PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1507 — Resolver o sistema de equações: $x^2+y^2-(x+y)=48\,,\ x+y+xy=31\,.$

1508 — Sôbre as três arestas de um triedro trirectângulo marquem-se três comprimentos $\overline{OA}=a\,,\ \overline{OB}=b\,,\ \overline{OC}=c$ e trace-se o triângulo $[ABC]$. Determinar: 1.º — a expressão da área dêste triângulo; 2.º — a distância $\overline{OD}=d$ do ponto O ao plano ABC; 3.º — o que devem ser b e c, quando sendo dados a e d, para que o triângulo $[ABC]$ tenha uma superfície dada.

Problemas 1507 e 1508 propostos por J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1509 — Mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} i\,(i+1)\cdots(i+p)=\frac{n\,(n+1)\cdots(n+p+1)}{p+2}\,.$$

1510 — Pelo ponto médio do lado AB dum triângulo $[ABC]$ traça-se uma recta arbitrária; designando por N e P os pontos de encontro dessa recta com BC e AC respectivamente, mostrar que têm lugar as relações:

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{CP}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{MN}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2}\,\frac{\overline{PN}}{\overline{PC}}\,.$$

Problemas 1509 e 1510 propostos por José Morgado (do Pôrto).

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1081 — Mostrar que 2^{1000}, escrito no sistema decimal, termina em 76. R: *De* $(\dot{1}\dot{0}\dot{0}+16)\,16=\dot{1}\dot{0}\dot{0}+56\,,\ (\dot{1}\dot{0}\dot{0}+16)\,16^2=\dot{1}\dot{0}\dot{0}+96\,,\ (\dot{1}\dot{0}\dot{0}+16)\,16^3=\dot{1}\dot{0}\dot{0}+36\,,\ (\dot{1}\dot{0}\dot{0}+16)\,16^4=\dot{1}\dot{0}\dot{0}+76\,,\ (\dot{1}\dot{0}\dot{0}+16)\,16^5=\dot{1}\dot{0}\dot{0}+16\,,\ (\dot{1}\dot{0}\dot{0}+16)\,16^6=\dot{1}\dot{0}\dot{0}+56\,,$ *resulta que:* $(\dot{1}\dot{0}\dot{0}+16)\,16^n$ *terminará em* $56\,,\ 96\,,\ 36\,,\ 76$ *ou* 16 *conforme o resto da divisão de* n *por* 5 *fôr respectivamente* $1\,,2\,,3\,,4$ *ou* 0. *Ora* $2^{1000}=2^4\cdot 2^{996}=16\cdot(2^4)^{249}=(0+16)\,16^{249}=(\dot{1}\dot{0}\dot{0}+16)\,16^{249}$. *Mas,* 249 *dividido por* 5 *dá de resto* 4. *Logo* 2^{1000} *no sistema decimal terminará em* 76.

1083 — Mostrar que $1000\,!$ contém 994 vêzes o factor 2. (*) R: *Na decomposição* $1000\,!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000$ *há* 500 *factores pares. Excluindo então os factores ímpares, visto êstes não conterem o factor* 2, *temos:* $2^{500}\cdot 500\,0!$ *Procedendo do mesmo modo para* $500\,!$ *temos* $2^{500}\cdot 2^{250}\cdot 250\,!$ *e assim sucessivamente, achamos* $2^{500}\cdot 2^{250}\cdot 2^{125}\cdot 2^{62}\cdot 2^{31}\cdot 2^{15}\cdot 2^{7}\cdot 2^{3}\cdot 2=2^{994}$.

(*) É êste o enunciado correcto do problema proposto n.º 1083 que figura incorrectamente enunciado no n.º 11 da «Gazeta de Matemática».

