MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 2

I

1344 — Determinar as condições a que deve satisfazer m para que a equação $x^4-(2m-1)x^2+$ $+m^2-4=0$ tenha 4 raízes reais e diferentes. R: *A resolvente deverá ter* 2 *raízes positivas e diferentes, pelo que* m *deverá satisfazer simultâneamente às seguintes condições:* $2m-1>0$, $m^2-4>0$ *e* $(2m-1)^2-4(m^2-4)>0$. *Os valores de* m *são todos os compreendidos entre* $1/2$ *e* $17/4$.

1345 — *a)* Simplifique a fracção $\dfrac{x^2-6x+5}{3x^2+6x-9}$. R: $(x-1)(x-5):3(x+3)(x-1)=(x-5):(3x+9)$.

b) Sendo $y=3\operatorname{sen}2x$ deduza a expressão que dá explicitamente o valor de x em função de y. R: $y/3=\operatorname{sen}2x$; $2x=\operatorname{arcsen}y/3$ *e* $x=1/2.\operatorname{arcsen}y/3$.

1346 — *a)* Determine, recorrendo ao cálculo logarítmico, a altura de um triângulo isósceles sendo 43° 21′ 30″ o ângulo formado pelos dois lados do triângulo que têm comprimentos iguais, e 14,42 o comprimento do terceiro lado. R: $h=7{,}21\operatorname{cotg}21^\circ\,40'\,45''$, $\log h=\log 7{,}21+$ $+\log\operatorname{cotg}21^\circ\,40'\,45''=0{,}85794+0{,}40063=1{,}25867$ *e* $h=18{,}14$. *b)* Transforme na soma de dois radicais simples a expressão: $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$ R: $\sqrt{7+2\sqrt{6}}=$ $=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; $7+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}$ *donde se conclue que* $x+y=7$ *e* $xy=6$. *Os valores de* x *e* y *são as raízes da equação* $x^2-7x+6=0$: $x=6$ $y=1$.

II

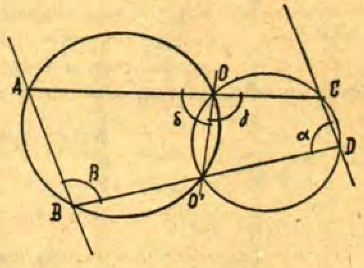
1347 — Verifique a identidade $\operatorname{sen}3a\operatorname{cosec}a-$ $-\cos 3a\sec a=2$. R: $\operatorname{sen}3a:\operatorname{sen}a-\cos 3a:\cos a=2$. *Mas:* $\operatorname{sen}3a=3\operatorname{sen}a\cos^2 a-\operatorname{sen}^3 a$ *e* $\cos 3a=$ $=\cos^3 a-3\operatorname{sen}^2 a\cos a$ *donde* $3\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a-$ $-\cos^2 a+3\operatorname{sen}^2 a=2(\cos^2 a+\operatorname{sen}^2 a)=2$.

Obs. — Para calcular $\operatorname{sen}3a$ e $\cos 3a$ aplique sucessivamente as expressões de $\operatorname{sen}(a+b)$ e $\cos(a+b)$.

III

1348 — Que números inteiros se podem juntar aos termos duma fracção irredutível sem lhes alterar o valor? Justifique a resposta. R: *Veja a resposta à mesma questão no exercício n.º* 1356.

1349 — Por cada um dos pontos O e O′ de intersecção de duas circunferências tire uma recta que corte as duas circunferências. Demonstre que as cordas que unem os pontos em que as rectas



cortam as duas circunferências são paralelas. R: $\hat\alpha=180^\circ-\hat\gamma$; $\hat\gamma=\hat\beta$ *visto que* $\operatorname{med}\hat\gamma=\operatorname{med}\hat\beta=$ $=1/2\cdot\widehat{AOO'}$. *Portanto* $\hat\alpha=180^\circ-\beta$ *e os ângulos* $\hat\alpha$ *e* $\hat\beta$ *têm os lados* AB *e* CD *paralelos.*

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.º 4

1350 — Resolva a inequação $\dfrac{x+1}{x-1}<\dfrac{x-1}{x+1}$.

