REAL INSTITUTO DE ALTA MATEMÁTICA DE ITÁLIA

Achamos interessante publicar na «Gazeta de Matemática» notícia dos cursos que terão lugar, no próximo ano escolar 1943-44, no Instituto de Alta Matemática de Roma, centro de investigação de alta categoria, de cuja organização e funcionamento já demos ao leitor indicações no nosso número 12.

O leitor, curioso de conhecer um pouco mais do que o título dum curso, encontrará em «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», Roma, 1943. Vol. IV—fasc. 1-2 um pequeno programa-resumo, acompanhado da bibliografia aconselhada para a preparação dos interessados em seguir os referidos cursos de que só transcrevemos os títulos.

Cursos para o ano escolar de 1943-44:

Ugo Amaldi — *Problemas de equivalência de sistemas diferenciais.*

Enrico Bompiani — *Geometria diferencial das transformações.*

Renato Caccioppoli — *Os problemas de existência da Análise como problemas de Geometria funcional.*

Fabio Conforto — *Funções automorfas e geometria algébrica.*

Luigi Fantappiè — *As funcionais não lineares e as suas aplicações ao estudo dos auto valores e dos núcleos resolventes de um dado núcleo.*

Giovanni Giorgi — I — *Conjuntos e números transfinitos;* II — *Matrizes e cálculo respectivo.*

Giulio Krall — *As equações diferenciais e integrais da técnica.*

Francesco Severi — *Continuação das teorias geométricas, topológicas e transcendentes concernentes às superfícies e variedades algébricas.*

Antonio Signorini — *Teoremas de confronto na Física-Matemática, o problema completo da balística externa.*

ANTOLOGIA

MÉTODOS ALGORÍTMICOS — MÉTODOS DIRECTOS

por **Georges Bouligand**

(de «La causalité des théories mathématiques» págs. 5-7)

Os métodos directos afastam-se pelas suas tendências dos métodos de cálculo ou métodos algorítmicos, cujo desenvolvimento, que data de Descartes e Fermat, conheceu a sua época áurea depois de Newton e Leibnitz. Em lugar de excluir os métodos de cálculo, os métodos directos tendem a discipliná-los orientando-os no sentido do melhor rendimento. O algorítmo será numa dada categoria de problemas um *a posteriori* cujo exame directo terá prèviamente revelado a melhor adaptação possível. Entrevê-se assim uma das soluções que a actividade matemática sugeriria para responder à pregunta de Serge Bernstein. E como exemplo a reforçar, poder-se hia citar o da análise vectorial, que acompanhando o simbolismo da geometria analítica, se adapta muitíssimo melhor do que esta a uma grande quantidade de problemas.

Evocava há pouco a idade de ouro dos métodos algorítmicos. O apogeu do seu desenvolvimento não anda longe de 1799, ano em que Laplace escrevia [1]: a análise algébrica bem depressa nos faz esquecer o objectivo principal das nossas investigações levando-nos a ocupar com combinações abstractas, e só no fim é que nos reconduz ao ponto de partida. Mas, abandonando-nos às operações da análise, somos levados pela generalidade dêste método».

Eis o que merece ser meditado. A idéia de que o cálculo pode, de algum modo, arrastar-nos, fundamenta-se em constatações impressionantes; como exemplo, a possibilidade, descoberta por Lagrange, de introduzir, sob o nome de dinâmica analítica, métodos de cálculo aplicáveis ao estudo dos movimentos de que podem ser animados os mais variados sistemas materiais, mediante a ex-

---

[1] Laplace, *Système du monde*, 1799. Esta passagem de Laplace é freqüentemente comentada. Cfr. Pierre Boutroux, *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, Alcan, 1920, cap. III: o apogeu e o declínio da concepção sintetista.

clusão do atrito e de certas ligações, isto deixando ainda aberto o campo a uma vasta generalidade.

Mas à medida que a complexidade dos problemas aumentava a eficacidade do cálculo diminuía. Em questões de carácter físico, a prévia redução algébrica escondia por detrás dos símbolos os aspectos do real e, muito a propósito, Bouasse poude falar «das belas coisas que os matemáticos cobrem dum impenetrável mistério».

Muitos físicos sentiram isto com pena. E foi esta a razão por que se procurou bastantes vezes acompanhar as demonstrações rigorosas com provas intuïtivas, menos perfeitas, mas menos afastadas do concreto. No entanto, julgou-se por largo tempo impossível conseguir o rigor por esta via, considerando eivados de vícios redibitórios os raciocínios dos físicos ou dos geómetras.

