paralela a esta recta de modo que o segmento nela determinado pelo primeiro triângulo seja duplo do determinado pelo segundo triângulo. R: *Sejam* s *e* s' *os segmentos da paralela determinados pelos triângulos e* x *a distância da paralela à base dos dois triângulos, será então* $s:(h-x)=b:h$ *e* $s':(h'-x)=b':h$ *e como* $s=2s'$ *vem* $b(h-x):h=2b'(h'-x):h'$ *e por isso teremos* $x=hh'(2b'-b):(2b'h-bh')$.

1468 — Dado um paralelipípedo rectângulo de dimensões 2, 3 e 4 centímetros, determinar o ângulo que deve fazer, com a face menor, um plano tirado pela maior aresta da mesma face para que divida o paralelipípedo em duas partes tais que o volume de uma seja triplo do da outra. R: $V=2.3.4=24\,cm^3$ *é o volume do prisma dado, e seja* v *o volume do prisma menor. Será* $4v=24$ *e* $v=6\,cm^3$; *e se for* x *o ângulo do plano com a face menor será* $v=3.1/2.2.2.\mathrm{tg}\,x$ *donde* $6=6\,\mathrm{tg}\,x$ *e* $x=45^\circ$.

Soluções dos n.os 1465 a 1468 de J. da Silva Paulo.

CORRECÇÃO

Problema n.º 1344, «G. M.» n.º 15 — O último período deve ser substituído por: *Os valores de* m *são todos os compreendidos entre* 2 *e* 17/4.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência e finais

ÁLGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. A. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Alguns pontos dos exames de freqüência e finais do ano lectivo 1942-43.**

1469 — ¿Quantos valores numèricamente distintos toma a expressão x^{y^z} quando as variáveis tomam cada uma um dos valores 2, 3 e 5? O mesmo para x^{yz}. R: *A expressão* x^{y^z} *toma, nas condições indicadas, tantos valores quantos o número de permutações completas de* 3 *elementos ou seja* $3^3=27$. *Já não sucede o mesmo com* x^{yz}. *Com efeito, o expoente* yz *toma valores distintos cujo número é o de combinações completas de* 3 *elementos* 2 *a* 2, *ou seja* $\Gamma_{2,2}=C_{4,2}=6$, *valores estes que combinados com um dos* 3 *valores da base dá o número total de* $6\times3=18$ *valores distintos para a expressão dada.*

1470 — Quantas raízes tem a equação $z^n-k^2=0$? (n inteiro e positivo). Se k fôr real como varia o número de raízes reais com n? Justifique as respostas.

1471 — Considere o conjunto das raízes da equação $\cos x+1=0$. Indique a potência dêste conjunto e se é, ou não, denso. Justifique as respostas. R: $\cos x=-1\rightarrow x=(2k+1)\pi$. *Trata-se evidentemente dum conjunto numerável e não denso.*

1472 — Determine m de modo que, para α qualquer, seja ortogonal o determinante:

$$\Delta(m,\alpha)=\begin{vmatrix}\cos\alpha & -m\,\mathrm{sen}\,\alpha\\ \mathrm{sen}\,\alpha & m\cos\alpha\end{vmatrix}.$$

1473 — Dados os 3 vectores $\mathbf{u}_1=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{u}_2=3\mathbf{i}+13\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}_3=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, verifique se são, ou não, linearmente independentes. No caso de dependência determine a relação que os liga.

1474 — Resolva a equação

$$\begin{vmatrix}x(x+1) & 3x & 2x\\ x^2-1 & x-1 & 3x-3\\ x+1 & 0 & x\end{vmatrix}=0.$$

R: *Pondo em evidência os factores comuns aos elementos das várias filas, tem-se* $x(x+1)(x-1)\begin{vmatrix}1&3&2\\1&1&3\\1&0&x\end{vmatrix}=0$ *ou* $x(x+1)(x-1)(-2x+7)=0$. *As raízes são pois* -1, 0,1 e $7/2$.

1475 — Designando por O e Q dois pontos fixos e $\mathbf{u}$ um vector constante perpendicular a $Q-O$, indique o logar geométrico do ponto P satisfazendo à equação: $(Q-O)\wedge(P-O)=\mathbf{u}$. R: *O logar geométrico pertence ao plano que contém* O *e* Q *e é normal a* $\mathbf{u}$. *É, evidentemente, uma das duas rectas do plano paralelas a* OQ *à distância* $\dfrac{\mathrm{mod}\,\mathbf{u}}{\mathrm{mod}\,(Q-O)}$.

