argentina de Matemática — Ano XVI — n.ºs 1 e 2.

Publicações do Sindicato Nacional dos Engenheiros Geógrafos — N.º 1 *Estudo comparativo dos processos de registo gráfico e de recepção acústica (extinção de sinais) na determinação da hora de recepção de um sinal horário rítmico*, por José António Madeira — Coimbra Editora.

2.ª série — n.º 1 — *Manual de Astronomia Geodésica*, por Manuel Pires de Matos — Lisboa, 1941.

Sur une généralisation de l'opérateur de projection $\mathcal{S}(I)$ — Ruy Luís Gomes — Publicação n.º 6 do Centro dos Estudos de Matemática da Universidade do Porto, 1943.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.º 140.

A situação financeira da «Gazeta de Matemática»

CONTA DO N.º 16 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Receita

Receita da venda avulso e por assinatura de 809 números	3.199\$50
Existência de 667 números ao preço de custo	2.011\$67
31-X-1943, Déficit	219\$40
	<u>5.430\$57</u>

Despesa

Composição, impressão, papel e brochura	4.416\$60
Sua quota parte nas despesas gerais realizadas até 31 de Outubro de 1943	1.013\$97
	<u>5.430\$57</u>