1181 — Sendo $A=\operatorname{sen}2x-k\operatorname{sen}x-\cos x+k$, e $B=\cos 2x-k\cos x-\operatorname{sen}x$, exprimir $\dfrac{A}{B}$ em função de $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, e mostrar que é igual a $\dfrac{t-1}{t+1}$. R: *Atendendo a que* $\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cdot\cos x$ *e* $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$ *pode fazer-se* $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a+bk}{c+dk}$ *onde* $a=\cos x(2\operatorname{sen}x-1)$, $b=1-\operatorname{sen}x$, $c=\cos^2 x-\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x+1)$, $d=-\cos x$. *A condição necessária e suficiente para que* A/B *seja independente de* k *é que* $a/c=b/d$, *isto é,* $ad-bc=0$. *Ora, neste caso* $ad-bc=-\cos^2 x\,(2\operatorname{sen}x-1)-[\cos^2 x\,(1-\operatorname{sen}x)-\operatorname{sen}x\,(\operatorname{sen}x+1)\,(1-\operatorname{sen}x)]=-2\operatorname{sen}x\cos^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x+\operatorname{sen}x\cos^2 x+\operatorname{sen}x\cos^2 x=0$. *Fica assim provado que* A/B *é independente de* k. *Façamos então* $k=0$, *virá:*

$$\frac{A}{B}=\frac{\cos x\,(2\operatorname{sen}x-1)}{\cos^2 x-\operatorname{sen}x\,(\operatorname{sen}x+1)}$$

e atendendo a que

$$\operatorname{sen}x=\frac{2\operatorname{tg}x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}=\frac{2t}{1+t^2} \quad e \quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

teremos feitas as necessárias reduções:

$$\frac{A}{B}=\frac{t^4-4t^3+4t-1}{t^4-2t^3-6t^2-2t+1}=\frac{(t^3-3t^2-3t+1)(t-1)}{(t^3-3t^2-3t+1)(t+1)}=$$
$$=\frac{t-1}{t+1}.$$

Soluções dos n.os 1081, 1083 e 1181 de R. Quaresma Rosa.

1182 — Os 3 lados de um triângulo e uma das alturas são 4 têrmos consecutivos de uma progressão geométrica. Dada uma dessas 4 quantidades, calcular as outras. R: *Sejam* a, b *e* c *os lados dum triângulo por ordem decrescente de grandeza e* h *a altura. Por hipótese é* $\div\!\div\, a:b:c:h$, *donde:* $a\times h=b\times c$. *Trata-se dum triângulo rectângulo em que* a *é a hipotenusa,* h *a altura respectiva,* b *e* c *os catetos. Teremos para resolver o problema:* $a^2=b^2+c^2$, $b^2=a\cdot c$, $c^2=b\cdot h$, *sistema de três equações a três incógnitas, visto ser conhecido um dos elementos. A razão da progressão que fàcilmente se determina, atribuindo um valor qualquer a um dos lados é* $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Solução de Álvaro Simões (de Sangalhos).

1183 — Dado o triângulo isósceles $[ABC]$ rectângulo em A, e a recta XX', paralela a AC e pas sando por B, determinar o lugar geométrico das posições do vértice A, quando B se desloca sôbre XX', mantendo-se fixo o vértice C, e conservando-se o triângulo isósceles e rectângulo em A. R: *Tracemos pelo vértice* C *uma recta* YY' *perpendicular a* XX' *e seja* O *o ponto de intersecção. Designemos por* P_i *e* P_i' *respectivamente os pés das perpendiculares baixadas dos pontos* A_i *sôbre* XX' *e* YY'. *Os triângulos rectângulos* $A_i\overset{\triangle}{P}B_i$ *e* $A_i\overset{\triangle}{P'}C$ *são iguais. Com efeito* $\overline{A_iB_i}=\overline{A_iC}$ *por hipótese e os ângulos* $A_i\widehat{B}_iP_i$ *e* $A_i\widehat{C}P_i'$ *também são iguais, visto terem os lados perpendiculares. Logo* $\overline{A_iP_i}=\overline{A_iP_i'}$. *Os pontos* A_i *mantêm-se eqüidistantes de* XX' *e* YY'. *O lugar geométrico dos pontos* A_i *é, pois, a bissectriz do ângulo recto do triângulo dado.*

Solução de Álvaro Simões (de Sangalhos)

