e $C=90^\circ-B=36^\circ\,52'\,11'',25$. *Seria fácil ver que a equação* $\operatorname{tg} B/2=1/3$ *conduz a* $B=36^\circ\,52'\,11'',25$ *e* $C=53^\circ\,7'\,48'',75$.

1378 — A área da corôa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um hexágono regular é igual a $31{,}4\ \mathrm{cm}^2$. Determinar a área do hexágono. R: *Sendo* R *e* r $(R>r)$ *os raios das circunferências que limitam a corôa circular, a sua área será:* $\pi(R^2-r^2)=31{,}4\,\mathrm{cm}^2$ *donde* $R^2-r^2=10\,\mathrm{cm}^2$ (*com* $\pi=3{,}14$). *O lado do hexágono é* R *e o seu apótema* r. *É fácil ver que* $r^2=R^2-R^2/4$, $r=R\sqrt{3}/2$ *e portanto* $R^2-r^2=1/4\cdot R^2=10\ \mathrm{cm}^2$, $R=2\sqrt{10}\ \mathrm{cm}$. *A área do hexágono será pois* $S=60\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

1379 — Inscrever numa circunferência de raio R um triângulo isósceles tal que a base seja m/n da altura. R: *É fácil ver que em tal triângulo se verificará a relação* $R^2=(h-R)^2+(b/2)^2$, *sendo* h *a altura e* b *a sua base. Atendendo a que* $b=m/n\cdot h$, *virá:* $(m^2+4n^2)/4n^2\cdot h^2-2Rh=0$ *donde* $h=0$, *solução sem interêsse e* $h=8Rn^2/(m^2+4n^2)$.

1380 — Dado um tetraedro regular de aresta a, tirar, por uma das arestas, um plano que divida o tetraedro em duas partes cujos volumes estejam na razão $1/2$. R: *A solução é evidente. Com efeito, visto que o plano passa por uma das arestas, o tetraedro dado ficará dividido noutros dois tetraedros não regulares com a mesma altura do proposto; portanto a razão dos seus volumes* V_1 *e* V_2, *será a razão das áreas das suas bases* B_1 *e* B_2. *As suas bases serão dois triângulos cujas alturas são iguais à altura do triângulo equilátero, base do tetraedro dado; portanto a razão das suas áreas será a razão das suas bases* b_1 *e* b_2. *Logo* $V_1/V_2=B_1/B_2=b_1/b_2=1/2$. *Trata-se pois de fazer passar um plano por uma aresta do tetraedro regular e pelo ponto que divide a aresta oposta em dois segmentos de razão* $1/2$. *Como há dois pontos nestas condições, o problema admite duas soluções. São dois planos simétricos em relação ao plano que passa pela mesma aresta e pelo ponto médio da aresta oposta.*

Soluções dos n.os 1375 a 1380 de O. Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

Exames de freqüência

ALGEBRA SUPERIOR - MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **1.º exame de freqüência, 1943.**

I

1381 — Derive $y=(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-e^{\sqrt[3]{-x}}}$.

1382 — Primitive
$$y=\frac{2x}{1+\cos 2x}+\frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}-\frac{x^3}{x^2-1}.$$

1383 — Forme a razão incremental, de $\dfrac{1}{f(x)}$ relativamente ao valor $x=a$ $(f(a)\neq 0)$ e prove a sua convergência, supondo que $f'(a)$ existe.

II

1384 — Como são constituídas as secções de números racionais de que $\sqrt[51]{3}$ é fecho comum?

1385 — $\sqrt[51]{3}$ é racional ou irracional? Porquê?

1386 — Se $u_n\to-\infty$ e $v_n\to 2$, $e^{u_n v_n}\to$?

1387 — Quando z descreve a recta que passa pelos afixos de $z'=1$ e $z''=-i$, entre que limites varia o seu argumento principal?

1388 — Quais são (entre 0 e 2π) os argumentos das raízes cúbicas de i^9?

1389 — Que é o círculo de convergência de uma série de potências $\Sigma a_n z^n$? Que valor tem o raio dêsse círculo?

