Esbôço para uma algebrização da noção de integral

por *Constantin Carathéodory*

(Introdução a «Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs» — Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften—1938)

A teoria dos espaços abstractos foi muito estudada nos últimos dez anos e conseguiu-se introduzir aí, de diversos modos, a noção de integral [1].

Uma consideração mais profunda do assunto mostra que se pode avançar ainda nesta direcção. Os espaços — mesmo os chamados espaços abstractos — são naturalmente conjuntos, isto é, colecções de elementos, a que também chamamos pontos, de que o espaço considerado é constituído. Cada figura sôbre a qual se integrará, deverá, pois, encarar-se também como um conjunto de elementos. Porém, nestas condições pode reparar-se que não é essencial a significação dêstes elementos para a formação da noção de integral e que a própria demonstração da existência do integral já se possa essencialmente efectivar, em virtude da possibilidade da execução das operações fundamentais de reünião, de diferença e de intersecção estar contida na noção de conjunto.

A idéia assenta portanto, pouco mais ou menos, em abstrair inteiramente da estrutura das figuras sôbre as quais se deverá integrar e, destas figuras, só exigir que elas permitam operações que tenham certos laços de comum com as operações de reünião, de diferença e de intersecção de conjuntos. Disto resulta uma dupla vantagem: Uma vez por tôdas alargar-se-á considerávelmente o campo das aplicações possíveis. E, depois, mostra-se que a teoria anterior se simplificará porque só fica o essencial do seu esqueleto. Em resultado da tarefa que nos impomos de tratar objectos que são tão pouco diferenciados, desaparecem, automàticamente, para muitas demonstrações, aquelas partes complicadas que se tinham mantido por êrro, com o emprêgo dum material substancial. Digno de nota é o facto de, com meios tão primitivos, se poder obter a maioria dos resultados que se conhecem para os integrais de Lebesgue e de Lebesgue-Stieltjes. Mais: são poucos os detalhes que por especialização das hipóteses se juntarão às noções gerais.

Os objectos matemáticos que nós definimos no primeiro capítulo dêste artigo poderão considerar-se como elementos duma álgebra de Boole generalizada, como é imediatamente compreensível [2]. Nestas álgebras, contudo, a soma e o produto de dois elementos quaisquer postulam-se simultâneamente e têm iguais privilégios. Para o nosso fim é, pelo contrário, vantajoso não tratar simultâneamente a reünião, a diferença e a intersecção. Nós só postularemos a primeira destas operações, para depois, por meio de ulteriores axiomas, nos restringirmos de maneira que se assegure a existência das outras duas. Obtem-se desta maneira um sistema de axiomas que, com imaginação de exemplos, se poderá manejar de modo particularmente simples. (comparem-se §§ 9 e 10).

Objectos matemáticos que possuem propriedades tão fundamentais e importantes devem ter um nome, que seja completamente neutro e que não desperte falsas associações. Veremos que (§ 9) estes objectos nem sempre são conjuntos, de ma-

(1) *M. Fréchet*, Sur l'intégrale d'une fonctionelle étendue à un ensemble abstrait, Bull. soc. math. de France 43 (1915), p. 248.

P. J. Daniell, A general form of integral. Ann. of Math. (2) 19 (1917-18) p. 279 — Integrals in an infinite munber of dimensions, ibid. (2) 20 (1918) p. 281.

A. Kolmogoroff, Unterserchungen über den Integrallbegriff, Math. Ann. 103 (1930) s. 654.

H. Hahn, Über den Integrallbegriff, Festselvr. d. 57.Vers. Deutsch. Philolog. u. Schulmänner in Salzburg 1929, S. 193.

Über die Multiplikation total additiver Mengenfunktionen. Ann. della R. Scuola Normale Sup. di Pisa (Sc. Fis. e Mat.) (2) 2 (1933) p. 429.

O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, Fund. math. 15 (1930) p. 131.

J. Ridder, Integration in abstrakten Räumen. Fund. math. 24 (1935), s. 72.

S. Saks, Theory of the Integral. Monografie Matematyezne, Tom. VII, Warszawa, 1937.

(2) *O. Ore*, On the foundation of Abstract Algebra. Ann. Math. (2) 36 (1935) p. 406.

M. H. Stone, Postulates for Boolean Algebras and generalized Boolean Algebras. Amer. Journ. of Mathem. 57 (1935) p. 703.

neira que a designação «conjunto» não poderá usar-se. O nome «corpo» que apresentava muitas vantagens é da mesma maneira a excluir, porque o seu uso conduziria a equívocos; as «estruturas», que Ore introduziu, são demasiado gerais. Nada se opõe porém à designação de *Soma* [3].

