

o início, uma curiosidade que se transformaria facilmente em verdadeiro interesse. Por outro lado não tem sido cultivado entre nós e constitui um capítulo introdutório a um assunto moderno cujo desenvolvimento é hoje tão importante, a Topologia, e introdutório ainda a aplicações recentemente desenvolvidas da Álgebra Moderna. Em língua alemã estudará-se com esta orientação as lições de *Steinitz* redigidas e ampliadas por *Rademacher* «Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter einshluss der Elemente der Topologie», Berlin, Springer, 1934.

Aos alunos das nossas escolas de engenharia e especialmente aos do Instituto Superior Técnico, queremos indicar um livro onde encontrarão interessantes temas de trabalho. Trata-se de «Mathematics applied to electrical engineering» de A. G. Warren, New-York, ed. van Nostrand Com-

pany, inc. 1941. Dêste livro podemos dizer que está repleto de exemplos e contém, além das aplicações elementares e das teorias das equações diferenciais, séries de Fourier, funções de Bessel, etc., certos capítulos pouco divulgados entre nós, como o Cálculo de Heavside, transformações conformes e respectivas aplicações e útil bibliografia. Aproveitamos a oportunidade para citarmos uma outra publicação recente embora não propriamente matemática. Trata-se do livro «Die elektronenröhre als Physikalische Messgerät» (A válvula electrónica como instrumento de medições físicas) de Josef Schintlmeister, Wien, Springer 1942.

Chamamos finalmente a atenção do leitor para os artigos publicados nas primeiras páginas dêste número onde são dadas sugestões várias que podem aproveitar-se no sentido de novas investigações.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

CENTRO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA DO PORTO

A resolução da identidade em espaços separáveis e não separáveis

Em fins de Maio do corrente ano realizou o Prof. Ruy Luís Gomes no Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Porto algumas lições sobre «A resolução da identidade em espaços separáveis e não separáveis». O referido professor escreveu para os nossos leitores o resumo que segue:

Dentro do moderno desenvolvimento da teoria do espaço de Hilbert, devido principalmente a J. v. Neumann, F. Riesz e M. H. Stone, ocupa um lugar importante o estudo dos operadores lineares, através da sua decomposição espectral canónica:

$$(1) \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda).$$

$E(\lambda)$ é uma resolução da identidade e a integração (simbólica) (1) deve tomar-se no sentido de Stieltjes. A igualdade (1), ou melhor

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)f, g),$$

é válida para todos os elementos $f \in H$ (espaço de Hilbert) tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d[E(\lambda)f]^2 < +\infty; \quad g \text{ qualquer.}$$

Se quisermos definir uma integração Lebesgue-Stieltjes, o que de resto já se encontra, embora numa forma diferente, na obra de H. Stone, «Linear Transforma-

tions in Hilbert Space» — Cap. VI — temos de substituir as funções de intervalo $I = [a, b]$ $U_{I,0}(I) = (E(I)f, g)$ ou $U_I(I) = |E(I)f|^2$ por uma medida exterior a uma certa classe aditiva.

Na nossa exposição partimos da função aditiva e não-negativa de intervalo $U_I(I) = [E(I)f]^2$ para construir à maneira de Lebesgue, a medida exterior $U_I^*(A) = \liminf_{A \subset \Sigma I_n} \Sigma U_I(I_n)$, relativa ao con-

junto $A \subset R_1$.

A circunstância de $U_I(I)$ ser o quadrado da norma da projecção $E(I)$ de f , levou-nos a averiguar se não seria possível definir uma nova projecção $E(A)$, função unívoca de A , que aplicada ao elemento $f \in H$ desse o mesmo resultado que $U_I^*(A)$.

Ora, as conclusões a que chegámos foram as seguintes:

1.º) O espaço é separável.

É sempre possível determinar a projecção $E(A)$, função unívoca de A , e as suas principais propriedades são:

$$1.º) \quad E(R_1) = 1, \quad E(0) = 0$$

$$2.º) \quad E(A) \leq E(B), \quad A \subset B$$

$$3.º) \quad E(A) \cdot E(B) = E(B) \cdot E(A);$$

$$4.º) \quad E(\pi A_n) = \pi E(A_n)$$

$$5.^\circ) E(\sum A_n) = \sum E(A_n),$$

quando as projecções se supõem applicadas a elementos f relativamente aos quais todos os A_n são mensuráveis U_f^* .

