Notícia dum problema de geometria e duma memória de Euler

por **Hugo Ribeiro**

(Bolseiro do Instituto Para a Alta Cultura, em Zürich)

Encontrar todos os triângulos de lados e medianas racionais. Aqui está um problema que, a avaliar pelo enunciado, todos julgarão ter compreendido, mas ninguém (se estou, como julgo, bem informado) entendeu ainda perfeitamente. Jacobi ocupou-se desta questão e Euler escreveu sôbre ela, pelo menos, duas memórias em latim e uma terceira, posterior, em língua francesa. É esta última que me proponho resumir aqui. Euler dá aqui um processo muito geral para encontrar triângulos de lados e medianas racionais. Mas o que se não sabe, ainda hoje, é se êste processo fornece *todos* os triângulos com esta propriedade: não se conhece um exemplo dum triângulo com esta propriedade que não possa obter-se por aquêle processo, nem se demonstrou a inexistência de um tal exemplo. Logo no início desta memória, que com o título «Problème de géométrie résolu par l'Analyse de Diophante» foi publicada em 1820 no tomo VII (1815-1816) das «Mémoires de l'Académie des Sciences de S.t Pétersbourg», pág. 3-9 (e vai reaparecer agora num dos volumes da já monumental edição das obras completas de Euler promovida pela Sociedade Helvética das Ciências Naturais), diz-nos o próprio autor: «J'ai déjà donné, à différentes reprises, des solutions de ce problème, sans qu'aucunne m'ait entièrement satisfait. Celle que je présente ici réunit, à beaucoup d'élégance, la plus grande généralité.».

Vejamos mais de perto o que fez Euler com a preocupação de encararmos o seu método cujo interêsse se sobrepõe ao próprio interêsse do problema: Se $2x$, $2y$, $2z$, r, q, p representam respectivamente as medidas dos lados e das medianas respectivas dum triângulo, as equações fundamentais são: $p^2=2x^2+2y^2-z^2$, $q^2=2x^2+2z^2-y^2$, $r^2=2y^2+2z^2-x^2$ (Euler nota aqui, o que não interessa porém à sua resolução, que o triângulo de lados $2p$, $2q$, $2r$ tem as medianas $3z$, $3y$, $3x$). Um sistema equivalente é $p^2-q^2=3(y^2-z^2)$, $p^2+q^2=4x^2+y^2+z^2$, $r^2=2y^2+2z^2-x^2$. E, se se faz intervir a condição (que tôdas as soluções do problema pôsto devem verificar) de que se y e z são racionais p e q são também racionais, pôr-se-ão as duas equações seguintes (que substituem aquela primeira) $q+p=3\frac{a}{b}(y-z)$ e $p-q=\frac{b}{a}(y+z)$ onde a e b são parâmetros tais que a/b é racional. Obtém-se então o sistema $p+q=3\frac{a}{b}(y-z)$, $p-q=\frac{b}{a}(y+z)$, $8x^2=\frac{9a^2-b^2}{b^2}(y-z)^2+\frac{b^2-a^2}{a^2}(y+z)^2$, $8r^2=\frac{9(b^2-a^2)}{b^2}(y-z)^2+\frac{9a^2-b^2}{a^2}(y+z)^2$, e o problema pôsto é agora o de encontrar, para cada par a, b (a/b racional), dois números racio- y e z tais que x e r dados pelas duas últimas equações sejam racionais. Se se fazem as substituïções $y+z=a(c+d)$, e $y-z=b(c-d)$ tem-se $p+q=3a(c-d)$, $p-q=b(c+d)$, $\frac{x^2}{a^2}=c^2+d^2+\frac{b^2-5a^2}{2a^2}cd$, $\frac{r^2}{b^2}=c^2+d^2+\frac{9a^2-5b^2}{2b^2}cd$ e procurar-se-ão para cada par a, b (agora a e b racionais) c e d tais que $\frac{x^2}{a^2}$ e $\frac{y^2}{b^2}$ sejam quadrados de números racionais. Esta última questão resolve-a Euler auxiliado pelo seguinte lema (com cuja demonstração êle começa a sua memória): Dois números da forma $A^2+2PAB+B^2$ e $A^2+2QAB+B^2$ serão sempre quadrados quando $A=4(P+Q)$ e $B=(P-Q)^2-4$. De facto, nas condições da hipótese, o produto dos dois números é o quadrado de $A^2+(P+Q)AB-B^2$ e o primeiro número é o quadrado de $(P-Q)(3P+Q)-4$ (o segundo número será, pela simetria, o quadrado de $(Q-P)(3Q+P)-4$). A aplicação dêste lema permite, de facto, a resolução da última questão e portanto a determinação dos triângulos nas condições requeridas: Será $A=c$, $B=d$, $P=\frac{b^2-5a^2}{4a^2}$