1476 — Indique o logar geométrico dos pontos do espaço caracterizado vectorialmente pela equação $\mathrm{mod}\,[(Q-O)\wedge(P-O)]=a^2$ (a número real). Deduza a equação cartesiana dêste logar tomando O para origem do referencial cartesiano ortogonal e supondo $Q(0,0,3)$. R: *Tendo presente o exercício anterior é fácil de ver que o logar é a superfície cilíndrica de revolução de eixo* OQ *e raio de secção recta* $\dfrac{a^2}{\mathrm{mod}\,(Q-O)}$. *A equação cartesiana* *deduz-se com facilidade. Com efeito:* $Q-O=$ $=3\mathbf{k}$, $P-O=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $(Q-O)\wedge(P-O)=-3y\mathbf{i}+$ $+3x\mathbf{j}$ *e, portanto,* $\sqrt{9y^2+9x^2}=a^2$ *ou, racionalizando,* $x^2+y^2=(a^2/3)^2$.

1477 — Determine o número máximo de triângulos formados pelas diagonais de um polígono plano convexo de n lados. R: *Como é sabido o número de diagonais de tal polígono é* $N=n(n-3)/2$, *e de cada vértice partem* $n-3$ *diagonais.*

O número de triângulos é, no máximo, dado por $\binom{N}{3}-n\binom{n-3}{3}$. *O subtractivo desta diferença corresponde (para* $n\geq 6$*) aos grupos de* 3 *diagonais dentre as* $n-3$ *que irradiam de cada vértice e que, evidentemente, nunca formam triângulo.*

A existência de elementos de simetria no polígono torna paralelos ou concorrentes grupos de diagonais, diminuindo o número de triângulos formados. Por isso o número acima indicado é não excedido.

Soluções dos n.os 1469 a 1477 de M. Zaluar.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de freqüência, 1942-43.**

1478 — O afixo A do complexo $3+4i$ descreve um arco de circunferência de 45°, com centro na origem dos eixos. Qual é o complexo cujo afixo é a nova posição do ponto A? Calcular o resultado sob a forma algébrica. R: *Será um complexo* $a+bi=\rho(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ *com* $\begin{cases} a=\rho\cos\alpha \\ b=\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha\end{cases}$ *e em que* ρ *é o módulo do complexo* $3+4i$ *e* $\alpha=\alpha_1+45°$ *sendo* α_1 *o argumento dêste mesmo complexo supondo a rotação efectuada no sentido directo. Portanto, por ser* $\rho=\sqrt{9+16}=5$, $\cos\alpha_1=3/5$, $\mathrm{sen}\,\alpha_1=$ $=4/5$, $\mathrm{sen}\,45°=\cos 45°=\sqrt{2}/2$, *teremos:* $\cos\alpha=$ $=\cos(\alpha_1+45°)=-\sqrt{2}/10$, $\mathrm{sen}\,\alpha=\mathrm{sen}\,(\alpha_1+45°)=$ $=\sqrt{2}/10$. *Logo* $a+bi=5(-\sqrt{2}/10+\sqrt{2}/10\cdot i)=$ $=\sqrt{2}/2\cdot(-1+i)$.

1479 — Sendo $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2ax+1}}$, mostrar que é $y'=(a-x)\,y^3$. Calcular também a segunda derivada, expressa em a e x. R: *Com efeito, por ser* $y'=\dfrac{-(x-a)}{(x^2-2ax+1)^{3/2}}$ *é imediata a verificação pedida. Derivando* y' *em ordem a* x *obtém-se fàcilmente* $y''=(x^2-2ax+1)^{-3/2}\cdot[3\,(x-a)^2\,(x^2-2ax+1)^{-1}-1]$.