$\beta)$ O espaço não é separável.

Se A é um conjunto boreleano ainda é possível definir, $E(A)$, função unívoca de A , por maneira que $U_f^*(A) = |E(A)f|^2$, para todo f do espaço.

Se A é qualquer, a projecção $E(A) =$

$$= \pi_{G_\delta \supset A} E(G_\delta), \text{ permite-nos escrever } U_f^*(A) = |E(A)f|^2, \text{ quando } f \text{ é um dos elementos relativamente aos quais } A \text{ é mensurável } U_f^*.$$

Nota — Sobre o problema geral de decomposição espectral de operadores lineares em espaços separáveis ou não, deve consultar-se o último trabalho de Béla v. Sz. Nagy — «Spektral — darstellung Linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes» — [Ergebnisse des Mathematik und ihrer Grenzgebiete — Berlin 1942].

Multiplicações vectoriais associativas e modulares

Na Faculdade de Ciências do Pôrto, tem-se realizado no Centro de Estudos de Matemática, uma série de lições subordinadas ao tema «Multiplicações vectoriais, associativas e modulares».

O Prof. Almeida e Costa amavelmente escreveu para os leitores da «Gazeta de Matemática» a seguinte notícia:

O assistente Gonçalves Miranda, desenvolve uma álgebra linear associativa em que os elementos α , formados pelo conjunto de n números complexos, são tratados como habitualmente se faz nas referidas álgebras. Introduce, porém, a par

dos elementos α , que designa por vectores contravariantes, elementos covariantes da álgebra, aos quais estende a propriedade associativa. Aparecem então, naturalmente, os produtos mixtos.

A representação dos elementos da álgebra por matrizes é limitada à correspondência de produto a produto.

O assistente G. Miranda dá, finalmente, uma imagem no espaço projectivo n -dimensional dos seus diferentes resultados. O fundamento da construção da imagem reside em fazer corresponder um ponto a cada elemento contravariante e um plano a cada vector covariante.

O professor Alexandre Proca em Portugal

Chegou a Portugal o Prof. Alexandre Proca, do Instituto Henri Poincaré de Paris, que, conforme já aqui noticiámos, assumindo a direcção dos trabalhos do Seminário de Física Teórica anexo ao

Centro dos Estudos Matemáticos do Pôrto, vem continuar a obra iniciada pelo Prof. Guido Beck, que se encontra actualmente a trabalhar no Observatório Astronómico de Córdoba (Argentina).

SÔBRE O ENSINO DA FÍSICA EM ZURIQUE

por A. Gibert

(bolseiro do Instituto para a Alta Cultura, em Zurique)

Na Escola Politécnica Federal de Zurique existe uma secção de Matemática e Física, a secção IX, e, também uma Associação dos antigos alunos da secção IX.

Em Janeiro deste ano, durante uma das sessões desta Associação, um dos seus membros alvitrou que se procedesse à recolha de informações que tornassem possível fazer ao Conselho Escolar uma proposta documentada tendente a *melhorar* o ensino (Devemos dizer que este já é considerado geralmente, na Europa, como muito bom).

O resultado desse inquérito acaba de ser apresentado à referida Associação que encarregou imediatamente uma comissão de elaborar a repre-

sentação que deve ser submetida ao Conselho Escolar (Schulrat). No entanto, a influência deste primeiro passo, despido de qualquer carácter oficial, já se fará sentir no próximo semestre através da criação de um *Seminário de Matemática para físicos* incluído no quinto semestre do curso.

O trabalho preliminar consistiu na reunião das respostas a um grupo de perguntas, entre as quais destacamos as seguintes:

4. ¿Será útil para os físicos a cadeira de Geometria Descritiva com o desenvolvimento actual (dois semestres)? Respostas: 1, sim; 21, apenas um semestre.

