dante. Más como la idea es llegar a lograr una colaboración de España en la investigatión aeronáutica, tales planes de estudios serán en breve incrementados notablemente con la proyectada creación del título de Doctor en Ingeniería Aeronáutica.

Los nombres gloriosos de La Cierva, Torres Quevedo, Terradas y otros, ponen fuera de duda la capacidad de inventiva de los cerebros españoles en esta importantísima rama de la técnica y hacen esperar un futuro de esplendor para nuestra ciencia aeronáutica, encauzada por la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos.

La Academia reserva anualmente algunas plazas para alumnos extranjeros y considera un gran honor contar actualmente entre ellos al Capitán portugués Pereira do Nascimento, pues en España perdura el recuerdo y la admiración por la gloriosa gesta de vuestros aviadores Gago Coutinho y Sacadura Cabral.

ANTOLOGIA

EVOLUÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

por ***Beppo Levi***

(Conferência realizada em 18 de Maio de 1940 na inauguração do Instituto de Matemática — Universidad Nacional del Litoral — Rosário-Argentina)

Disse Galileo que «la filosofía è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto dinanzi agli occhi (io dico l'Universo), ma non si puó intendere se prima non s'impara a intender la lingua e a conoscer i caratteri ne'quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche...». Números, figuras e medições são os instrumentos para fixar na nossa mente as manifestações do cosmos: mas não existiriam números nem medições se não houvesse homens. Poderiam os astros rodar pelos espaços, poderia a luz percorrê-los, mas faltaria a pregunta da velocidade da luz e faltaria a resposta de Michelson. Os números foram-nos dados por Deus com o pensamento, e a matemática encontra-se, sempre, onde os factos da natureza se fundem com os do intelecto. Não se trata porém dum ponto de intersecção, mas dum contacto extenso, visto que não é só para dar precisão e forma mnemónica aos nossos conhecimentos que contamos e medimos; é também, e possìvelmente mais, porque uma necessidade do espírito nos impele a adoptar os factos da natureza aos esquemas das relações lógicas. Esta necessidade não é contudo igualmente sentida por todos os homens, nem sequer por todos os povos e em todos os tempos. Varia portanto o próprio conceito da matemática, varia o valor que se lhe atribue, varia o seu desenvolvimento.

As notícias mais antigas que actualmente se têm sôbre conhecimentos matemáticos parece que datam de há aproximadamente quatro mil anos e referem-se a dois povos não muito afastados geogràficamente mas de raças e civilizações bastante diferentes: os egípcios e os babilónios; quanto aos primeiros pode dizer-se que tratam só de regras aritméticas tendo em vista cálculos concretos ou de regras geométricas que parecem consagrar certos resultados experimentais de aplicação prática; quanto aos segundos, pode pensar-se numa matemática desinteressada e talvez já de estrutura lógica. Foi Neugebauer — sagaz intérprete de numerosos tijolos encontrados nas excavações do vale do Eufrates — quem descobriu estes documentos dum conhecimento algébrico muito semelhante, segundo parece, ao que floresceu na Europa nos primeiros anos do renascimento científico não só pelo seu conteúdo, mas ainda pela forma geométrica como está expresso. No entanto a genial interpretação de Neugebauer deixa-nos assombrado porque os documentos só apresentam regras dogmáticas, através de exemplos escolhidos de modo a acentuar combinações numéricas que encobrem a parte lógica.

Supõe Negebauer que o papel deductivo ausente, fôsse reservado ao ensino oral e ainda que êste ensino tivesse um certo carácter de importação: parece-me, porém, mais provável que estes documentos revelem uma fase de decadência na qual, tendo-se perdido o gôsto pelo raciocínio deductivo, não tivesse ficado senão uma tradição de escola, facto talvez comparável ao que se deu na Idade Média quando proposições euclideanas de que se tinha perdido o verdadeiro significado, foram objecto de discussões escolásticas. Certo é que a esta antiquíssima cultura matemática se seguiu um período de obscurecimento e houve que esperar um milénio para que a chama voltasse a brilhar noutro lugar e noutro povo: o povo grego.