R: *A inequação dada é equivalente a* $\dfrac{4x}{x^2-1}<0$ *ou aos sistemas:* $4x>0$, $x^2-1<0$ *e* $4x<0$, $x^2-1>0$ *cujas soluções são respectivamente* $0<x<1$ *e* $x<-1$.

1351 — *a)* Forme a equação biquadrada de coeficientes reais de que é raiz o número $1-2i$. R: *As outras raízes são:* $1+2i$, $-1+2i$ *e* $-1-2i$, *e a equação será:* $[x-(1-2i)][x-(-1+2i)][x-$ $-(1+2i)][x-(-1-2i)]=0$ *ou* $[x^2-(1-2i)^2][x^2-$ $-(1+2i)^2]=0$ *ou* $x^4+6x^2+25=0$.

b) Reduza ao menor índice comum os radicais $\sqrt[12]{16}$ e $\sqrt[20]{81}$. R: *Reduzindo-os primeiro ao mesmo índice tem-se:* $\sqrt[60]{16^5}$ *e* $\sqrt[60]{81^3}$ *ou* $\sqrt[60]{2^{20}}$ *e* $\sqrt[60]{3^{12}}$ *que simplificados dão:* $\sqrt[15]{2^5}$ *e* $\sqrt[15]{3^3}$.

1352 — Determine por logaritmos, a altura dum trapézio rectângulo cujas bases medem 17,31 metros e 12,43 metros e em que um dos ângulos internos mede 122°16′. R: $h=4{,}88\operatorname{tg}(180^\circ-122^\circ16')$ $h=4{,}88\operatorname{tg}57^\circ\,44'$ $\log h=\log 4{,}88+\log\operatorname{tg}57^\circ\,44'=$ $=0{,}68842+0{,}19972=0{,}88814$ *e* $h=7{,}729$ m.

1353 — Escreva a expressão geral dos ângulos x que satisfazem à condição: $\operatorname{tg}(x/2-\pi/3)=$

$= \operatorname{cotg} 2/3\pi$. R: $x/2 - \pi/3 = \pi/2 - 2/3\pi \pm k\pi$; $x/2 = \pi/6 \pm k\pi$ *e* $x = \pi/3 \pm 2k\pi$.

1354 — Deduza o valor da razão das áreas dos círculos circunscritos a um triângulo equilátero e a um hexágono regular cujos perímetros são iguais. R: $P = 3L = 6l$ *e* $\therefore L = 2l$ *e* $\pi R^2/\pi r^2 = R^2/v^2 = L^2/3 : l^2 = 4l^2/3 : l^2 = 4/3$ *visto que* $R = L/\sqrt{3}$ *e* $r = l$.

1355 — *a)* Trace por um ponto P exterior a uma circunferência uma tangente e uma secante a essa circunferência. Que relação existe entre os segmentos da tangente e da secante limitados pelo ponto dado e pela circunferência.

b) Quais são os poliedros regulares que conhece? Indique, entre êles, dois em que o número de vértices de um seja igual ao número de faces do outro.

1356 — Quais são os números que podem juntar-se aos dois termos duma fracção irredutível sem alterar o valor dessa fracção? Justifique a resposta. R: *Os dois números deverão ser tais que* $a : b = (a+x) : (b+y)$ *ou* $ay - bx = 0$ *donde* $a/b = x/y$. *Os números* x *e* y *são portanto dados pelas expressões* $x = na$ *e* $y = nb$ *sendo* n *um inteiro positivo.*

Soluções dos n.os 1344 a 1356 de J. J. Rodrigues dos Santos

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 4

1357 — Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}\operatorname{tg} x - \dfrac{1-\operatorname{tg} y}{4} = \operatorname{tg} y \\[2mm] \dfrac{1}{4}\operatorname{tg} y + \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{6} = 0. \end{cases}$$

R: *O sistema proposto é equivalente a* $6\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} y = 1$; $2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} y = 2$ *o que dá imediatamente* $\operatorname{tg} x = -1/4$ *e* $\operatorname{tg} y = -5/6$; *donde* $x = 165^0\,57' + n\,180^0$ *e* $y = 140^0\,12' + n\,180^0$.