Observação: É natural que cause certa admiração a alguns leitores da *Gazeta de Matemática* que não tenha sido votada, pura e simplesmente, a supressão da cadeira. Mas, é preciso não esquecer que o Instituto de Física, apesar da sua grande independência, está ligado à grande escola de engenharia que é a E. P. F. e é, pois, natural que sofra a sua influência. Por outro lado entende-se aqui que a cultura geral tem sua importância e reconhece-se ainda que certos aspectos modernos da Geometria Descritiva interessam alguns ramos da Física.

6. ¿ Não seria conveniente que se introduzissem os seguintes cursos: a) Métodos matemáticos da Física; b) Introdução à Física teórica? Respostas: 3, contra; 19 a favor.

Observação: No que diz respeito à alínea a) não se deve concluir da pergunta que não é já dada aqui aos alunos abundante material teórico e prático relativo a esses métodos (o que se torna evidente depois da leitura do plano de estudos que damos no fim). No entanto, para as exigências actuais da Física, esse ensino parece não ter tomado ainda todo o desenvolvimento desejável.

Quanto à alínea b) a situação é a seguinte: Entre os cursos de Física experimental do professor Scherrer (bem conhecido pelo seu trabalho fundamental sobre o chamado *efeito Debye-Scherrer*) e as lições de Física teórica do professor G. Wentzel (um dos físicos teóricos de maior vulto da actualidade) não existe um curso de transição, conscientemente organizado com esse fim, que prepare os alunos, por um lado, para um mais fácil progresso nos métodos da *teoria* e, por outro lado, que consolide, com a indispensável argamassa teórica, os conhecimentos adquiridos com a *experiência*.

7. ¿ Será a teoria das funções necessária para os físicos? Respostas: 2, não; 19, sim, o que dispensa comentários.

9. ¿ Acha suficiente o curso de Química? Respostas: 0, sim; 21, não.

Observação: Calculo que alguns inimigos da tão falada, separação, em Portugal, da Química e da Física (que se deveria antes ligar à Matemática) poderão supor encontrar aqui justificação para a sua condenável atitude inconsciente mas pernicioso. Mas, enganam-se! É que, presentemente, o curso de Física da E. P. F. (8 semestres) conta uma única cadeira semestral de Química

(inorgânica) apenas com três horas semanais de laboratório. Isto é, manifestamente, muitíssimo pouco, pois é claro que um físico precisa de possuir as noções e métodos fundamentais da Química, nomeadamente, da Química Inorgânica. Mas para que poderão servir aos físicos conhecimentos especiais de Química orgânica? E, para que poderá servir, seja a quem for, a transformação do seu espírito em ficheiro de receitas de Análise Química?!

Note-se bem, pois, que é este o espírito daqueles 21 indivíduos que não acham suficiente o actual ensino da Química na E. P. F.

São estes alguns exemplos dos assuntos de que consta o inquérito preliminar a que nos referimos. Brevemente, esperamos poder ter ocasião de descrever o desenvolvimento desta actividade tão progressiva.

Por outro lado, por nos parecer complemento indispensável do que precede, vamos dar ainda o plano geral dos estudos ordinários dum aluno de Física da secção IX.

O curso consta de várias cadeiras, umas obrigatórias, facultativas outras, distribuídas por oito semestres. Os exames fazem-se em duas épocas apenas: uma no fim do quarto semestre, outra depois do oitavo semestre. As cadeiras dos quatro primeiros semestres são comuns para os alunos de Matemática e de Física. Os leitores poderão encontrar a sua lista no artigo de Maria do Pilar Ribeiro, na *Gazeta de Matemática* n.º 12, pág. 20. Devem apenas acrescentar, no terceiro semestre, uma cadeira de Química Inorgânica (duas horas de teoria e três de laboratório).

O exame no final dos quatro primeiros semestres consta de provas sobre: 1) Cálculo diferencial e integral; 2) Mecânica I e II; 3) Física I e II; 4) Geometria Descritiva I e II e Geometria Vectorial; 5) Química. As notas das provas 1, 2 e 3 têm o coeficiente 2 e as das restantes o coeficiente 1.

