do primeiro encontro entre Abel e Crelle, ambas de interêsse. Crelle ocupava, naquele momento, funções oficiais para que tinha pouca aptidão e gôsto, as de examinador no «Gewerbe-Institut» (Escola Técnica Profissional) de Berlim. Eis como o próprio Crelle nos conta êste histórico encontro, que nos chegou, é certo, já em terceira mão, por uma carta de Crelle a Weierstrass comunicada por êste a Mittag-Leffler!

«Um belo dia entrou no meu escritório um homem ainda novo, bastante tímido, de cara juvenil e de aspecto muito inteligente. Pensando que se tratava dum candidato a exame de admissão à Escola, expliquei-lhe que teria de fazer vários exames diferentes. No fim, o mancebo abriu a bôca para me dizer em mau alemão: Não se trata de exames mas de matemática».

Crelle percebeu que Abel era estrangeiro e tentou falar-lhe em francês; Abel poude fazer-se entender nesta língua com alguma dificuldade. Crelle preguntou-lhe o que tinha feito em matemática, a que Abel, usando de diplomacia, respondeu ter lido, entre outras, uma memória do próprio Crelle de 1823, recentemente publicada, sôbre as «faculdades analíticas» (cujo nome moderno é o de «factoriais») e que a tinha achado muito interessante. Imediatamente em seguida, esquecendo tôda a diplomacia, pôs-se a mostrar ao seu interlocutor os êrros contidos no estudo, e aqui Crelle manifestou larguesa de espírito. Em lugar de afectar um ar glacial ou irritar-se contra esta presunção audaciosa do rapaz que tinha diante de si, prestou atenção e fêz preguntas cujas respostas ouviu com a maior atenção. Tiveram assim uma longa conversação matemática de que Crelle só parte abrangeu; no entanto apercebeu-se nìtidamente do valor de Abel. Crelle não conseguiu nunca compreender a décima parte do que Abel criou, mas o seu fino instinto matemático indicou-lhe que se tratava de um matemático de primeira categoria e fêz tudo quanto poude para conseguir que fôssem reconhecidos os méritos do seu jovem protegido. Ainda antes do final da sua primeira intervista, Crelle tinha decidido que Abel havia de ser um dos primeiros colaboradores da sua revista.

A narrativa de Abel difere um pouco da de Crelle mas não fundamentalmente. Se lermos nas entrelinhas, vê-se que as diferenças provêm da modéstia de Abel.

Trad. de Manuel Zaluar

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 5

1441 — Determine as condições a que devem satisfazer os valores de m para que as raízes da equação $8x^2-(m-1)x+m-7=0$ sejam: 1.º Reais e iguais. 2.º Iguais e de sinal contrário. 3.º Uma recíproca da outra. 4.º Diferentes entre si sendo uma nula. R: 1.º *Basta ser* $\Delta=(m-1)^2-32(m-7)=0$ *ou seja* $m=9$ *ou* $m=25$. 2.º *Deverá verificar-se a condição* $S=(m-1):8=0$ *ou seja* $m=1$. 3.º *As raízes serão recíprocas uma da outra se fôr* $P=(m-7):8=1$, *igualdade que é verificada para* $m=15$. 4.º *Tem-se* $P=0$ *donde o valor* $m=7$.

1442 — Desenvolva, recorrendo à fórmula do binómio de Newton, a expressão $(\sqrt{a}:3-a:\sqrt{3})^4$. Simplifique os têrmos obtidos.

R: $$\frac{a^2}{81}-\frac{4a^2\sqrt{a}}{27\sqrt{3}}+\frac{2a^2}{9}-\frac{4a^3\sqrt{a}}{9\sqrt{3}}+\frac{a^4}{9}.$$

1443 — Partindo da fórmula que dá o número de combinações de n objectos tomados m a m, mostre que se pode obter ${}^{n+1}C_m$ (número de combinações de $n+1$ objectos tomados m a m) adicionando ${}^nC_{m-1}$ a ${}^nC_m$. R: *Como é* ${}^{n+1}C_m=$

$$=\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \text{ e } {}^nC_{m-1}+{}^nC_m=\frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!}+$$
$$+\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!\,m}{(m-1)!\cdot m\cdot(n-m+1)!}+$$
$$+\frac{n!(n-m+1)}{m!(n-m)!(n-m+1)}=\frac{n!(m+n-m+1)}{m!(n-m+1)!}=$$
$$=\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}$$ *verifica-se a relação proposta.*