1358 — Dado um tetraedro regular de $1^m{,}135$ de aresta, determine o seu volume e o ângulo de duas faces. R: *Sendo* l *a aresta será o volume dado por* $V = \dfrac{l^3}{12}\sqrt{2}$, *donde* $\log V = 3 \log l + \dfrac{1}{2}\log 2 + \operatorname{colg} 12 = 3 \cdot 0{,}05500 + 0{,}15051 + 2 \cdot \bar{2}{,}92082 = \bar{2}{,}15715$ *e* $V = 0{,}01436^{m3}$. *O ângulo diedro é dado por* $\cos\alpha = 1/3$ *como se verifica fàcilmente considerando as perpendiculares a uma aresta baixadas dos vértices opostos e a altura do tetraedro.*

1359 — Simplifique a expressão

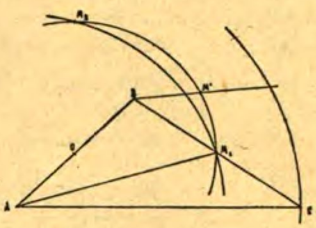
$$\frac{(a^{-1}\sqrt{b})^{1/2}\,(x^2-3x+2)}{(a^{1/2}b)^3\,(x-1)}.$$

R: $\dfrac{a^{-1/2}\,b^{1/4}\,(x-1)\,(x-2)}{a^{3/2}\,b^3\,(x-1)} = (x-2)\cdot a^{-2}\cdot b^2\,\sqrt[4]{b^3}$.

1360 — Quantas circunferências pode tirar tangentes simultâneamente a três rectas? Sendo *n* rectas ¿qual é o número máximo de circunferênciais que pode tirar em tais condições? R: *No primeiro caso o número máximo de circunferências que se podem traçar é de* 4. *No segundo caso, se considerarmos que as rectas estão dispostas de modo que não há mais de duas que passem pelo mesmo ponto, o número total será* $4 \times {}^nC_3$.

1361 — O número 2012 está escrito na base 3 de numeração. Diga qual é o resto da divisão daquele número por 3^2. Justifique a resposta. R: $2012 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3 + 2 = 2 \cdot 3^3 + 5 = \dot{3}^2 + 5$ *logo o resto é* 5 *escrito no sistema de base* 10 *ou* $12_{(3)}$.

1362 — Diga como construia um triângulo sendo dados os comprimentos de dois lados e da mediana que partem de um mesmo vértice. (Principie por considerar apenas dados os comprimentos dos lados, e, fixando um dêles, veja qual é o lugar geométrico dos meios do 3.º lado. R: *Consideremos um dos lados dado* AB *em que* A *é o vértice pelo qual passam a mediana e o outro lado* AC. *O lugar geométrico das posições que pode ocupar o terceiro vértice* C *é*



uma circunferência de centro A *e raio* AC. *Por outro lado, considerando tôdas as posições que pode ocupar* C, *o meio do terceiro lado descreve um lugar que é uma circunferência homotética da descrita pelo ponto* C, *de raio igual a metade de* AC *e centro o ponto médio de* AB. *Por outro lado o extremo da mediana dada descreverá uma circunferência de raio igual ao comprimento da mediana e centro em* A. *O encontro dos dois lugares que contêm o meio do terceiro lado define o ponto médio dêste, que com* B *determina o terceiro lado e conseqüentemente o triângulo.*

Soluções dos n.os 1357 a 1362 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 1

I

1363 — Calcule os valores a atribuir ao parâmetro *m* para que a desigualdade

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) < 0$$

seja verificada para todos os valores reais atribuídos a x. R: *Para que a desigualdade seja veri-*

ficada para todos os valores reais atribuidos a x, *deverão as raízes do trinómio ser imaginárias e o coeficiente de* x^2 *ser negativo, isto é:*

$$\begin{cases} \Delta<0 \\ m+1<0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} (m-1)^2-3(m-1)(m+1)<0 \\ m+1<0 \end{cases}$$

donde: $\begin{cases} m^2+m-2>0 \\ m+1<0 \end{cases} \quad \begin{cases} m>1 \text{ e } m<-2 \\ m<-1 \end{cases}$

e portanto $\boxed{m<-2}$.