1480 — Marque, num gráfico, os pontos $A(a,0)$, $B(0,b)$, $C(2a,0)$ e $P(0,k)$. Calcular a ordenada do ponto de encontro Q de $\overline{AB}$ com $\overline{CP}$. Exprima a área S do triângulo $[AQP]$ em função de a, b e k (considerando-a como a diferença das áreas dos triângulos $[ACP]$ e $[ACQ]$). Calcule o valor de k que torna S máxima. R: *Suponhamos* $a>0$, $b>0$, $k>0$. *A ordenada do ponto de intersecção* Q *das rectas* AB *e* CP *obtém-se fàcilmente, eliminando* x *entre as equações daquelas rectas que são, como sabemos:*

$$\begin{matrix} AB)\equiv x/a+y/b=1 \\ CP)\equiv x/2a+y/k=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} bx+ay-ab=0 \\ kx+2ay-2ak=0. \end{cases}$$

Efectuando a eliminação acima indicada, virá: $y=bk/(2b-k)$. *A área a determinar será pois:* $S=S_1-S_2$ *em que* S_1 *e* S_2 *são respectivamente as áreas de dois triângulos de base* $\overline{AC}=a$ *e de alturas* $\overline{OP}=k$ *e* $\overline{OQ}=bk/(2b-k)$. *Ter-se-á portanto:* $S=1/2\cdot a\,[k-bk/(2b-k)]=ak\,(b-k)/[2\,(2b-k)]$. *Pretende-se determinar* k *de modo que a área* $S(k)$ *seja máxima. Derivando e tendo em conta algumas simplificações, teremos:* $S'(k)=\dfrac{a(k^2-4bk+2b^2)}{2\,(2b-k)^2}\rightarrow$ $\rightarrow S'(k)=0\rightarrow k^2-4bk+2b^2=0$ *por ser* $a\neq 0$, $\rightarrow$ $\rightarrow k=(2\pm\sqrt{2})\,b$, *soluções que não anulam o denominador de* $S'(k)$. *É fácil ver que dêstes valores de* k, *apenas* $k=(2-\sqrt{2})\,b$ *torna* $S''(k)<0$ *e que portanto, apenas êste valor de* k *torna a área* $S(k)$ *máxima.*

1481 — Calcular: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{cosec}\,(x-a)}{\dfrac{1}{x-a}}$. R: *O limite a determinar reduz-se a:* $\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{sen}\,(x-a)}{x-a}}=1$.

Soluções dos n.os 1478 a 1481 de O. Morbey Rodrigues.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **Exame Final, 16 de Junho de 1942.**

1482 — Determinar os máximos e mínimos de z, dada a equação $2z^4+(x-1)^2+2(y-1)^2-2=0$.

1483 — Integrar a equação $y=2xy'+(1+y')^2$, e determinar as equações paramétricas da linha integral que no ponto de abscissa $-2/3$ tem uma tangente paralela à bissectriz do 1.º quadrante.

1484 — Calcular

$$I=\int_0^4 dy\int_0^{1+y^2/8} x\,dx+\int_4^5 dy\int_0^{\sqrt{25-y^2}} x\,dx\,,$$

depois de mudar a ordem das integrações.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **2.º exame de freqüência, 1943**

1485 — Integrar a equação

$$2\frac{d\rho}{d\theta}-\frac{\rho}{\theta}+\frac{2\theta+1}{\theta(\theta+1)^2}\,\frac{1}{\rho}=0,$$

e determinar as assíntotas da linha integral que passa pelo ponto $(\theta=3,\rho=1/2)$. R: *Trata-se de uma equação de Bernoulli,*

$$2\rho\frac{d\rho}{d\theta}-\frac{\rho^2}{\theta}+\frac{2\theta+1}{\theta(\theta+1)^2}=0.$$

Fazendo $\rho^2=z$, *vem a equação linear*

$$\frac{dz}{d\theta}-\frac{z}{\theta}+\frac{2\theta+1}{\theta(\theta+1)^2}=0.$$

O integral geral da equação sem 2.º membro é $z=C_1\theta$; *variando a constante obtêm-se* $z=\frac{1}{\theta+1}+C\theta$, *ou, finalmente,* $\rho^2=\frac{1}{\theta+1}+C\theta$, *que é o integral procurado.*

Para $\theta=3$; $\rho=1/2$, *vem* $C=0$. *A direcção assintótica da linha* $\rho^2=\frac{1}{\theta+1}$ *é* $\theta=-1$; *como* $(S_T)_{\theta=-1}=0$, *a equação da assintota é* $\operatorname{tg}\theta=-\operatorname{tg}1$, *ou* $\operatorname{sen}(\theta+1)=0$.