É provável que até aos gregos tenham chegado algumas tradições práticas de natureza matemática dos povos próximos do Mediterrâneo, porque, segundo testemunha Heródoto, êles teriam aprendido as primeiras noções geométricas dos agrimensores egípcios; e o nome de geometria exprime claramente uma originária intenção prática. Mas ¿quem poderá tomar os «Elementos» de Euclides por um tratado de Topografia? Não foi na medição dos campos, mas nas discussões das escolas filosóficas, sob o estímulo da crítica lógica que se desenvolveu a geometria grega, cujo pensamento, atingiu o auge com a obra de Arquimedes, que anuncia quási todos os temas fundamentais da matemática moderna. Se o rápido desaparecimento dêste pensamento com a chegada da Idade Média não nos surpreende muito, é sòmente porque estamos acostumados a considerar êste período, talvez mais do que realmente foi, como época de barbarie. Mas, em verdade, o declínio da matemática explica-se melhor com a expansão do mundo romano do que com o avanço da Idade Média. Ao contrário da Grécia, Roma que em tantos ramos do progresso civil foi sua rival, que pelo poder militar e político lhe foi imensamente superior, teve por certo uma arte de cálculo, mas não teve — ou quási não teve — um pensamento matemático. Os problemas práticos da medição dos terrenos, do traçado das estradas, das construções municipais, existiam, e grandiosos, na época romana; não deixaram de existir, embora deminuídos, na decadência do Império; mas também estes podem resolver-se por meio de uma técnica mais ou menos perfeita. Parece realmente que o declínio da matemática coincide com o desvio do interêsse dos problemas da razão para as menos complicadas necessidades da técnica.

Durante muitos séculos o pensamento matemático parece ter-se apagado completamente. Para falar duma matemática medieval é preciso dar valor aos mais pequenos aperfeiçoamedtos na arte do cálculo numérico e da numeração.

A matemática renasce com a volta do pensamento livre, do pensamento crítico, com o afirmar-se da filosofia positiva: o que distingue o pensamento positivo do escolástico ou do idealista, não é, como às vezes se diz, porque o primeiro só repare na natureza, porque é igualmente escolástico um materialismo milagroso que se reduza a afirmação de factos, de acontecimentos, de atributos. O que mais distingue o pensamento positivo, julgo eu, está em pedir à natureza respostas bem definidas, lògicamente determinadas. Por tudo isto é preciso afirmar que o que se chama por antonomásia ciência da dedução, é, na verdade, como forma mental, mais do que como instrumento técnico, o antecedente necessário, o guia luminoso da ciência experimental. O nome de Galileo, que figura à frente da escola filosófica positiva, é também o primeiro grande nome do renascimento matemático, não só porque, como recordei, êle tenha afirmado ser a matemática a linguagem em que se exprimem os factos físicos, nem tão pouco porque a matemática lhe seja devedora directamente de algum descobrimento, mas porque da sua escola surgiram os Cavalieri, os Torricelli, os Viviani, porque o pensamento de Galileo tornou possível a obra de Newton. Como já na escola grega de Platão, pareceu novamente com Descartes, Leibniz, Pascal, ser a matemática o fundamento da filosofia; e o século do iluminismo, das revoluções da América e da França, da declaração dos direitos do homem, foi também aquêle em que surgiram as bases das principais teorias matemáticas e físicas modernas. Pode afirmar-se, sem dúvida alguma, que êste período do desenvolvimento das matemáticas ultrapassou em esplendor todos os anteriores: citaremos Euler, Lagrange, Gauss, Fourier, Ampère, Cauchy, Hermite, Poincaré, etc. No prólogo do primeiro volume das Acta Mathematica, Mittag Leffler podia dizer: «A época em que começámos a nossa publicação é certamente uma das mais fecundas na história da matemática, pelo número e importância dos descobrimentos que se referem aos princípios mais essenciais da análise»: isto passou-se em 1882, e, apesar de que sempre é fácil aos contemporâneos errar por falta de perspectiva, pode-se ainda hoje não discordar desta afirmação.

¡Chegámos assim às minhas recordações pessoais: à matemática que eu próprio vivi!

No fim do século passado foi moda uma definição de matemática que a identificava com a lógica dedutiva; e um matemático filósofo chegou ao enunciado paradoxal de que a matemática é a ciência na qual se tiram conclusões exactas, sem conhecer o objecto de que se fala, nem a verdade do que lhe diz respeito: porque as regras da lógica operam sôbre as proposições independentemente do seu significado intrínseco, independentemente da sua verdade objectiva, assegurando às deduções uma verdade hipotética, condicionada à verdade das proposições de que se partiu. Pela mesma razão disse-se da matemática que é ciência tautológica, que nada nos faz conhecer que não conhecêssemos antecipadamente; e um ou outro filósofo idealista pode ter julgado êste argumento suficiente para proclamar a vaidade científica da Matemática, ciência de pseudo-conceitos.

Ao primeiro argumento responderemos, que caracterizar uma ciência pelo instrumento que emprega, é talvez, ao mesmo tempo, excessiva presunção e humildade de mais: presunção porque dá a essa ciência um campo ilimitado, humildade porque fica privada de todo o direito ao ao valor intrínseco sôbre o valor do objecto que investiga.