1249 - Determinar a equação geral das superfícies S tais que, designando por $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ os pontos em que a normal num ponto M duma delas encontra respectivamente os planos YOZ, ZOX e XOY, a razão anarmónica $(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},M)=k$. R: *Sejam* $\overline{X}_x$, $\overline{Y}_x$, $\overline{Z}_x$ *e* x *abcissas de* $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ *e* M. *Das equações da normal* $\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$, *tira-se* $\overline{X}_x=0$, $\overline{Y}_x=x-py/q$, *e* $\overline{Z}_x=x+pz$. *Tem-se*

$$(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},M)=\frac{\dfrac{\overline{Z}_x-\overline{X}_x}{\overline{Z}_x-\overline{Y}_x}}{\dfrac{x-\overline{X}_x}{x-\overline{Y}_x}}=\frac{(x+pz)\dfrac{p}{q}y}{xpz+x\dfrac{p}{q}y}=k,$$

donde se tira $yxp-kxzq=(k-1)xy$. *Integremos estas equações* $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{-kxz}=\frac{dz}{(k-1)xy}$. *Do confronto das duas primeiras equações resulta* $kx^2+y^2=c_1$. *Multiplicando ambos os termos das 3 frações, respectivamente por* x, y *e* z, *e tendo em vista uma propriedade das proporções vem* $xdx+ydy+zdz=0$, *que dá* $x^2+y^2+z^2=c_2$. *Portanto a equação geral das superfícies* S *é* $x^2+y^2+z^2=\varphi(kx^2+y^2)$.

Solução de Laureano Barros (do Pôrto).

1252 — Lugar do centro dum círculo que se desloca de tal forma que os seus eixos radicais com dois círculos fixos passam por dois pontos fixos. R: *Sejam* C_1 *e* C_2 *os centros dos dois circulos fixos,* R_1 *e* R_2 *os respectivos raios;* P_1 *e* P_2 *os dois pontos fixos, definidos pelas distâncias* $P_1P_2=r$, $P_1C_1=d_1$ *e* $P_2C_2=d_2$; C *o centro de um dos circulos do lugar.*

Supondo R *o raio dêste último circulo, tem-se, pelas propriedades do eixo radical:*

$$\begin{cases} r_1^2-R^2=d_1^2-R_1^2=T_1^2 \\ r_2^2-R^2=d_2^2-R_2^2=T_2^2 \end{cases}$$

Eliminando R, *vem* $r_1^2-r_2^2=T_1^2-T_2^2$. *Está assim reduzido o problema a achar-se o lugar dos pontos* C *tais que a diferença dos quadrados das suas distâncias a* P_1 *e* P_2 *é constante e igual a* $T_1^2-T_2^2$. *Êsse lugar é, como fàcilmente se reconhece, uma recta perpendicular a* P_1P_2; *a intersecção do lugar com* P_1P_2 *dista de* P_1 *de* $\frac{T_2^2-T_1^2-r^2}{2r}$.

Solução de Laureano Barros (do Pôrto).

Enviou também solução correcta: José Morgado (do Pôrto)

1254 — Prove que

$$\sum_{r=0}^{n-1}2^r\operatorname{tg}(2^rx)=\operatorname{cotg}x-2^n\operatorname{cotg}(2^nx).$$ R:

Da relação $\operatorname{cotg}2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{2\operatorname{tg}x}$ *ou* $2\operatorname{cotg}2x=\operatorname{cotg}x-\operatorname{tg}x$ *resulta* $\operatorname{tg}x=\operatorname{cotg}x-2\operatorname{cotg}2x$. *Mudando* x *em* 2^rx: $\operatorname{tg}(2^rx)=\operatorname{cotg}(2^rx)-2\operatorname{cotg}(2^{r+1}x)$ *ou* $2^r\operatorname{tg}(2^rx)=2^r\operatorname{cotg}(2^rx)-2^{r+1}\operatorname{cotg}(2^{r+1})x$. *Dando a* r *os valores* $0,1,\cdots,n-1$, *e somando ordenadamente, vem*

$$\sum_{r=0}^{n-1}2r\operatorname{tg}(2^rx)=\operatorname{cotg}x-2^n\operatorname{cotg}(2^nx),\quad \text{c. q. p.}$$

Solução de José Morgado (do Pôrto).

Enviou também solução correcta: Laureano Barros (do Pôrto).

