se define, não vai do nascimento ao ocaso mas é sim o lapso de tempo em que, no campo, se pode trabalhar com a luz do Sol, isto é, começa um pouco antes do nascimento e termina um pouco depois do ocaso ou, empregando uma linguagem mais precisa, começa no início do crepúsculo *civil* da manhã e termina no fim do da tarde. É no fim do crepúsculo civil da tarde que os sinos das igrejas fazem ouvir o toque das *Ave-Marias* que durante séculos (e em algumas terras ainda hoje) foi o sinal de largada do trabalho nos campos.

Se a nova significação de *dia solar* inclui ou não os crepúsculos é questão em que os advogados podem dar largas à sua habilidade.

# TEMAS DE ESTUDO

Há tempos já a Redacção da «Gazeta de Matemática» pensara criar uma secção onde fôssem propostos aos leitores mais interessados alguns temas de estudo e investigação sôbre vários assuntos de importância mas acessíveis aos conhecimentos da maioria dos nossos leitores. Não faltam, com efeito, temas de trabalho quer dentro dalguns capítulos da matemática clássica, que podem, porém, ser explorados em vários sentidos, ou ser interpretados dum ponto de vista mais geral de acôrdo com as ideias actuais, quer dentro do vasto campo das modernas teorias matemáticas. Havia, no entanto, que encarregar desta importante e simpática tarefa um grupo, tão grande quanto possível, de colaboradores, alguns dos quais ausentes do país, e pedir-lhes dedicassem a sua atenção e um pouco do seu tempo livre, em geral muito escasso, a êste novo trabalho. E era o que se estava tratando de organizar.

O artigo «O Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira» do nosso colaborador António Monteiro suscitou porém da parte dalguns dos nossos jóvens leitores o pedido de creação desta secção Julgamos interessante transcrever parte de duas cartas que à Redacção da «Gazeta de Matemática» dirigiram dois alunos do 2.º ano duma das nossas Faculdades de Ciências. Numa das cartas diz-se:

«Li o artigo da «Gazeta de Matemática» «O Prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira» e concordo em que êsse apêlo tem muita razão de ser lançado. Eu sempre tive amor e uma certa aptidão natural para a matemática. E foi êsse mesmo amor que me levou a escolher carreira quando completei o 7.º ano. Gosto por isso de mexer na matemática, de palpar os seus factos na máxima realidade, e até mesmo de perscrutar, isto é, de investigar. Mas para isso não tenho tido quem me oriente eficazmente, apesar de todos os meus Professores se oferecerem para me dar todos os esclarecimentos. Gostaria, pois, que me fôssem confiados temas de estudo e de investigação, para pôr à prova as minhas aptidões nêsse sentido. Por isso, corro ao encontro da nossa «Gazeta», pedindo: não se espere que os nossos Professores apresentem os temas e os resultados da sua investigação, mas a própria «Gazeta» que nos conceda êsses temas, com os quais possam os alunos afiar o seu engenho matemático. Por mim, ficaria muito grato se visse no número de Julho êsses temas com que me pudesse entreter e estudar matemática durante as férias grandes, sôbre Complementos de Álgebra e Geometria Projectiva e mesmo sôbre outras cadeiras, os quais interessarão outros e a mim em próximos anos. Parece-me boa a altura do ano, pois que, libertos das obrigações dos exames poderemos estudar aquilo que nos aprouver, sem pressas e, portanto, com mais segurança e consciência».

Na outra carta lê-se:

«Menciona-se nesse artigo como uma das causas da indiferença por êste prémio o facto dos professores não proporem aos seus alunos temas de trabalho; fundado nesta consideração, lembrava à redacção da «Gazeta de Matemática» se não se poderia incitar os leitores da revista a concorrer ao referido prémio, publicando temas de matemática nas condições do prémio e que pudessem ser tratados pelos leitores, indicando-se a bibliografia relacionada com os temas propostos».