1486 — Integrar a equação $y'=(x-1)y''+1/2y''^2$, e determinar a evoluta da linha integral que passa pela origem onde é tangente ao eixo das abscissas. R: *Trata-se duma equação incompleta. Fazendo* $y'=z$, $y''=z'$, *obtêm-se a equação de Clairaut* $z=xz'-z'+z'^2/2$, *cujo integral geral é* $z=xC-C+C^2/2$. *Por uma quadratura obtêm-se* $y=C/2\cdot x^2+(C^2/2-C)x+C_1$, *que é o integral geral procurado.*

As condições iniciais dão-nos $C=2$, $C_1=0$. *A linha integral tem, pois, para equação* $y=x^2$, *e a sua evoluta é* $(Y-1/2)^3=27/16\cdot X^2$.

Nota — *A equação dada admite ainda a solução* $y=-\frac{(x-1)^3}{6}+C_2$, *correspondente à solução singular da equação de Clairaut. Na determinação da evoluta não se considerou, por não ter interêsse, a solução correspondente à determinação* $C=0$, $C_1=0$.

1487 — Calcular $\iint_D \frac{xy}{x+1}\,dx\,dy$. O domínio D é limitado pelas linhas $y^2=2x$; $xy=4$; $x=4$; $y=0$.

R: *Tem-se* $I=\iint_D\frac{xy}{x+1}\,dx\,dy=\int_0^2\frac{x}{x+1}\,dx\int_0^{\sqrt{2x}}y\,dy+\int_2^4\frac{x}{x+1}\,dx\int_0^{4/x}y\,dy=\int_0^2\frac{x^2}{x+1}\,dx+\int_2^4\frac{8}{x(x+1)}\,dx=9\log 3+8\log 2/5$. *Podia integrar-se em primeiro lugar em ordem a* x; *nesse caso viria*

$$I=\int_0^1 y\,dy\int_{y^2/2}^{4}\frac{x}{x+1}\,dx+\int_1^2 y\,dy\int_{y^2/2}^{4/y}\frac{x}{x+1}\,dx.$$

1488 — Sendo $x=u^3+3u$; $y=u^3-3u$; $z=3u^2$ as equações paramétricas duma linha, determinar o comprimento do arco, a partir da origem, e verificar a 1.ª fórmula de Frenet $\frac{\mathbf{n}}{R}=\frac{dt}{ds}$. R: *Tem-se* $ds=3\sqrt{2}\,(u^2+1)\,du$ *e, portanto,* $s=\sqrt{2}\,(u^3+3u)$. *Como* $A=-18(u^2+1)$, $B=18(u^2-1)$, $C=36u$, *vem* $R=3(u^2+1)^2$. *Por outro lado, é*

$$\mathbf{t}=\frac{1}{\sqrt2}\left(\mathbf{i}+\frac{u^2-1}{u^2+1}\mathbf{j}+\frac{2u}{u^2+1}\mathbf{k}\right)$$

e
$$\mathbf{b}=\frac{1}{\sqrt2}\left(-\mathbf{i}+\frac{u^2-1}{u^2+1}\mathbf{j}+\frac{2u}{u^2+1}\mathbf{k}\right);$$

portanto
$$\mathbf{n}=\mathbf{b}\wedge\mathbf{t}=\frac{2u}{u^2+1}\mathbf{j}+\frac{1-u^2}{u^2+1}\mathbf{k}$$

e
$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{2u}{3(u^2+1)^3}\mathbf{j}+\frac{1-u^2}{3(u^2+1)^3}\mathbf{k}.$$

Atendendo à expressão de R *a verificação é imediata.*

Soluções dos n.ºs 1485 a 1488 de A. Pereira Gomes.

I. S. C. E. F. — Cálculo — **Exame Final — 10-X-1942.**

1489 — Determinar as curvas planas cujo comprimento de arco é dado pela equação $s=a\cdot\frac{dy}{dx}$. R: *Tem-se* $s=a\cdot y'$ *ou* $\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx=a\cdot y'$ *e, derivando em ordem a* x *e quadrando,* $1+y'^2=a^2y''^2$. *Substituindo* y' *por* t *e, portanto,* y'' *por* t', *vem* $1+t^2=a^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2$ *donde* $a\frac{dt}{dx}=\sqrt{1+t^2}$ *ou, por separação das variáveis,* $\frac{a\,dt}{\sqrt{1+t^2}}=dx$ *e, integrando,* $-a\log\left[\sqrt{1+t^2}-t\right]=x+c_1$. *Resolvendo em ordem a* t *vem, sucessivamente* $\sqrt{1+t^2}=t+e^{-\frac{x+c_1}{a}}$, $1=2te^{-\frac{x+c_1}{a}}+e^{-2\frac{x+c_1}{a}}$, $t=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[e^{\frac{x+c_1}{a}}-e^{-\frac{x+c_1}{a}}\right]$. *Separando as variáveis,* $dy=\operatorname{senh}\frac{x+c_1}{a}\,dx$ *e in-*

tegrando, vem $y+c_2=a\cosh\frac{x+c_1}{a}$ *que é a equação das curvas que satisfazem ao enunciado.*