1335 — Seja $\overline{OA_0}$ um segmento rectilíneo de comprimento igual ao dôbro do diâmetro de uma circunferência dada. Marque-se, a partir de $\overline{OA_0}$, o ângulo $A_0\hat{O}A_1=45^o$, e outro $\hat{O}_0AA_1=90^o$; a partir de $\overline{OA_1}$, o ângulo $A_1\hat{O}A_2=\frac{1}{2}\cdot 45^o$, e outro $O\hat{A}_1A_2=90^o$; a partir de $\overline{OA_2}$, o ângulo $A_2\hat{O}A_3=\frac{1}{2^2}\cdot 45^o$, e outro $O\hat{A}_2A_3=90^o$; e assim sucessivamente, de modo que seja sempre $A_{n-1}\hat{O}A_n=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot 45^o$ e $O\hat{A}_{n-1}A_n=90^o$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{OA_n}$, e verificar que é perpendicular a $\hat{O}A_0$ e igual ao perímetro da circunferência dada. R: *Do triângulo rectângulo* $A_{i-1}\hat{O}A_i$ *tira-se* $\overline{OA_i}=\frac{\overline{OA_{i-1}}}{\cos 45^o/2^{i-1}}=\overline{OA_{i-1}}\cdot\frac{2\,\text{sen}\,45^o/2^{i-1}}{\text{sen}\,45^o/2^{i-2}}$. *Atribuindo a* i *os valores* $1,2,\cdots,n$, *multiplicando ordenadamente as igualdades obtidas e simplificando, vem* $\overline{OA_n}=\overline{OA_0}\cdot\frac{2^n\,\text{sen}\,45^o/2^{n-1}}{\text{sen}\,90^o}=\overline{OA_0}\cdot 2^n\,\text{sen}\,45^o/2^{n-1}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{OA_n}=\overline{OA_0}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}2^n\,\text{sen}\,\pi/2^{n+1}=\overline{OA_0}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\text{sen}\,\pi/2^{n+1}}{\pi/2^{n+1}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\overline{OA_0}$. *Portanto, o limite pedido é igual ao perímetro da circunferência dada. Notando que a soma dos ângulos* $A_{i-1}\hat{O}A_i$, *soma dos termos duma progressão geométrica decrescente, é* $\frac{\pi/4}{1-1/2}=\frac{\pi}{2}$ *vê-se que* $\overline{OA_n}$, *no limite, é perpendicular a* $\overline{OA_0}$.

Solução de José Morgado (do Pôrto), completada por R. Quaresma Rosa.

Enviaram também soluções correctas: Alberto Pais (de Lisboa), J. S. Faria de Abreu (de Penafiel) e Paul Richard (de Portalegre).

1336 — Mostrar que sendo $2^x\cdot 3^y=3^x\cdot 4^y=6$, é também $x^2-2y^2=2x-3y$. R: *De* $2^x\cdot 3^y=3^x\cdot 2^{2y}=2\cdot 3$, *resultam as igualdades* $2^{x-1}\cdot 3^{y-1}=3^{x-1}\cdot 2^{2y-1}=1$. *Aplicando logaritmos:* $(x-1)\log 2=-(y-1)\log 3$, $(2y-1)\log 2=-(x-1)\log 3$. *Dividindo membro a membro,* $\frac{x-1}{2y-1}=\frac{y-1}{x-1}$, *ou* $x^2-2y^2=2x-3y$.

Solução de José Morgado (do Pôrto).

Enviou também solução correcta Paul Richard (de Portalegre).

1337 — Demonstrar a identidade $8\,\text{sen}\,10^o\cdot\text{sen}\,50^o\cdot\text{sen}\,70^o=1$. R: *A igualdade pode, evidentemente escrever-se* $8\,\text{sen}\,10^o\cos 10^o\,\text{sen}\,50^o\cos 50^o\,\text{sen}\,70^o\cos 70^o=\cos 10^o\cos 50^o\cos 70$ *ou* $\text{sen}\,20^o\,\text{sen}\,100^o\,\text{sen}\,140^o=\cos 10^o\cos 50^o\cos 70^o$, *igualdade verdadeira, em virtude de ser:* $\text{sen}\,20^o=\cos 70^o$, $\text{sen}\,100^o=\cos 10^o$ *e* $\text{sen}\,140^o=50^o$.