Os acontecimentos precipitaram-se e nós apressamo-nos a indicar já alguma coisa para esta incipiente secção em organização, transcrevendo um tema que nos foi enviado pelo nosso colaborador em Zürich, o bolseiro do Instituto Para a Alta Cultura, Hugo B. Ribeiro, e algumas outras indicações fornecidas pela mesma carta:

«Um tema que seria de grande interêsse para os alunos das nossas Faculdades de Ciências é o da *Teoria Elementar dos Poliedros* e especialmente (o que se mostra como excepcionalmente instrutivo) o estudo do desenvolvimento desta teoria desde Euler, a análise das diversas demonstrações do teorema de Euler. O assunto tem um carácter elementar e é capaz de despertar, desde o início, uma curiosidade que se transformaria fàcilmente em verdadeiro interêsse. Por outro lado não tem sido cultivado entre nós e constitui um capítulo introdutório a um assunto moderno cujo desenvolvimento é hoje tão importante, a Topologia, e introdutório ainda a aplicações recentemente desenvolvidas da Álgebra Moderna. Em língua alemã estudar-se-iam com esta orientação as lições de *Steinitz* redigidas e ampliadas por *Rademacher* «Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter einshluss der Elemente der Topologie», Berlin, Springer, 1934.

Aos alunos das nossas escolas de engenharia e especialmente aos do Instituto Superior Técnico, queremos indicar um livro onde encontrarão interessantes temas de trabalho. Trata-se de «Mathematics applied to electrical engineering» de A. G. Warren, New-York, ed. van Nostrand Company, inc. 1941. Dêste livro podemos dizer que está repleto de exemplos e contém, além das aplicações elementares e das teorias das equações diferenciais, séries de Fourier, funções de Bessel, etc., certos capítulos pouco divulgados entre nós, como o Cálculo de Heavside, transformações conformes e respectivas aplicações e útil biblografia. Aproveitamos a oportunidade para citarmos uma outra publ cação recente embora não pròpriamente matemática. Trata-se do livro «Die elektronenröhre als Physikalisches Messgerät» (A válvula electrónica como instrumento de medições físicas) de Josef Schintlmeister, Wien, Springer 1942.

Chamamos finalmente a atenção do leitor para os artigos publicados nas primeiras páginas dêste número onde são dadas sugestões várias que podem aproveitar-se no sentido de novas investigações.

# MOVIMENTO MATEMÁTICO

## CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DO PORTO

### A resolução da identidade em espaços separáveis e não separáveis

Em fins de Maio do corrente ano realizou o Prof. Ruy Luís Gomes no Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto algumas lições sôbre «A resolução da identidade em espaços separáveis e não separáveis». O referido professor escreveu para os nossos leitores o resumo que segue:

Dentro do moderno desenvolvimento da teoria do espaço de Hilbert, devido principalmente a J. v. Neumann, F. Riesz e M. H. Stone, ocupa um lugar importante o estudo dos operadores lineares, através da sua decomposição espectral canónica: (1) $A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda)$.

$E(\lambda)$ é uma resolução da identidade e a integração (simbólica) (1) deve tomar-se no sentido de Stieltjes. A igualdade (1), ou melhor $(Af,g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, d(E(\lambda)f,g)$, é válida para todos os elementos $f\in H$ (espaço de Hilbert) tais que $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\,[E(\lambda)f]^2<+\infty$; $g$ qualquer. Se quizermos definir uma integração Lebesgue-Stieltjes, o que de resto já se encontra, embora numa forma diferente, na obra de H. Stone, «Linear Transformations in Hilbert Space» — Cap. VI — temos de substituir as funções de intervalo $I=[a,b]$ $U_{f,g}(I)=$ $=(E(I)f,g)$ ou $U_f(I)=|E(I)f|^2$ por uma medida exterior a uma certa classe aditiva.

Na nossa exposição partimos da função aditiva e não-negativa de intervalo $U_f(I)=[E(I)f]^2$ para construir à maneira de Lebesgue, a medida exterior $U_f^*(A)=\liminf_{A\subset\Sigma I_u^0}\Sigma\, U_f(I_u)$, relativa ao conjunto $A\subset R_1$.

A circunstância de $U_f(I)$ ser o quadrado da norma da projecção $E(I)$ de $f$, levou-nos a averiguar se não seria possível definir uma nova projecção $E(A)$, função unívoca de $A$, que aplicada ao elemento $f\in H$ desse o mesmo resultado que $U_f^*(A)$.

Ora, as conclusões a que chegámos foram as seguintes:

$\alpha$) O espaço é separável.

É sempre possível determinar a projecção $E(A)$, função unívoca de $A$, e as suas principais propriedades são:

1.º) $E(R_1)=1$, $E(0)=0$
2.º) $E(A)\leq E(B)$, $A\subset B$
3.º) $E(A)\cdot E(B)=E(B)\cdot E(A)$;
4.º) $E(\pi A_n)=\underset{n}{\pi} E(A_n)$