ANO IV - N.º 15 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO - 1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Conceito de potência de conjuntos

por **L. Mendonça de Albuquerque**

1. — Diz-se que uma função φ estabelece uma correspondência biunívoca entre os elementos de dois conjuntos E e F, e escreve-se $E=\varphi(F)$, quando:

1.º — A todo o elemento $p \in E$ (pertencente a E) a função φ faz corresponder um e um só elemento $q \in F$; e

2.º — A qualquer dos elementos de F corresponde um único elemento de E.

Exemplos:

I — Existe uma correspondência biunívoca entre n quaisquer números inteiros consecutivos e as n raízes distintas da equação binómia $x^n-1=0$.

II — A função $y=\frac{a+bx}{1+x}$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os números reais do intervalo (a, b) e os números reais do intervalo $(0, \infty)$.

As correspondências biunívocas gozam das seguintes propriedades (entre outras):

I — Formam um grupo. Isto é:

a) Se $E=\varphi(F)$ é uma correspondência biunívoca, a correspondência inversa $F=\varphi^{-1}(E)$ é da mesma natureza.

b) Se $E=\varphi(F)$ e $F=\psi(G)$ são correspondências biunívocas, o produto $E=\varphi[\psi(G)]$ é uma correspondência da mesma natureza.

II — Se $E \subset F$ (quere dizer, se E é um sub-conjunto de F) também $\varphi(E) \subset \varphi(F)$.

2. — *Teorema de Cantor-Bernstein.* Se φ e ψ são duas correspondências biunívocas tais que, sendo $E_1 \subset F$ e $F_1 \subset F$ se tem $\varphi(E_1)=F$ e $\psi(F_1)=$E, existe, nesse caso, uma correspondência biunívoca entre E e F.

(A demonstração dêste teorema encontra-se, por exemplo, em Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, pág. 104).

3. — *Potência.* Quando entre os elementos de dois conjuntos E e F se pode estabelecer uma correspondência biunívoca, diz-se que os conjuntos têm a mesma potência (são equipotentes) e escreve-se $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{F}}$.

Exemplos:

I — O conjunto de n quaisquer números inteiros consecutivos e o conjunto das raizes distintas da equação $x^n-1=0$ são equipotentes.

Nota — A definição de correspondência biunívoca implica a igualdade do número de elementos para conjuntos finitos equipotentes. É o que se evidencia no exemplo precedente.

II — O conjunto (x) dos números inteiros positivos é equipotente ao conjunto (y) dos números pares e positivos. Pode estabelecer-se entre êles a correspondência $y=2x$, que é biunívoca.

III — Têm a mesma potência o conjunto dos números reais dos intervalos (a, b) e $(0, \infty)$. Isso resulta da correspondência biunívoca estabelecida pela relação $y=\frac{a+bx}{1+x}$.

4. — *Comparação de potências.* Os exemplos precedentes estabelecem a igualdade de potências de dois conjuntos em casos em que a determinação da correspondência biunívoca entre os seus elementos é extraordinàriamente simples. Nem todos os casos oferecem porém esta simplicidade. É muitas vezes necessário relacionar com os conjuntos dados os seus sub-conjuntos. Assim, se forem dados os conjuntos E e F, podem apresentar-se os quatro casos seguintes: (Borel, ob. cit., pág. 103 e Appert, Proprietés des ensembles abstraits les plus géneraux, tomo II, pág. 55)

1.º — Existe uma correspondência biunívoca $F=\varphi(E_1)$ entre um sub-conjunto $E_1 \subset E$ e F, e uma correspondência da mesma natureza $E=\psi(F_1)$ entre E e um sub-conjunto $F_1 \subset F$.

Então pelo teorema de Cantor-Bernstein, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca $E=\pi(F)$ entre os conjuntos dados que são, portanto, equipotentes.

2.º — Existe uma correspondência biunívoca $F=\varphi(E_1)$ entre um sub-conjunto $E_1 \subset E$ e F mas não existe qualquer relação da mesma natureza entre um dos sub-conjuntos de F e E. Diz-se então que a potência do conjunto E é superior à de F e escreve-se $\overline{\overline{E}} > \overline{\overline{F}}$. Deve notar-se que esta definição deixa entrever a possibilidade de escalonar as potências dos conjuntos numa sucessão crescente de tipos.