Solução de José Morgado (do Pôrto).

Enviaram também soluções correctas: Alberto Pais (de Lisboa), Álvaro Simões (de Sangalhos), J. S. Faria de Abreu (de Penafiel), M. Guerra dos Santos (de Lisboa) e Paul Richard (de Portalegre).

1338 — Resolver a equação $\text{sen}\,5x\cdot\cos 3x=\text{sen}\,9x\cdot\cos 7x$. R: *Atendendo a que* $2\,\text{sen}\,5x\cos 3x=\text{sen}\,8x+\text{sen}\,2x$ *e* $2\,\text{sen}\,9x\cos 7x=\text{sen}\,16x+\text{sen}\,2x$, *a equação proposta transforma-se em* $\text{sen}\,8x=\text{sen}\,16x$ *ou* $\text{sen}\,8x=2\,\text{sen}\,8x\cos 8x$ *ou* $\text{sen}\,8x\,(1-2\cos 8x)=0$ *logo* $\text{sen}\,8x=0\to x=k\pi/8$ *e* $\cos 8x=1/2\to x=k\pi/4\pm\pi/24$.

Solução de M. Carlos Guerra dos Santos (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Álvaro Simões (de Sangalhos), José Morgado (do Pôrto) e Paul Richard (de Portalegre).

1339 Três números x, y e z estão em progressão aritmética, estando $x+y$, y e $y+z$ em progressão geométrica. Calcular êsses números sabendo ainda que a soma dos quadrados dos extremos x e z é 8. Calcular a razão das duas progressões. R: *O enunciado traduz-se pelas equações* $\left\{\begin{array}{l} zy=x+z \\ y^2=(x+y)(y+z) \\ x^2+z^2=8, \end{array}\right.$ *a segunda das quais é equivalente a* $xy+yz+zx=0$. *Então, tem-se sucessivamente* $9y^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2=8+y^2$ *donde* $y=\pm 1$. *Para* $y=+1$, *vem* $x+z=2$, $xz=-2$, *donde, a solução* $x=1\pm\sqrt{3}$, $y=1$, $z=1\mp\sqrt{3}$. *Para* $y=-1$, *vem* $x+z=-2$, $xz=-2$ *donde a solução* $x=-1\pm\sqrt{3}$, $y=-1$, $z=-1\mp\sqrt{3}$. *As razões são: no caso da progressão aritmética* $r_1=-\sqrt{3}$ *ou* $r_2=\sqrt{3}$; *no caso da progressão geométrica* $\rho_1=2+\sqrt{3}$ ou $2-\sqrt{3}$.

Solução de José Morgado (do Pôrto).

Enviaram também soluções correctas: Alberto Pais (de Lisboa), J. S. Faria de Abreu (de Penafiel) e Paul Richard (de Portalegre).

1340 — São dadas as circunferências $C_1, C_2\cdots C_n$ tais que: *a)* os centros estão alinhados; *b)* a circunferência $C_i\,(i=2,\cdots,n-1)$ é tangente à circunferência C_{i-1} e à circunferência C_{i+1}; *c)* as circunferências são tangentes às rectas a e b. Conhecendo o ângulo 2α das rectas a e b e o raio R_1 de C_1, calcular a soma dos raios das n circunferências. [Considerar os dois casos: $R_j<R_{j+1}$ e $R_j>R_{j+1}$, $(j=1,\cdots,n-1)$]. R: *Primeiro caso*

$R_j < R_{j+1}$. *É evidente a relação* $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{R_{j+1} - R_j}{R_{j+1} + R_j}$, *ou* $R_{j+1} = R_j \times \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + 1}{-\operatorname{sen}\alpha + 1}$. *A soma de* n *raios será a soma de* n *têrmos duma progressão geométrica em que o primeiro termo é* R_1 *e a razão* $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + 1}{-\operatorname{sen}\alpha + 1}$ *Portanto* $S = \dfrac{R_1\left[\left(\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+1}{1-\operatorname{sen}\alpha}\right)^n - 1\right]}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+1}{1-\operatorname{sen}\alpha} - 1}$. *No caso de ser* $R_j > R_{j+1}$ *a progressão será decrescente e a razão igual a* $\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}$. $S = \dfrac{R_1\left[1 - \left(\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}\right)^n\right]}{1 - \dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}}$.