1490 — Determine a, b e c de modo tal que a curva $ay^2-ax^3+bx^2-4(a+1)x+c=0$ tenha uma reversão no ponto (2,0). R: *Tem-se* $\frac{\partial f}{\partial x}=-3ax^2+2bx-4(a+1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2ay$, $r=-6ax+2b$, $s=0$, $t=2a$. *Para que o ponto* (2,0) *seja um ponto de reversão deverá ser*

$$\begin{cases} f_{2,0}\equiv-16a+4b+c-8=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_{2,0}}\equiv-16a+4b+4=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y_{2,0}}\equiv 0 \\ (s^2-rt)_{2,0}\equiv 24a^2-4ab=0 \end{cases}$$

donde $a=-1/2$, $b=-3$, $c=12$.

1491 — As equações $xy+zt=1$, e $\frac{x+y}{z+t}=-1$ definem z e t como funções de x e y. Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$. R: *Derivando o sistema* $\begin{cases} xy+zt=1 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$ *duas vezes em ordem a* x, *e resolvendo os sistemas obtidos, obtêm-se* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z-y}{t-z}$, $\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{y-t}{t-z}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{(y-z)(y-t)}{(t-z)^3}$. *Notando que o sistema dado é invariante para a substituição* $\begin{pmatrix} x & y & z & t \\ y & x & t & z \end{pmatrix}$, *tem-se, imediatamente* $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}=2\frac{(x-t)(x-z)}{(z-t)^3}$.

Soluções dos n.os 1489 a 1491 de A. Sá da Costa.

I. S. T. — Cálculo — Exame final — Outubro, 1942

1492 — Dada a congruência de parábolas $P)$ $a(x-y)^2+2b(x+y)+1=0$; 1.º mostrar que as curvas da congruência que são tangentes a um dos eixos coordenados são também tangentes ao outro; 2.º determinar a congruência de tôdas as parábolas tangentes a ambos os eixos coordenados e, entre elas, a família a um parâmetro das que pertencem à congruência P.

1493 — Sendo P_0 um ponto fixo duma curva plana qualquer e P um ponto variável sôbre a mesma curva, mostrar que a equação diferencial da curva descrita pelo meio da corda $\overline{P_0P}$ se integra, como a equação de Clairaut, substituindo a derivada por uma constante arbitrária. R: *Seja a curva de equação* $y=f(x)$ *e os pontos* $P_0[a,f(a)]$ *e* $P[x,f(x)]$. *Seja* $M(X,Y)$ *o ponto médio da corda* $\overline{P_0P}$. *Tem-se* $\begin{cases} 2X=a+x \\ 2Y=f(a)+f(x). \end{cases}$ *Eliminando* x *entre estas equações, obtêm-se a equação da família de curvas a que se refere o enunciado* $2Y=f(a)+f(2X-a)$. *Para obter a equação diferencial da família, derivemos ambos os membros desta equação em ordem a* X *e eliminemos o parâmetro* a *entre as duas equações*

$$\begin{cases} 2Y=f(a)+f(2X-a) \\ Y'=f'(2X-a)\rightarrow \qquad a=2X-\varphi(Y') \end{cases}$$

donde $2Y=f[2X-\varphi(Y')]+f[\varphi(Y')]$. *Como imediatamente se reconhece o integral geral desta equação obtêm-se substituindo* Y' *por uma constante arbitrária* c. *Com efeito obtêm-se* $2Y=f[2X-\varphi(c)]+f[\varphi(c)]$ *ou* $2Y=f(2X-a)+f(a)$.

1494 — Determinar as curvas planas cujo comprimento de arco é dado pela equação $s=(y^2+mx^2)^{1/2}$. R: *Tem-se* $\int_a^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=(y^2+mx^2)^{1/2}$. *Derivando em ordem a* x *e quadrando vem* $1+y'^2=\frac{m^2x^2}{y^2+mx^2}$ *ou* $1+p^2=\frac{m^2}{(y/x)^2+m}$ *que é uma equação homogênea e cuja integração pode fazer-se depois de resolvê-la em ordem a* p, *ou a* y/x.