1444 — Verifique a identidade $\operatorname{sen} 3a=4\operatorname{sen} a\operatorname{sen}(60^\circ-a)\operatorname{sen}(60^\circ+a)$. R: $\operatorname{sen} 3a=4\operatorname{sen} a[\operatorname{sen}60^\circ\cos a-\cos60^\circ\operatorname{sen} a][\operatorname{sen}60^\circ\cos a+\cos60^\circ\operatorname{sen} a]=4\operatorname{sen} a[3/4\cdot\cos^2 a-1/4\cdot\operatorname{sen}^2 a]=3\operatorname{sen} a\cos^2 a-\operatorname{sen}^3 a$ *o que verifica a relação.*

1445 — Determine sem recorrer às tábuas os valores das linhas trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante) do ângulo $8\pi/3$. R: $\operatorname{sen} 8\pi/3 = \operatorname{sen} 2\pi/3 = \operatorname{sen}(\pi - \pi/3) = \sqrt{3}/2$; $\cos 8\pi/3 = -\cos\pi/3 = -1/2$; $\operatorname{tg} 8\pi/3 = -\operatorname{tg}\pi/3 = \sqrt{3}$; $\operatorname{cotg} 8\pi/3 = -\operatorname{cotg}\pi/3 = -\sqrt{3}/3$; $\sec 3\pi/3 = -\sec\pi/3 = -2$ *e* $\operatorname{cosec} 8\pi/3 = 2\sqrt{3}/3$.

1446 — Determine, recorrendo ao cálculo logarítmico, o ângulo ao centro que corresponde à corda de 1,23 metros, na circunferência de raio 1,6721 metros. R: *Se fôr* α *o ângulo pedido será* $1{,}23 = 2\times 1{,}6721 \operatorname{sen}\alpha/2$ *donde* $\log\operatorname{sen}\alpha/2 = \log 1{,}23 + \operatorname{colg} 3{,}3442 = 0{,}08991 + \bar{1}{,}47570 = 1{,}56561$ *donde* $\alpha/2 = 21^\circ 34' 47''$ *e* $\alpha = 43^\circ 9' 34''$.

1447 — Indique como se procede à adição de números fraccionários e enuncie as propriedades dessa operação.

1448 — Demonstre que um triângulo é isósceles quando duas das suas medianas têm o mesmo comprimento. R: *Considere um triângulo, determine os meios de dois lados e construa as medianas que supomos iguais. A linha que une os meios dos dois lados é paralela ao terceiro lado. O quadrilátero formado por êsse terceiro lado, pela paralela conduzida pelo meio dos outros dois lados e por estes lados é um trapézio de que as diagonais (medianas do triângulo) são iguais, logo, é isósceles e por isso o triângulo será também isósceles.*

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 1

1449 — Calcule com o auxílio de uma tábua de logaritmos os valores de x que satisfazem à equação $\operatorname{tg} x = -(1-\cos\alpha)\sqrt{\operatorname{sen} 1/2\,\beta}$ para $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 203^\circ 27'$. R: *Como* $\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B-A}{2}\right)$ *e como* $1 = \cos 0^\circ$ *será* $\log\operatorname{tg}(-x) = \log 2 + \log\operatorname{sen} 15^\circ + \log\operatorname{sen} 30^\circ + 1/2\log\operatorname{sen} 78^\circ 16' 30' = 0{,}30103 + \bar{1}{,}41300 + \bar{1}{,}69897 + \bar{1}{,}99542 = \bar{1}{,}40842$ *e* $x = -14^\circ 21' 54'' \pm n\cdot 180^\circ$.

1450 — Defina superfícies prismática e piramidal. Indique alguns sólidos limitados em parte ou no todo por tais superfícies

1451 — Resolva a inequação $x-(x-1):(x+1) < 4x-5$, calculando as raízes com a aproximação de 0,01. R: *A inequação é equivalente a* $(3x^2-x-6):(x+1) > 0$ *e sendo as raízes do numerador* $x_1 = 1{,}59$ *e* $x_2 = -1{,}26$, *os valores que satisfazem à desigualdade são* $x > 1{,}59$ *e* $-1{,}26 < x < -1$.

1452 — Escreva o 4.º termo do desenvolvimento de $(x:\sqrt{y} + \sqrt[3]{y})^5$ e simplifique. R: $T_4 = 10x^2$.

1453 — Enuncie as regras de divisibilidade que conhece.