1364 — *a)* Defina arranjos de n objectos p a p. Considere formados os arranjos de ordem $p-1$; ¿cada um dêstes arranjos a quantos arranjos de ordem p dá origem? Justifique a sua resposta. R: *Chamam-se arranjos de* n *objectos, tomados* p *a* p, *aos grupos que se podem constituir com* p *dos* n *objectos dados, de modo que difiram uns dos outros quer pela ordem, quer pela natureza dos objectos que os constituem. Cada arranjo de ordem* p−1 *de* n *objectos, dá origem a* n−(p−1) *arranjos de ordem* p. *Com efeito, formados os arranjos de ordem* p−1, *para formar os arranjos de ordem* p, *basta colocar à sua direita um dos* n−(p−1) *objectos que nela não figuram.*

b) Supondo que $\operatorname{colog}\sqrt{N^3}=-3a$, diga qual é o $\log N$ e justifique a sua resposta. R: *De* $\operatorname{colog}\sqrt{N^3}=-3a$ *deduz-se* $3/2 \operatorname{colog} N=-3a$ $\operatorname{colog} N=-6a/3=-2a$ *e portanto* $\log N=2a$.

II

1365 — De um ponto P que dista 437,12 metros do centro O de uma circunferência de raio x igual a 144,5 metros, conduziram-se duas tangentes à referida circunferência. Calcule o ângulo θ formado por essas tangentes. Utilize logaritmos. R: *Tem-se* $r=\overline{OP}\cdot\operatorname{sen}\theta/2$ *ou* $\operatorname{sen}\theta/2=\frac{r}{\overline{OP}}=\frac{144{,}5}{437{,}12}$ *donde* $\log\operatorname{sen}\theta/2=\log 144{,}5+\operatorname{colog} 437{,}12=2{,}15987+\bar{3}{,}35940=\bar{1}{,}51927$, *e* $\theta/2=19^\circ\,18'\,13'',3$ *ou* $\theta=38^\circ\,36'\,26'',6$.

1366 — *a)* Calcule $\operatorname{sen}(1135^\circ\,30')$. Utilize as tábuas naturais. R: $\operatorname{sen}1135^\circ 30'=\operatorname{sen}55^\circ 30'=0{,}824$.

b) Verifique a identidade

$$\frac{2\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b\,.$$

R: $$\frac{2\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}=$$

$$=\frac{2(\operatorname{sen}a\cos b+\operatorname{sen}b\cos a)}{\cos a\cos b-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b+\cos a\cos b+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}=$$

$$=\frac{2(\operatorname{sen}a\cos b+\operatorname{sen}b\cos a)}{2\cos a\cos b}=\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b\,. \quad \text{c. q. d.}$$

III

1367 — Demonstre que se duas alturas de um triângulo são iguais, o triângulo é isósceles. R: *Sejam, com efeito,* h_a *e* h_b *as alturas referentes aos lados* a *e* b *do triângulo dado. A área do triângulo é, como se sabe,* $S=\frac{a}{2}\times h_a$ *ou* $S=\frac{b}{2}\times h_b$ *donde* $\frac{a}{2}\times h_a=\frac{b}{2}\times h_b$ *e, por ser* $h_a=h_b$, *se deduz* $\boxed{a=b}$.

1368 — Os catetos de um triângulo rectângulo medem respectivamente 3 centímetros e 4 centímetros. Calcule a *área lateral* do sólido gerado pela rotação do triângulo em tôrno do cateto maior, supondo que o *ângulo de rotação é de* 180°. R: *O sólido obtido é um semi-cone de geratriz igual à hipotenusa do triângulo dado* (5 cm) *e raio igual a* 3 cm. *Êste sólido é limitado por metade da superfície do cone de geratriz igual a* 5 cm *e raio da base igual a* 3 cm *e por um triângulo isósceles de base igual a* 6 cm *e altura igual a* 4 cm. *A sua área lateral será*

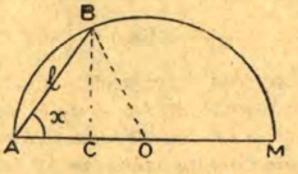
$$S=\frac{3{,}14\times3\times5}{2}+\frac{6\times4}{2}=1{,}57\times15+12=35{,}55\ \text{cm}^2\,.$$

Soluções dos n.os 1365 a 1368 de J. Calado.