Depois do quarto semestre os alunos têm grande liberdade de escôlha, pois existem cerca de sessenta cursos para esse grau de ensino. Como exemplo, indicaremos algumas das cadeiras do quinto e sexto semestres destinadas, particularmente, a físicos:

Cálculo das probabilidades (2 horas), Funções analíticas (3 horas), Equações diferenciais lineares (3 horas), Teoria do potencial (3 horas e 1 hora de exercícios), Equações às derivadas parciais da teoria do calor (2 horas), Seminário sobre métodos matemáticos da mecânica quântica (2 horas), Métodos numéricos (2 horas), Descarga nos gases

(2 horas), Mecânica ondulatória (2 horas), Seminário sobre problemas actuais da física experimental (2 horas), Técnica da alta frequência (2 horas), Teoria electrónica dos metais e semicondutores (2 horas), Colóquio de física (2 horas), Óptica teórica (3 horas), Exercícios de óptica teórica (1 hora), Estatística quântica (1 hora), Seminário de física teórica (2 horas), Problemas de radioactividade natural e artificial (1 hora), etc.

No quinto, sexto e sétimo semestres os alunos de Física têm ainda trabalhos avançados de laboratório todos os dias sem horário certo. Na realidade, o aluno *avanzado* de Física entra no laboratório às 7 ou 8 horas da manhã e sai às 6 horas da tarde, abandonando-o apenas para a refeição do meio dia e para assistir aos cursos que lhe interessam. No oitavo semestre fazem os chamados *trabalhos pessoais de Física*, que consistem na resolução de um tema de trabalho a realizar em quatro meses e do qual devem entregar um relatório que constitui o chamado *trabalho de diploma*. Na execução d'este exigem-se, pelo menos, 24 horas semanais de laboratório.

O exame, no final dos segundos quatro semestres, consta de provas sobre: 1) Física experimental, 2) Física teórica, 3) Análise matemática, 4) Um curso livre à escolha entre Astronomia, Alta Mecânica, Prática de Análise, Cálculo das Probabilidades, Técnica de Alta Frequência, Química, Mineralogia, Geodesia. As notas das três primeiras provas têm o coeficiente 2 e a quarta apenas 1.

A respeito do ensino da Física na E. P. F. de Zurique muito mais se poderia escrever com o fim de dar aos nossos estudiosos uma idéa do que esse ensino poderia ser na nossa terra. Estas notas rápidas não pretendem ter outra finalidade, mas talvez a atinjam melhor, se concluirem com duas observações.

1. Qualquer aluno da E. P. F., pelo menos enquanto o é, não pensa noutra coisa senão no seu trabalho, não tem a preocupação dos exames, mas sim a de aprender; só vai aos cursos que o interessam, mas a esses vai com o único fim de aproveitar o máximo do seu mestre; estuda, enfim, porque quer saber e com o objectivo fundamental de adquirir conhecimentos.

2. Qualquer assistente ou professor da E. P. F. pode dedicar e dedica efectivamente toda a sua actividade ao ensino e à investigação; não é forçado a perder tempo com exames a prestações, procura averiguar no exame o saber do aluno (e não a sua capacidade de reter determinado número de páginas), classifica-o tanto melhor quanto mais personalidade o aluno revela e aprecia devidamente a extensão dos seus conhecimentos bibliográficos.

O amor do estudo e uma longa tradição de trabalho infatigável em todos os ramos da actividade são os factores dominantes da elevada posição que a pequena Suíça ocupa no mundo civilizado.

Zurique, Julho de 1943.

SÔBRE NICOLAU COPÉRNICO

(Noticia enviada da Suíça por A. SÁ DA COSTA)

Nicolau Copérnico morreu em 24 de Maio de 1543, poucos dias depois de receber o primeiro exemplar da sua principal obra científica — *De revolutionibus orbium caelestium* — impressa em Nuremberg.

Comemorando o quarto centenário da sua morte, anuncia-se a publicação em nove volumes duma edição completa de todas as suas obras, cartas, escritos e desenhos.

Pouco antes do início da guerra actual surgiu a idéa da publicação das obras completas de Copérnico, cujo plano foi fixado por uma comissão de peritos depois de uma revisão cuidada.

As obras serão apresentadas, cumulativamente, na língua original e numa nova tradução alemã.

Serão publicadas, não só numerosas reproduções do manuscrito da obra fundamental descoberto no século XIX, mas também comentários e desenhos a ela relativos, revelados por laboriosas pesquisas levadas a efeito na Alemanha, na Itália e na Suécia. Completará a edição uma bibliografia completa das obras de Copérnico e uma selecção de documentos relativos à sua vida e à sua obra científica.