Solução de Álvaro Simões (de Sangalhos).

Enviaram também soluções correctas: J. S. Faria de Abreu (de Penafiel) e Paul Richard (de Portalegre).

1341 — Calcular o valor da soma $S = 1!1 + 2!2 + \cdots + n!n$. R: $n!n = n![(n+1)-1] = n!(n+1) - n! = (n+1)! - n!$ *Fazendo* n *sucessivamente igual a* $n-1, n-2, \ldots 3, 2, 1$, *vem* $n!n = (n+1)! - n!$, $(n-1)!(n-1) = n! - (n-1)!$, $(n-2)!(n-2) = (n-1)! - (n+2)!$; $\cdots$ $3!3 = 4! - 3!$, $2!2 = 3! - 2$, $1!1 = 1$ *Somando ordenadamente vem* $1!1 + 2!2 + 3!3 + \cdots + n!n = (n+1)! - 1$.

Solução de Paul Richard (de Portalegre).

Enviou também solução correcta: J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1343 — Consideremos um diedro de rectilíneo 2α e um plano que secciona o diedro perpendicularmente ao plano bissector. Sendo β o ângulo formado pela aresta e por aquêle plano, determinar, em função de α e β, o ângulo de secção do diedro. R: *Considere-se o triedro que tem por vértice* V, *o ponto de intersecção da aresta do diedro e do plano que secciona êste perpendicularmente ao plano bissector, e por arestas, a aresta do diedro e as intersecções do dito plano com o plano bissector e com uma das faces do diedro; arestas que se designam por* VA, VB *e* VC *respectivamente. Neste triedro rectângulo conhecem-se a face* $BVA = \beta$ *e o ângulo* α *oposto à face* BVC. *O triedro está, pois, determinado. Resolvendo-o, acha-se:* $\operatorname{tg} B\widehat{V}C = \operatorname{sen}\beta \operatorname{tg}\alpha$ *donde* $B\widehat{V}C = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}\beta \operatorname{tg}\alpha)$ *e* $2BVC = 2 \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}\beta \operatorname{tg}\alpha)$. *É o ângulo pedido.*

Solução de Alberto Pais (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: José Morgado (do Pôrto), J. S. Faria de Abreu (de Penafiel) e Paul Richard (de Portalegre).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

23 — BUTLER, CHAS. H. and LYNNWOOD WREN, F. — **The Teaching of Secondary Mathematics** — Mc Graw-Hill Gook Co. 1941. XII+513 págs. $3.00.

É um livro verdadeiramente actual que todo o professor de matemáticas do ensino secundário deveria inscrever na sua lista de leituras. Deveria ser lido também pelos educadores em geral e pelos dirigentes que têm a seu cargo qualquer trabalho sôbre matemáticas nas escolas secundárias. Escrito por dois professores capazes e experimentados, êste livro é precioso e cheio de sugestões, particularmente para o grupo de professores jovens que, faltando-lhe a experiência do trabalho escolar, necessitam de um guia para os seus planos diários de lições.

O livro está dividido em três partes:

1.ª O lugar e a função das matemáticas na educação secundária.

2.ª Melhoramento e avaliação da instrução na educação secundária.

3.ª O ensino do assunto principal das matemáticas secundárias.

Pode-se felicitar os autores por terem escrito um bom livro, agradável e cheio de notas de filosofia e sugestões para o desenvolvimento da instrução; é são e bem equilibrado.

Os exercícios do fim de cada capítulo são bem escolhidos e a bibliografia é actual.

(de W. D. R. em «The Mathematics Teacher» Vol. XXXV, n.º 4 — Abril 1942 — Trad. J. S. P.)

24 — FRANKLIN, PHILIP — **A Treatise on Advanced Calculus** — John Wiley and Sons, Inc. — New York; Chapman and Hall — London; 1940.

Esta obra constitue uma valiosa contribuïção a êste campo da matemática. Preenche definitivamente a lacuna existente entre o trabalho de forma elementar e o de rigor dentro da moderna análise, como é pôsto em evidência pelos títulos dos primeiros capítulos. Como ponto de partida os