Soluções dos n.os 1492 a 1494 de A. Sá da Costa

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Mecânica Racional — Exame Final — Junho de 1942.

1495 — *a)* Ache os momentos de inércia em relação aos planos coordenados, do volume homogéneo limitado pelo paraboloide $x^2+y^2=2pz$, e pelo plano $z=h$. *b)* A partir dêstes momentos, escreva, justificando, a equação do seu elipsoide de inércia, relativo à origem dos eixos coordenados. *c)* A partir desta equação, ache o momento de inércia do mesmo volume, em relação à recta: $x=2\mu$, $y=\mu$, $z=-2\mu$. R: *Empregando coordenadas cilindricas, o elemento de volume, é:* $dV=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$. *a) Momento de inércia em relação a*

$$XOY:\ I_{xy}=\iiint_V\lambda z^2\,dV=\lambda\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^h z^2\,dz\int_0^{\sqrt{2pz}}\rho\,d\rho=$$

$= \frac{\pi\lambda p h^4}{2}$, $I_{xz} = \iiint_V \lambda y^2 \, dV = \lambda \iiint_V \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot dV =$

$= \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi \int_0^h dz \int_0^{\sqrt{2pz}} \rho^3 \, d\rho = \lambda \pi p^2 \frac{h^3}{3}$. *Por razões evidentes de simetria é* $I_{yz} = I_{xz}$. *Querendo exprimir estes momentos em função da massa do paraboloide basta calcular esta. Tem-se* $\iiint_V \lambda \, dV = \pi \lambda p h^2$.

Donde: $I_{xy} = \frac{M h^2}{2}$, $I_{xz} = I_{yz} = \frac{M p h}{3}$. *b) A equação do elipsoide de inércia relativo à origem é:* $A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = 1$ *onde* A, B, C *são os momentos de inércia, do sistema, relativos, respectivamente, aos eixos dos* XX, *dos* YY *e dos* ZZ, *e* D, E, F *são os produtos de inércia:* $D = \iiint_V \lambda yz \, dV$, *etc.. No nosso caso o elipsoide de inércia é um elipsoide de revolução em tôrno do eixo dos* ZZ, *visto o ser o sistema material considerado, pois que, sendo todos os planos passando pelo eixo dos* ZZ, *planos de simetria do sistema, são-no também do elipsoide de inércia do sistema relativo a qualquer ponto do eixo dos* ZZ, *e portanto, em particular, do relativo à origem. Será então:* $A = B$, $D = E = F = 0$; *mas* $A = I_x = I_{xy} + I_{xz} = \frac{M h^2}{2} + \frac{M p h}{3}$, $C = I_z = I_{xz} + I_{yz} = \frac{2 M p h}{3}$. *A equação do elipsoide de inércia será então*

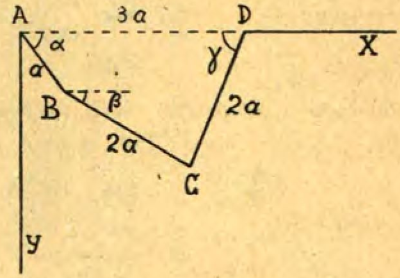
$$\left(\frac{M h^2}{2} + \frac{M p h}{3}\right)(x^2 + y^2) + \frac{2}{3} M p h z^2 = 1$$

ou: $(3h + 2p)(x^2 + y^2) + 4 p z^2 = \frac{6}{Mh}$. *c) O momento de inércia do sistema dado, em relação à recta considerada é:* $I = \frac{1}{\overline{OK}^2}$, *sendo* K *o ponto aonde a recta encontra o elipsoide de inércia. Seja* μ_1 *o valor do parâmetro* μ *correspondente ao ponto* K.

Será: $I = \frac{1}{4\mu_1^2 + \mu_1^2 + 4\mu_1^2} = \frac{1}{9\mu_1^2}$ *Temos então:*

$(3h + 2p)(4\mu_1^2 + \mu_1^2) + 4 p \mu_1^2 = \frac{6}{Mh}$ *donde:* $\mu_1^2 = \frac{6}{Mh(15h + 14p)}$ *e portanto* $I = \frac{Mh(15h + 14p)}{54}$.