I. S. C. E. F. — Exames de Aptidão — 9-10-1942

Ponto n.º 4

1369 — *a)* Defina as funções trigonométricas; dê as suas relações mais importantes; relacione as funções trigonométricas de dois ângulos cuja diferença seja $3\pi/4$. R: $\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)$; $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)$ *e* $\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$. *b)* Dados dois pontos A e B à distância l, faz-se passar por êles uma semi-circunferência de raio r. Seja O o centro da semi-circunferência, $\overline{AM}$ o diâmetro e tire-se $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{AM}$. Calcule, em função de l e do ângulo $x=\widehat{BAO}$, a área do triângulo BCO. R: $S=1/2\,\overline{BC}\times\overline{CO}=1/2\,\overline{BC}\,(r-\overline{AC})=1/2\cdot l\operatorname{sen}x\,(l/2\cdot\sec x-l\cos x)=l^2/4(\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}2x)$.

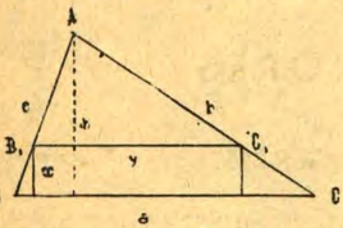


1370 — Calcule $(x+a)^4+(x-a)^4$. ¿A equação $(x+a)^4+(x-a)^4=0$ pode ter raízes reais? Porquê? (*a* é um número real qualquer). R: $(x+a)^4+(x-a)^4=2(x^4+6a^2x^2+a^4)$. $x^4+6a^2x^2+a^4=0 \rightarrow \rightarrow x=\pm\sqrt{-3a^2\pm\sqrt{9a^4-a^4}}=\pm a\sqrt{-3\pm\sqrt{8}}$. *A equação não tem raízes reais porque, qualquer que seja* a, *é sempre* $-3\pm\sqrt{8}<0$.

1371 — Calcule a área da esfera cujo volume é 1^{m3}. ¿ Se se opera com uma tábua de logaritmos de cinco decimais, que confiança merece o resultado? R: *Tem-se* $\frac{4}{3}\pi r^3=1$ *donde* $r=\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$. *Substituindo êste valor em* $S=4\pi r^2$ *vem* $S=4\pi\sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}}=\sqrt[3]{36}\cdot\pi$. *Portanto* $\log S=1/3(\log 36+\log\pi)=1/3(1,55630+0,49715)=0,68448$ *donde* $S=4,8359^{m2}$.

1372 — *a)* Defina simetria no plano e enuncie as propriedades que conhecer.

b) Dado um triângulo de lados *a*, *b* e *c*, calcule os lados *x* e *y* de um rectângulo inscrito nêle de modo tal que a soma dêsses lados seja um número dado *p*. R: *Tem-se* $x+y=p$. *Da semelhança dos triângulos*



ABC *e* AB_1C_1 *resulta* $\frac{a}{y}=\frac{h}{h-x}\rightarrow hy=a(h-x)$.

O sistema $\begin{cases} x+y=p \\ ax+hy=ah \end{cases}$ *resolve o problema e dêle se deduz* $x=\frac{h(p-h)}{h-a}$, $y=\frac{a(p-h)}{a-h}$. *Designando por* S *a área do triângulo e por* 2p′ *o perímetro* $(2p'=a+b+c)$ *tem-se, evidentemente* $S=ha/2=\sqrt{p'(p'-a)(p'-b)(p'-c)}$ *donde se deduz* h *em função de* a, b *e* c.

1373 — Ache um número inteiro de três algarismos sabendo que a soma dos dois primeiros é igual ao último e que o número dividido por 9 dá um cociente múltiplo de 9.

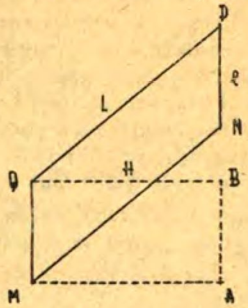
R: $\begin{cases} N=100a+10b+c=\dot{8}1 \\ b+c=a \end{cases}$ $\begin{cases} b+c=a \\ 101a=9(\dot{9}-b) \end{cases}$

$\begin{cases} b+c=a \\ a=9 \end{cases}$ $\begin{cases} a=9 \\ b=9,8,7,6,5,4,3,2,1,0 \\ c=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \end{cases}$

introduzindo a primeira condição vem $N=972$.

