Notícia dum problema de geometria e duma memória de Euler

por **Hugo Ribeiro**

(Bolseiro do Instituto Para a Alta Cultura, em Zürich)

Encontrar todos os triângulos de lados e medianas racionais. Aqui está um problema que, a avaliar pelo enunciado, todos julgarão ter compreendido, mas ninguém (se estou, como julgo, bem informado) entendeu ainda perfeitamente. Jacobi ocupou-se desta questão e Euler escreveu sôbre ela, pelo menos, duas memórias em latim e uma terceira, posterior, em língua francesa. É esta última que me proponho resumir aqui. Euler dá aqui um processo muito geral para encontrar triângulos de lados e medianas racionais. Mas o que se não sabe, ainda hoje, é se êste processo fornece *todos* os triângulos com esta propriedade: não se conhece um exemplo dum triângulo com esta propriedade que não possa obter-se por aquêle processo, nem se demonstrou a inexistência de um tal exemplo. Logo no início desta memória, que com o título «Problème de géométrie résolu par l'Analyse de Diophante» foi publicada em 1820 no tomo VII (1815-1816) das «Mémoires de l'Académie des Sciences de S.t Pétersbourg», pág. 3-9 (e vai reaparecer agora num dos volumes da já monumental edição das obras completas de Euler promovida pela Sociedade Helvética das Ciências Naturais), diz-nos o próprio autor: «J'ai déjà donné, à différentes reprises, des solutions de ce problème, sans qu'aucunne m'ait entièrement satisfait. Celle que je présente ici réunit, à beaucoup d'élégance, la plus grande généralité.».

Vejamos mais de perto o que fez Euler com a preocupação de encararmos o seu método cujo interêsse se sobrepõe ao próprio interêsse do problema: Se $2x$, $2y$, $2z$, r, q, p representam respectivamente as medidas dos lados e das medianas respectivas dum triângulo, as equações fundamentais são: $p^2=2x^2+2y^2-z^2$, $q^2=2x^2+2z^2-y^2$, $r^2=2y^2+2z^2-x^2$ (Euler nota aqui, o que não interessa porém à sua resolução, que o triângulo de lados $2p$, $2q$, $2r$ tem as medianas $3z$, $3y$, $3x$). Um sistema equivalente é $p^2-q^2=3(y^2-z^2)$, $p^2+q^2=4x^2+y^2+z^2$, $r^2=2y^2+2z^2-x^2$. E, se se faz intervir a condição (que tôdas as soluções do problema pôsto devem verificar) de que se y e z são racionais p e q são também racionais, pôr-se-ão as duas equações seguintes (que substituem aquela primeira) $q+p=3\frac{a}{b}(y-z)$ e $p-q=\frac{b}{a}(y+z)$ onde a e b são parâmetros tais que a/b é racional. Obtém-se então o sistema $p+q=3\frac{a}{b}(y-z)$, $p-q=\frac{b}{a}(y+z)$, $8x^2=$

$$=\frac{9a^2-b^2}{b^2}(y-z)^2+\frac{b^2-a^2}{a^2}(y+z)^2,\quad 8r^2=$$

$$=\frac{9(b^2-a^2)}{b^2}(y-z)^2+\frac{9a^2-b^2}{a^2}(y+z)^2,$$

e o problema pôsto é agora o de encontrar, para cada par a, b (a/b racional), dois números racionais y e z tais que x e r dados pelas duas últimas equações sejam racionais. Se se fazem as substituições $y+z=a(c+d)$, e $y-z=b(c-d)$ tem-se $p+q=3a(c-d)$, $p-q=b(c+d)$, $\frac{x^2}{a^2}=c^2+d^2+$ $+\frac{b^2-5a^2}{2a^2}cd$, $\frac{r^2}{b^2}=c^2+d^2+\frac{9a^2-5b^2}{2b^2}cd$ e procurar-se-ão para cada par a, b (agora a e b racionais) c e d tais que $\frac{x^2}{a^2}$ e $\frac{y^2}{b^2}$ sejam quadrados de números racionais. Esta última questão resolve-a Euler auxiliado pelo seguinte lema (com cuja demonstração êle começa a sua memória): Dois números da forma $A^2+2PAB+B^2$ e $A^2+2QAB+B^2$ serão sempre quadrados quando $A=4(P+Q)$ e $B=(P-Q)^2-4$. De facto, nas condições da hipótese, o produto dos dois números é o quadrado de $A^2+(P+Q)AB-B^2$ e o primeiro número é o quadrado de $(P-Q)(3P+Q)-4$ (o segundo número será, pela simetria, o quadrado de $(Q-P)(3Q+P)-4$). A aplicação dêste lema permite, de facto, a resolução da última questão e portanto a determinação dos triângulos nas condições requeridas: Será $A=c$, $B=d$, $P=\frac{b^2-5a^2}{4a^2}$

e $Q=\frac{9a^2-5b^2}{4b^2}\cdot$ Euler simplifica esta aplicação e os cálculos utilizando um corolário do seu lema e encontra, por exemplo, para $a=2$ e $b=1$, $x=202$, $y=377/2$ e $z=619/2$.

