Esbôço para uma algebrização da noção de integral

por *Constantin Carathéodory*

(Introdução a «Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs» — Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften—1938)

A teoria dos espaços abstractos foi muito estudada nos últimos dez anos e conseguiu-se introduzir aí, de diversos modos, a noção de integral [1].

Uma consideração mais profunda do assunto mostra que se pode avançar ainda nesta direcção. Os espaços — mesmo os chamados espaços abstractos — são naturalmente conjuntos, isto é, colecções de elementos, a que também chamamos pontos, de que o espaço considerado é constituído. Cada figura sôbre a qual se integrará, deverá, pois, encarar-se também como um conjunto de elementos. Porém, nestas condições pode reparar-se que não é essencial a significação dêstes elementos para a formação da noção de integral e que a própria demonstração da existência do integral já se possa essencialmente efectivar, em virtude da possibilidade da execução das operações fundamentais de reünião, de diferença e de intersecção estar contida na noção de conjunto.

A idéia assenta portanto, pouco mais ou menos, em abstrair inteiramente da estrutura das figuras sôbre as quais se deverá integrar e, destas figuras, só exigir que elas permitam operações que tenham certos laços de comum com as operações de reünião, de diferença e de intersecção de conjuntos. Disto resulta uma dupla vantagem: Uma vez por tôdas alargar-se-á consideràvelmente o campo das aplicações possíveis. E, depois, mostra-se que a teoria anterior se simplificará porque só fica o essencial do seu esqueleto. Em resultado da tarefa que nos impomos de tratar objectos que são tão pouco diferenciados, desaparecem, automàticamente, para muitas demonstrações, aquelas partes complicadas que se tinham mantido por êrro, com o emprêgo dum material substancial. Digno de nota é o facto de, com meios tão primitivos, se poder obter a maioria dos resultados que se conhecem para os integrais de Lebesgue e de Lebesgue-Stieltjes. Mais: são poucos os detalhes que por especialização das hipóteses se juntarão às noções gerais.

Os objectos matemáticos que nós definimos no primeiro capítulo dêste artigo poderão considerar-se como elementos duma álgebra de Boole generalizada, como é imediatamente compreensível [2]. Nestas álgebras, contudo, a soma e o produto de dois elementos quaisquer postulam-se simultâneamente e têm iguais privilégios. Para o nosso fim é, pelo contrário, vantajoso não tratar simultâneamente a reünião, a diferença e a intersecção. Nós só postularemos a primeira destas operações, para depois, por meio de ulteriores axiomas, nos restringirmos de maneira que se assegure a existência das outras duas. Obtem-se desta maneira um sistema de axiomas que, com imaginação de exemplos, se poderá manejar de modo particularmente simples. (comparem-se §§ 9 e 10).

Objectos matemáticos que possuem propriedades tão fundamentais e importantes devem ter um nome, que seja completamente neutro e que não desperte falsas associações. Veremos que (§ 9) estes objectos nem sempre são conjuntos, de ma-

---

(1) *M. Fréchet*, Sur l'intégrale d'une fonctionelle étendue à un ensemble abstrait, Bull. soc. math. de France 43 (1915), p. 248.

P. J. Daniell, A general form of integral. Ann. of Math. (2) 19 (1917-18) p. 279 — Integrals in an infinite munber of dimensions, ibid. (2) 20 (1918) p. 281.

A. Kolmogoroff, Unterserchungen über den Integrallbegriff, Math. Ann. 103 (1930) s. 654.

H. Hahn, Über den Integrallbegriff, Festselvr. d. 57.Vers. Deutsch. Philolog. u. Schulmänner in Salzburg 1929, S. 193.

Über die Multiplikation total additiver Mengenfunktionen. Ann. della R. Scuola Normale Sup. di Pisa (Sc. Fis. e Mat.) (2) 2 (1933) p. 429.

O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, Fund. math. 15 (1930) p. 131.

J. Ridder, Integration in abstrakten Räumen. Fund. math. 24 (1935), s. 72.

S. Saks, Theory of the Integral. Monografie Matematyezne, Tom. VII, Warszawa, 1937.

(2) *O. Ore*, On the foundation of Abstract Algebra. Ann. Math. (2) 36 (1935) p. 406.

M. H. Stone, Postulates for Boolean Algebras and generalized Boolean Algebras. Amer. Journ. of Mathem. 57 (1935) p. 703.