Sabe-se actualmente que não se trata senão duma opinião preconcebida. Os métodos directos conduzem ao desenvolvimento de raciocínios cuja trama, fortemente acusada, dá a impressão dum todo simultâneamente harmonioso e irreductível. É-se levado sem rodeios da intuïção para a lógica. Unicamente durante o percurso aparecem noções subtis, que se impõem ràpidamente ao que procura a solução, mas que necessitam da parte do investigador, que os põe em evidência, esforços, por vezes, penosos. As vitórias dêste género são o fruto das correntes axiomáticas. Mas voltemos, por um instante ao cálculo, para examinar os pontos fracos.

Quando se utiliza num problema um ou outro modo operatório, raro é haver adaptação perfeita à questão posta. É o que se nota pela necessidade de hipóteses acessórias, para permitir a aplicação do algorítmo. Estas hipóteses auxiliares representarão um papel análogo ao das limitações de cargas que um engenheiro, ao construir um edifício, evita ultrapassar para lhe garantir estabilidade.

Trad. de Manuel Zaluar

ALGUMAS NOTAS CURIOSAS SÔBRE AS RELAÇÕES DE ABEL E CRELLE

por ***E. T. Bell***

(da biografia de Abel em Cap. XVII de «Les grands mathématiciens»)

Tendo deixado o seu país em Setembro de 1825, Abel começou por visitar os matemáticos e astrónomos notáveis da Noruega e Dinamarca; em seguida, em lugar de ir ter com Gauss a Goettingen, como era seu intento, dirigiu-se a Berlim. Aí teve a grande felicidade de encontrar Augusto Leopodo Crelle (1780-1856), que se tornaria para êle um outro Holmboë, mas de muito maior pêso no mundo matemático. Se Crelle contribuíu bastante para a reputação de Abel, êste, pelo seu lado, facilitou grandemente o êxito de Crelle. Onde quer que se cultive hoje a matemática, o nome de Crelle é corrente; não é o de um homem, mas o da grande revista que êle fundou e cujos três primeiros volumes contêm vinte e duas memórias de Abel.

A revista deu a conhecer Abel, ou, pelo menos, a conhecê-lo mais ràpidamente aos matemáticos do continente; mas a obra de Abel lançou a revista com um brilho que se propaga por todo o mundo matemático, e por fim a revista fêz Crelle. Êste modesto amador matemático merece mais do que uma simples menção: o seu tacto e fino instinto na escôlha dos seus colaboradores contribuíram mais para o progresso das matemáticas no século XIX do que uma dúzia de academias científicas.

Crelle gostava da matemática e tinha-a aprendido por gôsto; não era um creador, mas, engenheiro de profissão, foi o construtor da primeira linha férrea da Alemanha, tendo conseguido ocupar uma bela situação; consagrava os seus momentos livres à matemática, que era para êle mais do que um passatempo, porque êle próprio contribuíu para a investigação científica, antes e depois da criação, em 1826, da sua revista: «Journal für die reine und angewandte Mathematik» (Jornal de matemáticas puras e aplicadas), grande impulsionadora das matemáticas alemãs. Esta revista foi o primeiro periódico do mundo consagrado exclusivamente às *investigações* matemáticas; não eram recebidas fàcilmente exposições de obras antigas; pelo contrário, àparte uns trabalhos de Crelle, a revista só aceitava memórias de que não interessava o nome do autor desde que o assunto tratado fôsse novo, rigoroso e de importância (qualidade difícil de definir) suficiente para merecer a publicação. «Crelle» publicou trimestralmente com regularidade, desde 1826 até os nossos dias, um conjunto brilhante de memórias matemáticas originais.

. . . .

Quando Abel chegou, em 1825, a Berlim, Crelle ia justamente lançar-se nesta grande aventura ùnicamente com os seus meios. Há duas versões do primeiro encontro entre Abel e Crelle, ambas de interêsse. Crelle ocupava, naquele momento, funções oficiais para que tinha pouca aptidão e gôsto, as de examinador no «Gewerbe-Institut» (Escola Técnica Profissional) de Berlim. Eis como o próprio Crelle nos conta êste histórico encontro, que nos chegou, é certo, já em terceira mão, por uma carta de Crelle a Weierstrass comunicada por êste a Mittag-Leffler!

«Um belo dia entrou no meu escritório um homem ainda novo, bastante tímido, de cara juvenil e de aspecto muito inteligente. Pensando que se tratava dum candidato a exame de admissão à Escola, expliquei-lhe que teria de fazer vários exames diferentes. No fim, o mancebo abriu a bôca para me dizer em mau alemão: Não se trata de exames mas de matemática».