O método consiste aqui na introdução de parâmetros e na determinação de x, y, z, p, q, r como funções racionais dêstes parâmetros capazes de se substuïrem às equações fundamentais. É êste método aplicado por Euler sistemáticamente e magistralmente (na opinião do professor Fueter, um dos prefaciadores da edição das obras completas de Euler) a tôda uma série de problemas que parece terem sido demasiadamente esquecidos e deverem retomar-se dum ponto de vista moderno pelos matemáticos da nova geração.

Quanto a indicações bibliográficas para êste problema do triângulo só posso dar, além das obras completas de Euler, especialmente os III e V vols. da série 1.ª, um artigo, que não li, de P. V. Schaewen, «Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Seitenhalbrèrenden», na revista «Zeitschrift für die Realschulwesen», 40, 1915, pág. 145.

Duas demonstrações de um mesmo facto

por J. Albuquerque

(Bolseiro em Roma do Instituto para a Alta Cultura)

Seja $y=f(x)$ uma função real de variável real definida num intervalo (a, b) extremos incluídos. Vamos demonstrar o seguinte importante teorema:

Teorema 1. *Se* f(x) *é contínua no intervalo* (a,b) *extremos incluídos, e nos extremos do intervalo toma valores não nulos de sinais contrários, então* f(x) *anula-se, pelo menos num ponto interior ao intervalo.*

Por hipótese $f(x)$ é contínua relativamente ao intervalo (a,b), num dos extremos, por exemplo em a. Isto significa que se tomarmos uma vizinhança $V_{f(a)}$ do ponto $f(a)$, existirá uma vizinhança V_a do ponto a, tal que: $f[V_a\cdot(a,b)]\subset V_{f(a)}$.

Supondo-se $f(a)\neq 0$, existe sempre, entre os números $f(a)$ e zero, outro número real com o sinal de $f(a)$. Consideremos então as vizinhanças $V_{f(a)}$ que são os intervalos $[f(a)-k, f(a)+k]$, extremos incluídos, onde $0<k<|f(a)|$.

A cada uma dessas vizinhanças corresponde, devido à continuïdade de f no ponto a, uma vizinhança V_a do ponto a, tal que: $f[V_a\cdot(a,b)]\subset V_{f(a)}$, isto é, tal que se $x\in V_a\cdot(a,b)$ então $f(x)$ tem o sinal de $f(a)$.

O conjunto $V_a\cdot(a,b)$ é um intervalo $(a,a+h)$ extremos incluídos, podendo ser $h>0$ se fôr $a<b$, ou então $h<0$ se fôr $a>b$.

A continuïdade de $f(x)$ em a, *assegura-nos a existência* de um intervalo $(a,a+h)$ tal que se $x\in(a,a+h)$ extremos incluídos, será $f(x)$ do sinal de $f(a)$.

Consideremos todos os intervalos $(a, a+h)$ de comprimento $|h|$ que gosam da propriedade indicada.

Temos $(a,a+h)=V_a\ (a,b)\subset(a,b)$ e portanto o intervalo $(a,a+h)$ é formado só de pontos do intervalo (a,b). Como $f(b)$ é de sinal contrário ao de $f(a)$, todos os intervalos $(a,a+h)$ têm o extrêmo $a+h$, *interior a* (a,b).

O comprimento $|h|$ dêstes intervalos admite um limite superior que representaremos por $|\xi|$ e que será o comprimento do intervalo $(a,a+\xi)$, intervalo limite da família de intervalos $(a,a+h)$. O intervalo $(a,a+\xi)$ está contido no intervalo (a,b); o ponto $a+\xi$, à primeira vista poderá coïncidir com o ponto b: veremos já a seguir que não.

É neste momento que intervém a hipótese da continuïdade da função $f(x)$ noutros pontos de (a,b) além do ponto a. Para prosseguir a demonstração é necessário que a função seja contínua no ponto $a+\xi$.

Com efeito, se a função é contínua no ponto $a+\xi$, sendo $a+\xi$ um ponto de acumulação do conjunto de pontos $a+h$, para cada vizinhança $V_{f(a+\xi)}$ do ponto $f(a+\xi)$ pode determinar-se uma vizinhança $V_{a+\xi}$ do ponto $a+\xi$, tal que: $f[V_{a+\xi}\cdot(a,b)]\subset V_{f(a+\xi)}$.

Isto significa que se $a+\xi$ é ponto de acumulação do conjunto de pontos $a+h$, então $f(a+\xi)$ será ponto de acumulação do conjunto de pontos $f(a+h)$. Conclui-se portanto que $f(a+\xi)$ terá o