1496 — Um sistema material é formado por 3 barras articuladas, homogéneas e do mesmo material. A sua posição é a indicada na figura. Os extremos *A* e *D* estão articulados em dois pontos fixos situados na mesma horizontal. Determinar a relação entre os ângulos α, β, γ, característica da posição de equilíbrio do sistema.



R: *O sistema tem um único grau de liberdade, como se verifica fàcilmente, notando que a cada valor dado, por exemplo ao ângulo* α, *a posição do sistema fica completamente determinada. Então, aquêles* 3 *ângulos não são independentes, devendo ser possivel exprimir dois dêles em função do* 3.º; *por outras palavras, devem existir sempre* 2 *relações entre aquêles* 3 *ângulos. Tomemos os eixos coordenados indicados. As* 2 *relações que procuramos são as que exprimem que a soma das projecções das* 3 *barras sôbre* OX *é igual a* 3a, *e sôbre* OY *é nula:*

$$\begin{cases} a\cos\alpha + 2a\cos\beta + 2a\cos\gamma = 3a \\ a \operatorname{sen}\alpha + 2a \operatorname{sen}\beta - 2a \operatorname{sen}\gamma = 0 \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} \cos\alpha + 2\cos\beta + 2\cos\gamma = 3 \\ \operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}\beta - 2\operatorname{sen}\gamma = 0. \end{cases} \quad (1)$$

As fôrças que actuam no sistema são os pesos das barras, aplicados nos respectivos centros de gravidade, situados, em virtude da homogeneidade das mesmas, nos pontos médios destas. Tem-se então:

Barra AB *Pêso* **P** $\begin{cases} O \\ P \end{cases}$ *aplicado em* $\begin{cases} x_1 = a/2 \cdot \cos\alpha \\ y_1 = a/2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

Barra BC *Pêso* 2**P** $\begin{cases} O \\ 2P \end{cases}$ *aplicado em* $\begin{cases} x_2 = a\cos\alpha + \\ \quad + a\cos\beta \\ y_2 = a\operatorname{sen}\alpha + \\ \quad + a\operatorname{sen}\beta \end{cases}$

Barra CD *Pêso* 2**P** $\begin{cases} O \\ 2P \end{cases}$ *aplicado em* $\begin{cases} x_3 = 3a - a\cos\gamma \\ y_3 = a\operatorname{sen}\gamma. \end{cases}$

Pelo principio dos trabalhos virtuais, a posição de *equilíbrio será aquela em que:* $\mathbf{P}\times\delta P_1+2\mathbf{P}\times\delta P_2+2\mathbf{P}\times\delta P_3=0$, *sendo* δP_1, δP_2, δP_3 *deslocamentos virtuais de* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, *compatíveis com as ligações. Será então:* $P\delta y_1+2P\delta y_2+2P\delta y_3=0$ *ou* $\delta y_1+2\delta y_2+2\delta y_3=0$. *Mas* $\delta y_1=a/2\cdot\cos\alpha\cdot\delta\alpha$, $\delta y_2=a\cos\alpha\cdot\delta\alpha+a\cos\beta\ \delta\beta$, $\delta y_3=a\cos\gamma\cdot\delta\gamma$. *Será então* $1/2\cdot\cos\alpha\ \delta\alpha+2\cos\alpha\cdot\delta\alpha+2\cos\beta\,\delta\beta+2\cos\gamma\cdot\delta\gamma=0$ *ou* $5\cos\alpha\cdot\delta\alpha+4\cos\beta\cdot\delta\beta+4\cos\gamma\cdot\delta\gamma=0$. *As variações dos parâmetros* α, β, γ, *não são independentes visto que estes devem verificar constantemente as relações*(1). *Ter-se-á então, diferenciando estas relações:* $-\operatorname{sen}\alpha\cdot\delta\alpha-2\operatorname{sen}\beta\cdot\delta\beta-2\operatorname{sen}\gamma\cdot\delta\gamma=0$, $\cos\alpha\cdot\delta\alpha+2\cos\beta\cdot\delta\beta-2\cos\gamma\cdot\delta\gamma=0$. *Eliminando 2 das variações, por exemplo* $\delta\beta$ *e* $\delta\gamma$, *empregando o método dos multiplicadores indeterminados, tem-se sucessivamente:* $(5\cos\alpha-\lambda_1\operatorname{sen}\alpha+\lambda_2\cos\alpha)\,\delta\alpha+(4\cos\beta-2\lambda_1\operatorname{sen}\beta+2\lambda_2\cos\beta)\,\delta\beta+(4\cos\gamma-2\lambda_1\operatorname{sen}\gamma-2\lambda_2\cos\gamma)\,\delta\gamma=0$, *e determina-se* λ_1 *e* λ_2 *de modo que os coeficientes de* $\delta\beta$ *e* $\delta\gamma$ *sejam nulos. Será:*