Crelle percebeu que Abel era estrangeiro e tentou falar-lhe em francês; Abel poude fazer-se entender nesta língua com alguma dificuldade. Crelle preguntou-lhe o que tinha feito em matemática, a que Abel, usando de diplomacia, respondeu ter lido, entre outras, uma memória do próprio Crelle de 1823, recentemente publicada, sôbre as «faculdades analíticas» (cujo nome moderno é o de «factoriais») e que a tinha achado muito interessante. Imediatamente em seguida, esquecendo tôda a diplomacia, pôs-se a mostrar ao seu interlocutor os êrros contidos no estudo, e aqui Crelle manifestou larguesa de espírito. Em lugar de afectar um ar glacial ou irritar-se contra esta presunção audaciosa do rapaz que tinha diante de si, prestou atenção e fêz preguntas cujas respostas ouviu com a maior atenção. Tiveram assim uma longa conversação matemática de que Crelle só parte abrangeu; no entanto apercebeu-se nìtidamente do valor de Abel. Crelle não conseguiu nunca compreender a décima parte do que Abel criou, mas o seu fino instinto matemático indicou-lhe que se tratava de um matemático de primeira categoria e fêz tudo quanto poude para conseguir que fôssem reconhecidos os méritos do seu jovem protegido. Ainda antes do final da sua primeira intervista, Crelle tinha decidido que Abel havia de ser um dos primeiros colaboradores da sua revista.

A narrativa de Abel difere um pouco da de Crelle mas não fundamentalmente. Se lermos nas entrelinhas, vê-se que as diferenças provêm da modéstia de Abel.

Trad. de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 5

1441 — Determine as condições a que devem satisfazer os valores de m para que as raízes da equação $8x^2-(m-1)x+m-7=0$ sejam: 1.º Reais e iguais. 2.º Iguais e de sinal contrário. 3.º Uma recíproca da outra. 4.º Diferentes entre si sendo uma nula. R: 1.º *Basta ser* $\Delta=(m-1)^2-32(m-7)=0$ *ou seja* $m=9$ *ou* $m=25$. 2.º *Deverá verificar-se a condição* $S=(m-1):8=0$ *ou seja* $m=1$. 3.º *As raizes serão reciprocas uma da outra se fôr* $P=(m-7):8=1$, *igualdade que é verificada para* $m=15$. 4.º *Tem-se* $P=0$ *donde o valor* $m=7$.

1442 — Desenvolva, recorrendo à fórmula do binómio de Newton, a expressão $(\sqrt{a}:3-a:\sqrt{3})^4$. Simplifique os têrmos obtidos.

R: $$\frac{a^2}{81}-\frac{4a^2\sqrt{a}}{27\sqrt{3}}+\frac{2a^2}{9}-\frac{4a^3\sqrt{a}}{9\sqrt{3}}+\frac{a^4}{9}.$$

1443 — Partindo da fórmula que dá o número de combinações de n objectos tomados m a m, mostre que se pode obter ${}^{n+1}C_m$ (número de combinações de $n+1$ objectos tomados m a m) adicionando ${}^nC_{m-1}$ a ${}^nC_m$. R: *Como é* ${}^{n+1}C_m=$

$$=\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \text{ e } {}^nC_{m-1}+{}^nC_m=\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+$$
$$+\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!\,m}{(m-1)!\cdot m\cdot(n-m+1)!}+$$
$$+\frac{n!(n-m+1)}{m!(n-m)!(n-m+1)}=\frac{n!(m+n-m+1)}{m!(n-m+1)!}=$$
$$=\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}$$ *verifica-se a relação proposta.*

1444 — Verifique a identidade $\operatorname{sen} 3a=4\operatorname{sen} a\operatorname{sen}(60^\circ-a)\operatorname{sen}(60^\circ+a)$. R: $\operatorname{sen} 3a=4\operatorname{sen} a[\operatorname{sen}60^\circ\cos a-\cos 60^\circ\operatorname{sen} a][\operatorname{sen}60^\circ\cos a+\cos 60^\circ\operatorname{sen} a]=4\operatorname{sen} a\,[3/4\cdot\cos^2 a-1/4\cdot\operatorname{sen}^2 a]=3\operatorname{sen} a\cos^2 a-\operatorname{sen}^3 a$ *o que verifica a relação.*

1445 — Determine sem recorrer às tábuas os valores das linhas trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante) do ân-