No que respeita ao segundo argumento, há um sofisma dissimulado, como sempre, num jôgo de palavras: não se deve negar que a tautologia matemática só nos faz conhecer o que antecipadamente se afirmou; mas tambem não tem sentido querer conhecer o que antecipadamente não exista, ou na natureza que nos rodeia, ou no nosso íntimo, ou, ainda, nas afirmações do nosso pensamento; e se a pretendida tautologia consegue descobrir nalgum sistema muito restricto e aparentemente simples, de tais afirmações um conteúdo de extensão inesgotável, de surpreendente variedade e beleza, de que muitas vezes também não se suspeitava, parece-me que a ironia transforma-se em sublime exaltação.

Quero acrescentar que, apesar da dedução lógica ser o que caracterisa a matemática, seria paradoxal chamar matemática a tôda e qualquer dedução; apesar das teorias matemáticas aparecerem como o desenvolvimento unívoco das implicações contidas em poucas proposições iniciais, o verdadeiro espírito matemático manifesta-se precisamente no acto de escolher estas proposições e de escolher entre essas implicações as valiosas e as interessantes.

Talvez colocando-se neste ponto de vista, ao olhar para a imensa variedade e o enorme desenvolvimento da nossa literatura matemática contemporânea possa alguma vez surgir a dúvida de que a indiscutível arbitrariedade do objecto sôbre o qual se exerce a dedução matemática nos leve no fim de contas ao capricho individual. Objecta-se às vezes, que nós os homens não podemos prever — e isto poderá ser útil nas aplicações futuras — que a matemática prepara quadros racionais que, pelo progresso da ciência, poderiam vir a ser úteis, talvez necessários, para colocar nêles os dados e as preguntas da experiência e da prática, e que muitos dêstes quadros possíveis são necessários se se pretende que prática e teoria possam encontrar, no momento oportuno, aquilo de que carecem. Correm de bôca em bôca exemplos deslumbrantes, como o do cálculo diferencial absoluto, que encontrou aplicação na teoria da relatividade, e o do cálculo das matrizes e dos auto-valores, nas teorias atómicas. Não é esta a ocasião para discutir tais exemplos; há, na verdade, diferenças essenciais entre os dois casos: no primeiro, pode pensar-se que a ligação deu-se com o decorrer do tempo e o facto das considerações pluridimensionais serem actualmente habituais entre os matemáticos e até, um pouco também, entre os não matemáticos; no uso cada vez mais generalizado dos referenciais intrínsecos na mecânica e na física matemática, etc., pode pensar-se que se a concepção de Einstein não tivesse sido precedida da creação do cálculo de Ricci e Levi-Civita, não teria encontrado por isso dificuldades essenciais e teria originado ela própria êste desenvolvimente teórico visto que dêle precisava como pode provar adiante a história das teorias vectoriais, que ainda não tem um século. Pode pensar-se precisamente o contrário pelo segundo caso: não é fácil imaginar que algumas idéias vulgares na física chamada ondulatória se teriam produzido sem o precedente abstracto de certas teorias matemáticas: mas parece-me que se trata, mais que duma aplicação, de simples analogias, das quais ainda duvido um pouco.

Direi, concluindo, que não acredito numa ciência feita de retalhos ou, se se prefere, de partes compostas mas ao mesmo tempo independentes. Creio que a matemática tem, a respeito das ciências da natureza, a mesma posição que a filosofia relativamente à história e às ciências morais: os resultados, as fórmulas dão muito menos valor à matemática como factor de progresso, do que os métodos, do que a soma de experiências mentais com que ela vai enriquecendo a nossa faculdade de raciocínio. Nada significa um ou outro caso, caso feliz em que uma fórmula matemática pode resolver um problema de aplicação, porque a história mostra-nos que é muito mais freqüente o caso em que os problemas propostos pela filosofia natural constituem o ponto de partida para o desenvolvimento de novas teorias matemáticas. E eu penso que, para a ciência, deve temer-se como uma doença, o procurar uma justificação exterior, assim como no homem a pregunta do fim, do como e do porquê da vida. Sabe-se quanta filosofia desesperada há no fundo desta pregunta; e, no entanto, vive-se pelo amor à vida, pelo amor aos filhos, pelo amor à humanidade. O mesmo sucede com a ciência: as teorias valem pela luz interior que devemos a quem as criou, valem pela luz que ainda dão a quem as estuda. ¡Não interessa que esta luz possa derivar duma pregunta de pura especulação científica ou de ciência aplicada! ¿Deve pois considerar-se só como acaso que muitas vezes preguntas dum e doutro tipo, conduzem aos mesmos resultados? Também não acredito, porque a fôrça do homem reside no entendimento e a distinção entre entendimento e aplicação só pode ser provisória e aparente.