1454 — Diga como constrói um triângulo, dados os comprimentos de duas medianas e o valor do ângulo cujo vértice é o extrêmo de uma daquelas. R: *Traça-se uma das medianas* AB *e o lugar dos pontos dos quais se vê esta mediana sob o ângulo dado* α; *o vértice do triângulo estará sôbre êsse lugar. Como as medianas se cortam à distância da base de um têrço do seu comprimento marca-se* D *a um têrço de* AB *de* B, *e com centro em* D *descreve-se uma circunferência, de raio* DC *igual a dois terços da outra mediana, que cortará ou não o lugar já achado assim se obtendo o ponto* C; *unindo* C *com* D *e marcando a partir de* D *a distância* DD' *igual a um têrço da segunda mediana obtem-se* D' *que unido com A determina o terceiro lado do triângulo pedido* ACC'.

Soluções dos n.os 1441 a 1454 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 3

I

1455 — Efectue o desenvolvimento de

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2y}} - \sqrt{\frac{2y}{x}}\right)^5$$

e simplifique o mais possível o resultado obtido.

R: $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2y}} - \sqrt{\frac{2y}{x}}\right)^5 = \frac{x}{2y}\sqrt[3]{\frac{x^2}{4y^2}} - 5\cdot\frac{x}{2y}\sqrt[3]{\frac{x}{2y}}\cdot\sqrt{\frac{2y}{x}} + 10\,\frac{x}{2y}\cdot\frac{2y}{x} - 10\sqrt[3]{\frac{x^2}{4y^2}}\,\frac{2y}{x}\sqrt{\frac{2y}{x}} + 5\cdot\frac{4y^2}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x}{2y}} - \frac{4y^2}{x^2}\sqrt{\frac{2y}{x}}$.

1456 — Dada a equação $x^4 + mx^2 + 1 = 0$, determine o coeficiente m de modo que sejam reais *tôdas* as raízes da equação. R: *O parâmetro* m *deve satisfazer apenas às condições* $m < 0$ *e* $m^2 - 4 > 0$ *donde* $m < -2$.

1457 — Defina *função inversa* de uma dada função e escreva a função inversa da função $y = 2\log_a(2x-1)$. R: *A função inversa da função dada é* $x = (1+a^{y/2})/2$.

II

1458 — Numa circunferência de raio igual a 230,08 metros inscreveu-se um triângulo rectângulo. Sabendo que um dos seus ângulos internos mede $58^\circ 18' 12''$, calcule o comprimento do *maior* cateto do referido triângulo. Utilize logarítmos. R: *O maior cateto* b *é o que se opõe ao ângulo* *dado* α. *A hipotenusa é, evidentemete, o diâmetro da circunferência. Tem-se:* $b=2R \operatorname{sen} \alpha$, $\log b = \log 2 + \log R + \log \operatorname{sen} \alpha = 0{,}30103 + 2{,}36188 + \bar{1}{,}92985 = 2{,}59276$ *donde* $b = 391{,}53$ m.

1459 — Determine, em radianos, a expressão geral dos ângulos que verificam a equação $\cos y = \cos 150°$. R: $150° = 5\pi/6$ rad; $y = 2k\pi \pm 5\pi/6 = \frac{12k \pm 5}{6}\pi$ rad.

1460 — Sabendo que x é um ângulo do 1.º quadrante que satisfaz à relação $\operatorname{tg} x = 2 \operatorname{sen} x$, calcule o valor de $\operatorname{tg} x$. R: *Da relação dada deduz-se* $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = 2$ *ou* $\cos x = 1/2$, *donde* $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

III

1461 — Demonstre que os meios dos lados de um triâgulo e o pé de uma qualquer das alturas são vértices de um trapésio isósceles. R: *Sejam* M, N *e* S *respectivamente os pontos médios dos lados* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *e* $\overline{BC}$ *e designemos por* P *o pé da altura referente ao lado* BC. *O quadrilátero* [MNSP] *tem os lados* MN *e* PS *paralelos (pois o segmento* $\overline{MN}$ *que une os pontos médios de* 2 *lados é paralelo ao terceiro lado). Por outro lado o ponto* M *é equidistante de* A *e* P *pois* $\overline{MN}$ *é perpendicular ao meio de* $\overline{AP}$ *(teorema de Thales aplicado às transversais* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AP}$ *interceptadas pelas paralelas* MN *e* BC*). Logo* $\overline{MB} = \overline{MP}$. *Como por construção* $\overline{MA} = \overline{MB}$ *conclui-se que* $\overline{MP} = \overline{MB}$ *e portanto* $\overline{MP} = \overline{NS}$.

1462 — A secção feita num cilindro de revolução por um plano que contém o eixo, é um rectângulo de área igual a 16 cm² e cujo perímetro é igual a 20 cm. Calcule a área lateral do cilindro. R: *Uma das dimensões do rectângulo é o diâmetro* $2r$ *da base do cilindro e a outra é a geratriz* g. *A área lateral é* $A = 2\pi r g = \pi \cdot 16\ \text{cm}^2 = 50{,}24\ \text{cm}^2$.