Para a extensão da noção de integral podem usar-se diversos princípios. Kolmogoroff seguiu até ao fim a idéia de Leibniz duma «Summa Omnium». Hahn deixou-se conduzir pelo pensamento de que, para a restrição dos conjuntos sôbre os quais se deverá integrar, o integral é uma função totalmente aditiviva.

Muito mais simples e mais directamente se atinge o objectivo se se parte das propriedades elementares das áreas, respectivamente dos volumes. Estas propriedades são tão intuitivas que Arquimedes as pôde postular [4]. Elas representam a generalização dos seguintes teoremas geométricos:

Teorema 1. Quando se cobre completamente uma figura plana F com um número finito, ou não, de figuras $F_1, F_2, \cdots$, a área de F não é superior à soma das áreas de tôdas as F_k.

Teorema 2. O volume dum cilindro recto é igual ao produto da altura pela área da base.

O primeiro dêstes teoremas conduz à teoria das funções de medida que eu há muito tempo desenvolvi [5]. As funções de medida podem definir-se também, sem dificuldade como funções de *Soma*. A estas entidades é dedicado o segundo capítulo dêste artigo.

Para extender o teorema 2, que poderá tratar-se em conexão com o teorema do valor médio do cálculo integral, consideramos funções de elemento sôbre um corpo de *Somas*. Estas funções de elemento que devem ser análogas às funções de ponto ordinárias, definir-se-ão por meio dos limites superior e inferior que elas admitem nas diferentes somas.

Agora pouco falta para completar a teoria; basta considerar o integral de Lebesgue-Stieltjes como uma função de medida para a qual é válido o teorema do valor médio. A definição acima da função de elemento é particularmente apropriada a esta concepção do integral. Para o desenvolvimento destas idéias podem usar-se métodos muito correntes. Esta parte do capítulo III, que é fácil de completar, poderá preencher-se muito fàcilmente com estes fundamentos.

Nota-se, de resto, que se obtêm os resultados de Hahn quando se define o integral I^*A só no corpo em que esta função de medida é mensurável.

Tradução de MARIA PILAR RIBEIRO

Observações ao presente artigo — A transcrição precedente é interessante, além do mais, porque nos apresenta, sobretudo nos primeiros parágrafos, num exemplo sugestivo e indubitàvelmente importante preocupações e atitudes que, se não são características dos matemáticos de hoje, são hoje ainda pouco vulgarisadas embora muito familiares aos estudiosos.

Outra observação é-nos sugerida pela tradução com o título «O discreto e o contínuo» do número 14 da nossa «Gazeta de Matemática». Aí, em nossa opinião, arrisca-se o leitor a equívoco (talvez simplesmente porque as idéias estão demasiadamente condensadas e expressas com demasiada brevidade). Não se trata, agora, de sublinhar a confusão, ali possível, entre as noções de densidade e continuïdade para a recta. Queremos simplesmente dizer que (a nosso ver!) essa «encorporação da análise matemática, álgebra, teoria dos números, lógica matemática e geometria» se encontra já realizada num grau muito mais avançado do que aquela leitura pode fazer supor. A memória de Carathéodory vem em apoio desta observação. Especialmente importantes, sob êste aspecto, são outras noções cujo estudo está hoje tão avançado, como são as de «grupo topológico» e «estrutura». Delas procuraremos brevemente dar, aqui, uma idéia.

Finalmente (e em primeiro lugar!) possa esta tanscrição sugerir o estudo da própria memória a algum leitor da «Gazeta» que esteja desejoso de conhecer a matemática no seu desenvolvimento e tenha já pressentido que, para isso, precisa de conhecer a matemática moderna cuja contribuição é, desde já, simultâneamente, tão recente e tão rica.

HUGO RIBEIRO

---

(3) A palavra *soma* foi, sem dúvida, a empregada já por von E. Study nas suas investigações sôbre cinemática. O uso da mesma designação para objectos que aparecem em domínios da matemática inteiramente distintos não pode levar a equívocos. Também a palavra «corpo» (Körper) se usa na geometria e na álgebra com diferentes significações.

(4) Veja-se o λαμβανόμενα (Postulado) de Arquimedes no início do primeiro livro sôbre esfera e cilindro. Opera Omnia, ed. Heiberg, Leipzig, Teubner, 1910, Bd. I p. 8.

(5) *C. Carathéodory*, Über das lineare Maß-eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. Gött. Nachr. (1914) s. 404. Veja-se tambám Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig und Berlin, Teubner, 1918 (2 aufl. 1927) kap. V.