$$\begin{cases}(4+2\lambda_2)\cos\beta-2\lambda_1\operatorname{sen}\beta=0\\(4-2\lambda_2)\cos\gamma-2\lambda_1\operatorname{sen}\gamma=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4+2\lambda_2-2\lambda_1\operatorname{tg}\beta=0\\4-2\lambda_2-2\lambda_1\operatorname{tg}\gamma=0\end{cases}$$

donde $\lambda_1=\dfrac{4}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}$ *e* $\lambda_2=\dfrac{2\operatorname{tg}\beta-2\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}$. *Virá então:* $5\cos\alpha-\lambda_1\operatorname{sen}\alpha+\lambda_2\cos\alpha=0$ *ou* $-4\operatorname{tg}\alpha+7\operatorname{tg}\beta+3\operatorname{tg}\gamma=0$ *que é a relação pedida.*

Soluções dos n.os 1495 e 1496 de F. Veiga de Oliveira.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 1.º exame de freqüência, 25-III-1943.

1497 — Demonstre que, havendo num sólido, — em determinado instante — três pontos não situados em linha recta com a mesma velocidade, o movimento instantâneo é de translação.

1498 — Que relação existe entre a união de Oldham e os mecanismos que denominámos haste-manivela e elipsógrafo?

1499 — Durante o tremor de terra da Califórnia Setentrional, em 11 de Setembro de 1938, a componente SW-NE do acelerógrafo de Ferndale registou um movimento de período igual a 0,18 s com a aceleração máxima de $93\ \mathrm{cm/s^2}$.

Admitindo, como é uso, que o movimento se pode considerar harmónico simples, determine a sua amplitude.

1500 — O «bol» duma super-centrífuga Sharples, usada na depuração do azeite, gira com a velocidade angular constante de 18.000 r/m.

Determine a aceleração de um ponto do «bol» situado a 2 cm do eixo de rotação.

Esta aceleração é igual a quantas vezes a da gravidade?

1501 — Um sólido move-se em relação ao triedro tri-rectângulo $0\,\vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3$. Em determinado instante, as coordenadas vectoriais do torsor velocidade instantânea, em relação ao ponto Q do eixo de Mozzi, são $\vec{Q'}=5\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$ e $\vec{\Omega}=-10\vec{e}_1+2\vec{e}_2-2\vec{e}_3$. Determine o passo do movimento helicoidal tangente ao movimento efectivo do sólido no instante considerado.

1502 — Um veio gira uniformemente com a velocidade angular de 300 r/m e comanda, por intermédio de uma união universal, outro veio com o qual faz um ângulo de 30°. Calcule *a*) a velocidade angular máxima do veio conduzido; *b)* a oscilação da razão de transmissão.

1503 — Demostre que, no mecanismo de Scott Russell, se a manivela tiver movimento uniforme, o ponto guiado rectilìneamente pelo mecanismo está animado de movimento oscilatório harmónico.

1504 — Um ponto está animado de movimento uniformemente variado. Sabe-se que, durante o 4.º segundo decorrido após a origem dos tempos, percorreu o dôbro do caminho andado durante os três primeiros segundos. Determine a aceleração tangencial em função da velocidade inicial.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas - Alguns pontos do 2.º exame de freqüência, 16-VI-1943.

1505 — Considere um sistema material qualquer de baricentro G. Considere ainda os pontos 0_1 e 0_2. Demonstre que, se o ângulo $G\hat{0}_1 0_2$ fôr recto, o momento de inércia do sistema em relação a 0_2 é igual à soma do seu momento quadrático em relação a 0_1 com o produto da sua massa total pelo quadrado da distância $\overline{0_1 0_2}$.

1506 — Considere o campo de fôrças definido pela função $\vec{F}(Q)=k(Q-0)$, em que k é uma constante e 0 um ponto fixo (fôrça repulsiva proporcional à distância). Determine as linhas de fôrça do campo e verifique que êste admite a função de fôrças $U=k/2\,.\,(Q-0)^2$.