3.º — Pode concluir-se que $\overline{\overline{E}} < \overline{\overline{F}}$ quando, anàlogamente, se estabelece uma correspondência do mesmo género entre um dos sub-conjuntos $F_1 \subset F$ e E.

Exemplo:

Seja E o conjunto dos números reais positivos e F o conjunto das raízes positivas da equação $m \cos x - p = 0$ ($p < m$ e reais). É evidente que $\overline{\overline{E}} > \overline{\overline{F}}$.

4.º — Não existe qualquer correspondência biunívoca entre qualquer dos sub-conjuntos $E_1 \subset E$ e F, por um lado, e $F_1 \subset F$ e E, por outro.

5. — *Conjuntos ordenados e bem ordenados.* Diz-se que um conjunto E de elementos (p) é ordenado quando, quaisquer que sejam os elementos $p_1 \in E$ e $p_2 \in E$ existe entre êles uma dependência pela qual se pode afirmar uma das relações p_1 precede p_2 ou p_2 precede p_1 que obedece às propriedades assimétrica (se p_1 precede $p_2 \rightarrow p_2$ antecede p_1) e transitiva (se p_1 precede p_2 e p_2 precede $p_3 \rightarrow p_1$ precede p_3).

Se entre os elementos dum conjunto ordenado E existe um, p_0, que precede todos os outros, diz-se que p_0— é o primeiro elemento de E.

Se todos os sub-conjuntos de E contêm um primeiro elemento, E é um conjunto bem ordenado.

Axioma de Zermelo. — Consideremos o conjunto F de conjuntos E não vazios e sem elementos comuns dois a dois; existe pelo menos um conjunto que contém um e um só elemento de cada conjunto E.

Se admitirmos êste axioma, poderemos demonstrar o

Teorema de Zermelo. — Todo o conjunto pode ser bem ordenado, dum ponto de vista ideal. Quere dizer: sem que se garanta a possibilidade efectiva de determinar uma ordem. (Para demonstração, veja-se Sierpinski. Léçons sur les nombres transfinis, pág. 231).

6. — *A tricotomia.* O 4.º caso do parágrafo 4 sugere, naturalmente, uma pregunta: qual é a relação entre as potências dos conjuntos E e F quando se verifica essa hipótese?

Para Borel, e outros, o facto de se verificar a 4.ª hipótese apenas indica que a comparação das potências dos conjuntos E e F é impossivel.

Pelo contrário, Sierpinski, Appert, etc., aceitando o axioma de Zermelo que os primeiros repudiam, podem demonstrar o teorema de Hartogs. Êsse teorema demonstra (Sierpinski, ob. cit., pág. 228) que, dados dois conjuntos quaisquer, apenas se podem estabelecer entre êles e os seus sub-conjuntos as relações a que se referem os três primeiros casos. A impossibilidade do quarto caso chama-se tricotomia.

Não nos é possível ir mais longe na exigüidade duma nota desta índole; mas deve assinalar-se, entretanto, que muitos resultados têm sido obtidos com base no axioma de Zermelo e confirmados depois por desenvolvimentos que o regeitam. Para mais esclarecimentos e detalhes pode ler-se com proveito: Borel, ob. cit., (publica, em apêndice, cinco cartas muito interessantes sôbre o assunto); Sierpinski, ob. cit., cap. VI; Dugas, Essai sur l'incompréhension mathématique.

7. — *Escala de tipos de potência.* Dissemos no parágrafo 4, a propósito do segundo caso, que se entrevia a possibilidade de escalonar as potências dos conjuntos.

Para conclusão desta pequena notícia, queremos mostrar que a escala das potências fica bem determinada. É o que claramente evidenciam os dois teoremas seguintes:

Teorema I — O conjunto de todos os sub-conjuntos dum conjunto dado E (não vazio) tem uma potência superior à do conjunto E. (Sierpinski, ob. cit., pág. 84).

Teorema II — Dada uma família de conjuntos E quaisquer, existe sempre um conjunto E dessa família de potência inferior à de todos os outros. (Sierpinski, op. cit., pág. 214 e Appert, op. cit., tomo II, pág. 57).

Quere dizer: uma vez fixada a potência $\aleph_i$ dum conjunto E existem sempre conjuntos F de potência $\aleph_n > \aleph_i$; (Teorema I); e entre todos os conjuntos nessas condições há um de potência $\aleph_{i+1}$ menor que a de todos os outros.