A finalidade da vida é a vida digna e a da ciência é a ciência digna; mas o conceito de dignidade sai só da nossa consciência; por isso, estão igualmente afastadas da verdade ambas as fórmulas: a da ciência para a prática e a da ciência para a ciência.

Um dos campos em que mais se tem empregado a matemática como simples dedução lógica é na investigação dos «fundamentos». Pode dizer-se, com verdade, que o que fez nascer a definição da matemática como lógica pura foi verdadeiramente o grande interêsse suscitado pelos fundamentos. ¡Mas não se deve acreditar por isso que a preocupação dos fundamentos lógicos das deduções matemáticas seja exclusivamente moderna. Quanta investigação de fundamentos está contida na obra de Euclides: no cuidado com que estão enunciados nos «Elementos» — embora de maneira que não corresponde completamente às exigências modernas — os axiomas, as «noções comuns»; no esfôrço para atrasar o mais possível o uso do célebre axioma que mais tarde foi a preocupação dos geómetras durante muitos séculos; na teoria das proporções, no princípio da exaustação. O método é certamente diferente do nosso: nunca na antiguïdade se tratou de construir sistemas lógicos hipotéticos; pensava-se nessa época só em dar forma lógica, baseada sôbre alguns conceitos que pareciam mais intuïtivos, a teorias conhecidas, quer pela experiência, quer pela intuïção. Nós, pelo contrário, construímos, a priori, as geometrias não-euclideanas. Mas, ¿é verdadeiramente para antecipar uma geometria possível num espaço físico que uma pretendida experiência viria a demonstrar não euclideana, que nos vêm interessando há mais de dois séculos, aproximadamente, as geometrias não euclideanas? e as geometrias dos espaços curvos? A resposta não pode ser senão negativa se repararmos nas origens: começando com a obra de Saccheri, e seguindo com a de Gauss, Bolyai, Lobachewski, Riemann, nunca o estímulo para a investigação matemática foi a dúvida acêrca da natureza física do espaço, mas o desejo de penetrar através do artifício da hipótese contrária, no íntimo sentido das hipóteses que caracterizam a geometria euclideana que domina as nossas experiências diárias. É certo que, formada a teoria, sob a influência duma filosofia empírica, talvez no vão desejo duma justificação utilitária, poude nascer a questão: se uma geometria não-euclideana com raio de curvatura suficientemente grande, mas não infinito, corresponderia melhor aos factos da experiência. Eu julgo que se a resposta nunca foi decisiva, é porque a geometria precede as medições, é a condição para a sua interpretação, é a teoria dos instrumentos de medir.

Na filosofia matemática moderna, tomou transcendente importância a consideração de que os conceitos postos como fundamento das teorias operam na dedução, não pelas «intuïções» que êles representam, mas sim pelas propriedades inerentes a estas intuïções. Tudo aquilo que concebemos como intuïção imediata, tudo aquilo que exprimimos habitualmente com uma palavra «número», «ponto», «recta», «espaço», «curvo», «infinito», ...é sempre, sem darmos por isso, um conjunto, uma constelação de atributos que se podem dizer mais simples, com o mesmo sentido que o cloro e o sódio são mais simples, mas não mais intuïtivos, que o sal comum: a matemática opera como o reagente revelador: sem renunciar à tarefa de reduzir, quando e como pode, o problema complexo às intuïções mais simples, vai descobrindo muitas vezes o complexo sob a ilusão da simplicidade; então desintegra o conjunto de atributos e uma ou outra parte impele-nos para conseqüências lógicas muitas vezes inesperadas. Muitas das teorias matemáticas modernas de maior valor, derivaram desta decomposição de conceitos mais ou menos intuïtivos noutros de menor conteúdo (e, por isto, do ponto de vista lógico, de maior extensão). Recordarei aqui as teorias das operações e dos grupos, as generalizações da noção de número (números algébricos, números complexos, ideais, módulos,...) a teoria dos conjuntos. Esta última teoria tem as suas raízes no desejo de esclarecer as noções fundamentais daquêle «cálculo infinitèsimal», cálculo de fluentes e fluxões, cálculo dos indivisíveis, Analysis infinitorum, que desde Newton e Leibnitz durante dois séculos, muitas vezes por brilhantes intuïções, tinha dado resultados tão surpreendentes. Estão relacionadas com esta teoria as questões de lógica matemática; mas, ainda que, como teoria, ocupe um lugar bastante limitado entre outras teorias matemáticas, tem nomes ilustres como Peano, Russell, Hilbert, a escola de Varsóvia e a de Viena; e certas exigências lógicas não conhecidas anteriormente adquiriram transcendência em todo o campo matemático.