Soluções dos n.os 1455 a 1462 de J. Calado.

Instituto Superior Técnico

Ponto n.º 1

1463 — Duas bicicletas fazem o percurso AB, no mesmo sentido, partindo a segunda 5 minutos depois da primeira e chegando 10 minutos antes. Ao passarem uma pela outra são fotografadas com a exposição de 1/10 de segundo, verificando-se pela fotografia que, durante a exposição, cada um dos raios das rodas girou de um ângulo correspondente a 10 raios na primeira bicicleta e de um ângulo correspondente a 12 raios na segunda. Sabendo que as rodas das duas bicicletas têm de circunferência 3,65 m e 3,85 m, respectivamente, e que o número de raios de cada roda é 50 na primeira e 55 na segunda, calcular o percurso AB. R: *As velocidades das duas bicicletas são, respectivamente,* $v_1 = 10/50 \times 3{,}65 : 1/10 = 7{,}3$ m/s *e* $v_2 = 12/55 \times 3{,}85 : 1/10 = 8{,}4$ m/s. *Por outro lado, é* $\overline{AB} = 7{,}3 \times t = 8{,}4 \times (t - 900\ \text{s})$ *donde* $t = \frac{75600}{11}$ s *e* $\overline{AB} = 50170{,}91$ m.

1464 — A equação $ax+by+cz=1$ é satisfeita pelos mesmos valores de x para $a=5$, $b=10$ e $c=15$ e para $a=b=c=10$. Exprimir y em função explícita de x. R: *Como* $x=(1-cz-by):a$ *será* $(1-15z-10y):5=(1-10z-10y):10$ *e por isso* $z=(1-10y):20$ *valor que substituido na equação dá* $ax+by+c(1-10y):20=1$ *donde* $y=(20-c-20ax):(20b-10c)$.

1465 — Estudar a variação do trinómio $y=\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 1$ quando x varia entre -2π e 2π e fazer a sua representação gráfica. R: *A função pode escrever-se* $y=(\operatorname{sen} x - 1)^2$ *o que mostra ser esta sempre positiva. Por outro lado basta faser o estudo da variação da função entre* 0 *e* 2π *pois que em virtude da periodicidade de* $\operatorname{sen} x$ *ela retomará os mesmos valores no intervalo* $(-2\pi, 0)$. *Para* $x=0$, $\operatorname{sen} 0 = 0$ e $y=1$; *de* 0 *a* $\pi/2$, *o seno cresce e é positivo e portanto em valor absoluto a diferença* $\operatorname{sen}|x - 1$ *decresce e para* $x=\pi/2$ *será* $y=0$. *De* $\pi/2$ *a* π *o seno é positivo e decresce, e a função* y *cresce atingindo quando* $x=\pi$ *o valor* $y=1$. *No terceiro quadrante o seno é negativo e decrescente e a função continua crescendo atingindo quando* $x=3\pi/2$ *o valor* $y=4$; *no quarto quadrante a função decresce para voltar a ter em* 2π *o valor* 1.

1466 — Calcular a área de um círculo, sabendo que no triângulo rectângulo inscrito com um dos catetos igual a 2, é igual a 1/3 a razão das tangentes dos ângulos agudos. R: *O problema tem duas soluções conforme considerarmos o cateto de medida* 2 *oposto a um ou outro dos ângulos agudos. Teremos assim* $\operatorname{tg} B/\operatorname{tg} C = 3$ *ou* $\operatorname{tg} B/\operatorname{cotg} B = 3$ *e* $\operatorname{tg}^2 B = 3$, *donde* $\cos B = 1:(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 B}) = 1/2$. *No primeiro caso teremos* $2r = 2 \times 1/2 = 1$ *e* $r = 1/2$ *donde a área igual a* $\pi/4$. *No segundo caso* $\cos C = \sqrt{3}/2$ *e* $2r = 2 \times \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$, $r = \sqrt{3}/2$ *e a área mede* $\pi\sqrt{3}/2$.

1467 — Dois triângulos de alturas h e h' tem as bases b e b' sôbre a mesma recta. Tirar uma paralela a esta recta de modo que o segmento nela determinado pelo primeiro triângulo seja duplo do determinado pelo segundo triângulo. R: *Sejam* s *e* s′ *os segmentos da paralela determinados pelos triângulos e* x *a distância da paralela à base dos dois triângulos, será então* $s:(h-x)=b:h$ *e* $s':(h'-x)=b':h$ *e como* $s=2s'$ *vem* $b(h-x):h=2b'(h'-x):h'$ *e por isso teremos* $x=hh'(2b'-b):(2b'h-bh')$.