O auxílio da União Alemã das Ciências Naturais permitiu a execução imediata do plano da publicação. Assim, o primeiro volume aparecerá brevemente no editor R. Oldenbonog (Münich-Berlim) e os dois seguintes serão publicados ainda no ano corrente. A conclusão da edição está prevista para 1945.

REAL INSTITUTO DE ALTA MATEMÁTICA DE ITÁLIA

Achamos interessante publicar na «Gazeta de Matemática» notícia dos cursos que terão lugar, no próximo ano escolar 1943-44, no Instituto de Alta Matemática de Roma, centro de investigação de alta categoria, de cuja organização e funcionamento já demos ao leitor indicações no nosso número 12.

O leitor, curioso de conhecer um pouco mais do que o título dum curso, encontrará em «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», Roma, 1943. Vol. IV—fasc. 1-2 um pequeno programa-resumo, acompanhado da bibliografia aconselhada para a preparação dos interessados em seguir os referidos cursos de que só transcrevemos os títulos.

Cursos para o ano escolar de 1943-44:

Ugo Amaldi — *Problemas de equivalência de sistemas diferenciais.*

Enrico Bompiani — *Geometria diferencial das transformações.*

Renato Caccioppoli — *Os problemas de existência da Análise como problemas de Geometria funcional.*

Fabio Conforto — *Funções automorfas e geometria algébrica.*

Luigi Fantappiè — *As funcionais não lineares e as suas aplicações ao estudo dos auto valores e dos núcleos resolventes de um dado núcleo.*

Giovanni Giorgi — I — *Conjuntos e números transitivos; II — Matrizes e cálculo respectivo.*

Giulio Krall — *As equações diferenciais e integrais da técnica.*

Francesco Severi — *Continuação das teorias geométricas, topológicas e transcendentais concernentes às superfícies e variedades algébricas.*

Antonio Signorini — *Teoremas de confronto na Física-Matemática, o problema completo da balística externa.*

A N T O L O G I A

MÉTODOS ALGORÍTMICOS — MÉTODOS DIRECTOS

por Georges Bouligand

(de «La causalité des théories mathématiques» págs. 5-7)

Os métodos directos afastam-se pelas suas tendências dos métodos de cálculo ou métodos algorítmicos, cujo desenvolvimento, que data de Descartes e Fermat, conheceu a sua época áurea depois de Newton e Leibnitz. Em lugar de excluir os métodos de cálculo, os métodos directos tendem a discipliná-los orientando-os no sentido do melhor rendimento. O algoritmo será numa dada categoria de problemas um *a posteriori* cujo exame directo terá previamente revelado a melhor adaptação possível. Entrevê-se assim uma das soluções que a actividade matemática sugeriria para responder à pergunta de Serge Bernstein. É como exemplo a reforçar, poder-se hia citar o da análise vectorial, que acompanhando o simbolismo da geometria analítica, se adapta muitíssimo melhor do que esta a uma grande quantidade de problemas.

Evocava há pouco a idade de ouro dos métodos algorítmicos. O apogeu do seu desenvolvimento não anda longe de 1799, ano em que Laplace es-

crevia⁽¹⁾: a análise algébrica bem depressa nos faz esquecer o objectivo principal das nossas investigações levando-nos a ocupar com combinações abstractas, e só no fim é que nos reconduz ao ponto de partida. Mas, abandonando-nos às operações da análise, somos levados pela generalidade deste método».

Eis o que merece ser meditado. A idéia de que o cálculo pode, de algum modo, arrastar-nos, fundamenta-se em constatações impressionantes; como exemplo, a possibilidade, descoberta por Lagrange, de introduzir, sob o nome de dinâmica analítica, métodos de cálculo aplicáveis ao estudo dos movimentos de que podem ser animados os mais variados sistemas materiais, mediante a ex-

⁽¹⁾ Laplace, *Système du monde*, 1799. Esta passagem de Laplace é frequentemente comentada. Cfr. Pierre Boutroux, *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, Alcan, 1920, cap. III: o apogeu e o declínio da concepção sintetista.