Não é esta a ocasião para falar das grandes teorias mais intimamente relacionadas com o desenvolvimento da mecânica e da física matemática:

equações diferenciais e às derivadas parciais, equações integrais, cálculo das variações, problemas de valores sôbre um contôrno... Recordarei que a fôrça de abstracção contida nos símbolos, impelindo as intuições primitivas a desligar-se de idéias contingentes gerou extra-explorações importantes no desenvolvimento da física: tais os conceitos de energia e de campo; daqui as teorias de Maxwell, de Planck, de Einstein.

Nos últimos anos parece que a matemática poderia indicar-nos o caminho dos segredos da natureza, não pela faculdade de generalização pela qual a fantasia se concilia com a lógica, mas só pelas propriedades formais dos seus símbolos; parece também que, sem claras hipóteses inteligíveis, um simples mecanismo algorítmico pudesse, talvez por uma nova magia, revelar-nos alguma coisa da essência íntima das íntimas leis da matéria. Se esta tarefa, nesta forma, pudesse ser realizada pela matemática, então ficaria justificado o acumular fórmulas com preceitos combinatórios completamente arbitrários. Não o creio; tenho fé em que, também no campo reservado agora às novas mecânicas, outros triunfos possa alcançar a matemática, dando ao intelecto humano o prazer de conhecer racionalmente.

Tradução de M. AUGUSTA PEREZ FERNANDEZ

O PROGRESSO DA MATEMÁTICA

por ***J. G. Crowther***

(De «The Social Relations of Science», p. 34-35)

Parece que os grandes progressos na Matemática estão relacionados com os novos contactos entre culturas. Pode surgir, portanto, um período curto de progresso rápido, enquanto as possibilidades do novo conjunto de conceitos fundamentais evoluem do contacto que se estabeleceu. Quando a nova tradição matemática foi estabelecida, alguns dos seu ramos fundamentais esperaram para surgirem o grande passo seguinte da civilização. Se esta teoria é verdadeira, parecerão impossíveis progressos fundamentais na matemática moderna, porque os povos de todo o globo estão agora em íntimo contacto. Talvez os progressos fundamentais do futuro venham a ser devidos não a contacto ou assimilação entre povos de diferentes culturas, mas a assimilação entre classes sociais de culturas diversas. A ciência moderna, com o seu equilíbrio entre a teoria e a prática, parece dever muito ao contacto entre os escolares e os técnicos manuais e pode ser uma expressão da assimilação crescente das duas classes. É possível que uma Matemática fundamentalmente nova não seja criada até que a nossa própria civilização se extinga e o redescobrimento das suas ruínas provoque a inspiração a novos povos, daqui a milhares de anos, os quais encararão o nosso conhecimento matemático dum novo ponto de vista e verão nele possibilidades invisíveis para nós em virtude da feição particular dada à nossa mente pela civilização que herdámos.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

ENSINO UNIVERSITÁRIO APÓS A GUERRA

(De «The Advancement of Science» Vol. II, n.º 6, July 1942)

A Sub-Comissão Executiva da Secção das Relações Sociais e Internacionais da Ciência, da Associação Britânica para o Progresso da Ciência, realizou uma reünião para estudo da acção a levar a efeito pela Associação em relação com o ensino universitário após a guerra.

Resolveu-se constituir uma comissão com os objectivos gerais que seguem:

a) Considerar a política e métodos gerais do ensino universitário tendo em vista a promoção da colaboração internacional e a livre permuta de ideias, e a relacionar o ensino universitário com as necessidades e para o serviço da comunidade.

b) Estudar a reorganização dos programas e dos *curricula* de acôrdo com as concepções modernas das inter-relações dos diferentes ramos do conhecimento, sobretudo os da ciência e das humanidades.

c) Investigar a situação no que respeita ao material de ensino, aparelhos, livros e pessoal, nas universidades que foram danificadas, destruídas desorganizadas ou encerradas, em virtude da guerra, e interessar-se pela sua reintegração.

Esta comissão foi constituída sob a presidência do Dr. Maxwell Garnett, C. B. E., com o Prof. F. E. Weiss, F. R. S. e A. Gray Jones, como secretários honorários adjuntos, e empenhou-se activamente na sua tarefa.

Tradução de A. SÁ DA COSTA