1468 — Dado um paralelipípedo rectângulo de dimensões 2, 3 e 4 centímetros, determinar o ângulo que deve fazer, com a face menor, um plano tirado pela maior aresta da mesma face para que divida o paralelipípedo em duas partes tais que o volume de uma seja triplo do da outra. R: $V=2.3.4=24\,\mathrm{cm}^3$ *é o volume do prisma dado, e seja* v *o volume do prisma menor. Será* $4v=24$ *e* $v=6\,\mathrm{cm}^3$; *e se for* x *o ângulo do plano com a face menor será* $v=3.1/2.2.2.\mathrm{tg}\,x$ *donde* $6=6\,\mathrm{tg}\,x$ *e* $x=45^\circ$.

Soluções dos n.os 1465 a 1468 de J. da Silva Paulo.

CORRECÇÃO

Problema n.º 1344, «G. M.» n.º 15 — O último período deve ser substituído por: *Os valores de* m *são todos os compreendidos entre* 2 *e* 17/4.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência e finais

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. A. — Matemáticas Gerais — **Alguns pontos dos exames de freqüência e finais do ano lectivo 1942-43.**

1469 — ¿Quantos valores numèricamente distintos toma a expressão x^{y^z} quando as variáveis tomam cada uma um dos valores 2, 3 e 5? O mesmo para x^{yz}. R: *A expressão* x^{y^z} *toma, nas condições indicadas, tantos valores quantos o número de permutações completas de* 3 *elementos ou seja* $3^3=27$. *Já não sucede o mesmo com* x^{yz}. *Com efeito, o expoente* yz *toma valores distintos cujo número é o de combinações completas de* 3 *elementos* 2 *a* 2, *ou seja* $\Gamma_{2,2}=C_{4,2}=6$, *valores estes que combinados com um dos* 3 *valores da base dá o número total de* $6\times3=18$ *valores distintos para a expressão dada.*

1470 — Quantas raízes tem a equação $z^n-k^2=0$? (n inteiro e positivo). Se k fôr real como varia o número de raízes reais com n? Justifique as respostas.

1471 — Considere o conjunto das raízes da equação $\cos x+1=0$. Indique a potência dêste conjunto e se é, ou não, denso. Justifique as respostas. R: $\cos x=-1\to x=(2k+1)\pi$. *Trata-se evidentemente dum conjunto numerável e não denso.*

1472 — Determine m de modo que, para α qualquer, seja ortogonal o determinante:

$$\Delta(m,\alpha)=\begin{vmatrix}\cos\alpha & -m\,\mathrm{sen}\,\alpha\\ \mathrm{sen}\,\alpha & m\cos\alpha\end{vmatrix}.$$

1473 — Dados os 3 vectores $\mathbf{u}_1=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{u}_2=3\mathbf{i}+13\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}_3=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, verifique se são, ou não, linearmente independentes. No caso de dependência determine a relação que os liga.

1474 — Resolva a equação

$$\begin{vmatrix}x(x+1) & 3x & 2x\\ x^2-1 & x-1 & 3x-3\\ x+1 & 0 & x\end{vmatrix}=0.$$

R: *Pondo em evidência os factores comuns aos elementos das várias filas, tem-se* $x(x+1)(x-1)\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & x\end{vmatrix}=0$ *ou* $x(x+1)(x-1)(-2x+7)=0$. *As raizes são pois* -1, 0,1 e $7/2$.

1475 — Designando por O e Q dois pontos fixos e $\mathbf{u}$ um vector constante perpendicular a $Q-O$, indique o logar geométrico do ponto P satisfazendo à equação: $(Q-O)\wedge(P-O)=\mathbf{u}$. R: *O logar geométrico pertence ao plano que contém* O *e* Q *e é normal a* $\mathbf{u}$. *É, evidentemente, uma das duas rectas do plano paralelas a* OQ *à distância* $\dfrac{\mathrm{mod}\,\mathbf{u}}{\mathrm{mod}\,(Q-O)}$.

1476 — Indique o logar geométrico dos pontos do espaço caracterizado vectorialmente pela equação $\mathrm{mod}\,[(Q-O)\wedge(P-O)]=a^2$ (a número real). Deduza a equação cartesiana dêste logar tomando O para origem do referencial cartesiano ortogonal e supondo $Q(0,0,3)$. R: *Tendo presente o exercício anterior é fácil de ver que o logar é a superfície cilíndrica de revolução de eixo* OQ *e raio de secção recta* $\dfrac{a^2}{\mathrm{mod}\,(Q-O)}$. *A equação cartesiana*