1374 — *a)* Defina e descreva alguns sólidos de revolução importantes.

b) Calcule a razão dos volumes dos sólidos gerados por um paralelogramo girando em tôrno de cada um dos seus lados. R: *Volume do sólido gerado pela revolução em tôrno de* l



$V_l=\pi/3\,H^2\cdot\overline{BP}+\pi\overline{MA}^2\cdot\overline{AB}-\pi/3\,\overline{MA}^2\cdot\overline{AN}=$
$=\pi\cdot H^2\cdot l$ *por ser* $H=\overline{MA}$ *e* $\overline{BP}=\overline{AN}$. *Volume do sólido gerado pela revolução em tôrno de* L $V_L=\pi\cdot h^2\cdot L$. *Razão dos volumes* $\frac{V_l}{V_L}=\frac{\pi H^2 l}{\pi h^2 L}=\frac{H^2 l}{h^2 L}$.

Soluções dos n.ºs 1369 a 1374 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico

1375 — Se a velocidade de um veículo aumentar de modo que as rodas em cada volta gastem menos um segundo, o tempo gasto num percurso diminuirá uma hora e meia. Sabendo que as rodas do veículo têm o raio igual a 40 centímetros, calcular a extensão daquêle percurso. R: *Qualquer que seja a velocidade do veículo, a extensão do percurso será* $2\pi Rn$, *sendo* n *o numero de voltas dadas pelas rodas e* R *o seu raio. Se por cada volta das rodas se gastou menos* 1 *segundo e se foi* 5400 *segundos* (=1h 30m) *o tempo gasto a menos no percurso total, o número* n *de voltas será* 5400; *portanto* $2\pi Rn=2\pi\cdot 40\cdot 5400$ cm $\cdot \sim 13,571$ km (*com* $\pi=3,1416$).

1376 — Mostre que se *a*, *b* e *c* são lados de um triângulo, o trinómio $a^2x^2+(b^2-a^2-c^2)x+c^2$ é positivo para todos os valores *x*. R: *Terá que ser:* $\Delta=(b^2-a^2-c^2)^2-4a^2c^2=(b^2-a^2-c^2-2ac)(b^2-a^2-c^2+2ac)=[b^2-(a+c)^2]\cdot[b^2-(a-c)^2]<0$.

De facto, por serem a, b *e* c *lados de um triângulo será:* $b<a+c$, $b>a-c$, *donde* $b^2-(a+c)^2<0$, $b^2-(a-c)^2>0$ *e portanto* $\Delta<0$.

1377 — Determinar os ângulos *B* e *C* de um triângulo rectângulo, sendo $\operatorname{tg} B/2\cdot\operatorname{tg} C/2=1/6$. R: *Como* $B+C=\pi/2$, $\operatorname{tg}B/2\cdot\operatorname{tg}C/2=\operatorname{tg}B/2\cdot\operatorname{tg}(\pi/4-B/2)=\operatorname{tg}B/2\cdot(1-\operatorname{tg}B/2)/(1+\operatorname{tg}B/2)=1/6$. *Por ser* $1+\operatorname{tg}B/2\neq 0$ *virá:* $6\operatorname{tg}^2B/2-5\operatorname{tg}B/2+1=0$ *donde* $\operatorname{tg}B/2=1/2$ *e* $\operatorname{tg}B/2=1/3$. *De* $\operatorname{tg}B/2=1/2$ *vem* $\log\operatorname{tg}B/2=\operatorname{colog}2=\bar{1},69897$ *donde* $B=53^{\circ}\,7'\,48'',75$

e $C=90^o-B=36^o\,52'\,11'',25$. *Seria fácil ver que a equação* $\operatorname{tg} B/2=1/3$ *conduz a* $B=36^o\,52'\,11'',25$ *e* $C=53^o\,7'\,48'',75$.

1378 — A área da corôa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um hexágono regular é igual a $31,4\ cm^2$. Determinar a área do hexágono. R: *Sendo* R *e* r $(R>r)$ *os raios das circunferências que limitam a corôa circular, a sua área será:* $\pi(R^2-r^2)=31,4\,cm^2$ *donde* $R^2-r^2=10\,cm^2$ (*com* $\pi=3,14$). *O lado do hexágono é* R *e o seu apótema* r. *É fácil ver que* $r^2=R^2-R^2/4$, $r=R\sqrt{3}/2$ *e portanto* $R^2-r^2=1/4\cdot R^2=10\ cm^2$, $R=2\sqrt{10}$ cm. *A área do hexágono será pois* $S=60\sqrt{3}\ cm^2$.

1379 — Inscrever numa circunferência de raio R um triângulo isósceles tal que a base seja m/n da altura. R: *É fácil ver que em tal triângulo se verificará a relação* $R^2=(h-R)^2+(b/2)^2$, *sendo* h *a altura e* b *a sua base. Atendendo a que* $b=m/n\cdot h$, *virá:* $(m^2+4n^2)/4n^2\cdot h^2-2Rh=0$ *donde* $h=0$, *solução sem interêsse e* $h=8Rn^2/(m^2+4n^2)$.

1380 — Dado um tetraedro regular de aresta a, tirar, por uma das arestas, um plano que divida o tetraedro em duas partes cujos volumes estejam na razão $1/2$. R: *A solução é evidente. Com efeito, visto que o plano passa por uma das arestas, o tetraedro dado ficará dividido noutros dois tetraedros não regulares com a mesma altura do proposto; portanto a razão dos seus volumes* V_1 *e* V_2, *será a razão das áreas das suas bases* B_1 *e* B_2. *As suas bases serão dois triângulos cujas alturas são iguais à altura do triângulo equilátero, base do tetraedro dado; portanto a razão das suas áreas será a razão das suas bases* b_1 *e* b_2. *Logo* $V_1/V_2=B_1/B_2=b_1/b_2=1/2$. *Trata-se pois de fazer passar um plano por uma aresta do tetraedro regular e pelo ponto que divide a aresta oposta em dois segmentos de razão* $1/2$. *Como há dois pontos nestas condições, o problema admite duas soluções. São dois planos simétricos em relação ao plano que passa pela mesma aresta e pelo ponto médio da aresta oposta.*

Soluções dos n.os 1375 a 1380 de O. Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência

ALGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **1.º exame de freqüência, 1943.**

I

1381 — Derive $y=(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-e^{\sqrt[3]{-x}}}$.

1382 — Primitive

$$y=\frac{2x}{1+\cos 2x}+\frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}-\frac{x^3}{x^2-1}.$$

1383 — Forme a razão incremental, de $\dfrac{1}{f(x)}$ relativamente ao valor $x=a$ $(f(a)\neq 0)$ e prove a sua convergência, supondo que $f'(a)$ existe.

II

1384 — Como são constituídas as secções de números racionais de que $\sqrt[51]{3}$ é fecho comum?

1385 — $\sqrt[51]{3}$ é racional ou irracional? Porquê?

1386 — Se $u_n\to-\infty$ e $v_n\to 2$, $e^{u_n v_n}\to$?

1387 — Quando z descreve a recta que passa pelos afixos de $z'=1$ e $z''=-i$, entre que limites varia o seu argumento principal?

1388 — Quais são (entre 0 e 2π) os argumentos das raízes cúbicas de i^9?

1389 — Que é o círculo de convergência de uma série de potências $\Sigma a_n z^n$? Que valor tem o raio dêsse círculo?

1390 — Pode dar-se o caso de a série divergir num ponto da circunferência dêsse círculo, sendo absolutamente convergente noutro ponto da mesma linha? Porquê?

1391 — De que grau é a derivada de ordem k de um polinómio de grau n?

1392 — Se $\varphi(x)>0$ e $\psi(x)$ forem funções contínuas no ponto a, $[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ também é contínua nêsse ponto? Porquê?

1393 — Se duas funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ diferem por um polinómio do 2.º grau, qual a diferença das suas primitivas?

III

1394 — Trocando numa dada série cada têrmo u_{2n} com o termo u_{2n+1}, vem uma série da mesma natureza? Porquê?

1395 — Sejam $P_0\,P_1\,P_2\,P_3$ os afixos das raízes quartas de certo número A. Imprima-se ao qua-