1390 — Pode dar-se o caso de a série divergir num ponto da circunferência dêsse círculo, sendo absolutamente convergente noutro ponto da mesma linha? Porquê?

1391 — De que grau é a derivada de ordem k de um polinómio de grau n?

1392 — Se $\varphi(x)>0$ e $\psi(x)$ forem funções contínuas no ponto a, $[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ também é contínua nêsse ponto? Porquê?

1393 — Se duas funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ diferem por um polinómio do 2.º grau, qual a diferença das suas primitivas?

III

1394 — Trocando numa dada série cada têrmo u_{2n} com o termo u_{2n+1}, vem uma série da mesma natureza? Porquê?

1395 — Sejam $P_0\,P_1\,P_2\,P_3$ os afixos das raízes quartas de certo número A. Imprima-se ao quadrado daqueles pontos uma rotação de amplitude $\varpi>0$ em tôrno do centro. Que representam os novos pontos $Q_0\,Q_1\,Q_2\,Q_3$?

1396 — Demonstre a igualdade

$$sh(a+b)=sha\cdot chb+shb\cdot cha\,.$$

F. C. P. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **2.º Exame de freqüência, Maio de 1942**

Ponto n.º 1

1397 — Resolver a equação $3x^5-2x^4-3x+2=0$. R: *Admite as raízes* 1 *e* -1. *Baixando o grau temos* $3x^3-2x^2+3x-2=0$. *Fazendo* $y=3x$ *vem:* $y^3-2y^2+9y-18=0$. *Admite as raízes* 2 *e* $\pm 3i$. *Soluções:* $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=2/3$; $x_4=i$; $x_5=-i$.

1398 — Achar a equação do lugar geométrico dos pés das perpendiculares tiradas do ponto $(1,2)$ sôbre as rectas cuja distância ao centro da circunferência $x^2+y^2-2y-3=0$ é igual a metade do raio da mesma. R: *Temos* $R=2$. *Designando por* $Ax+By+C=0$ *a equação da recta vem:* $B+C=\sqrt{A^2+B^2}$ *ou* $C^2+2BC-A^2=0$. *Equações da perpendicular* $\left\{\begin{array}{l} Bx-Ay+2A-B=0 \\ Ax+By+C=0. \end{array}\right.$ *Obtém-se o seguinte:* $y^2+2x^2-4y-3x+5=0$.

1399 — Dada a cónica $2x^2-y^2+xy-x=0$ determinar: *a)* Os diâmetros principais. *b)* As assíntotas. *c)* O polo do eixo OX. R: a) *As equações dos diâmetros principais são:* $(1+\sqrt{10})\,x+(7-2\sqrt{10})\,y=1$ *e* $(1-\sqrt{10})\,x+(7+2\sqrt{10})\,y=1$. b) *As equações das assintotas são:* $y-1/9=2(x-2/9)$ *e* $y-1/9=-(x-2/9)$. c) *O polo é o ponto* $(0,1)$.

1400 — Mostrar que os planos $2x+ay+z-a=0$ passam pela mesma recta. Determinar os cosenos directores dessa recta. ¿Que valor se deve atribuir a a para que o plano correspondente seja perpendicular ao plano $3x-y+4z-2=0$? R: $\cos\alpha=-1/\sqrt{5}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=2/\sqrt{5}$; $a=10$.

Soluções dos n.os 1397 a 1400 de J. Rios de Sousa.

I. S. C. E. F. — 1.ª CADEIRA — **2.º Exame de Freqüência — Extraordinário, 23-VI-42.**

1401 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=\log(1-x^2)$. Utilisar o seu desenvolvimento em série para o cálculo do valor da função para $x=1/3$ com um êrro superior a 10^{-4}. R: *A função é definida no campo real verificada a condição* $1-x^2>0$; *o seu domínio é, portanto, o intervalo aberto* $(-1,+1)$ *e o contra-domínio o intervalo aberto à esquerda* $(-\infty,0)$. *A função é par, a sua imagem geométrica admite como eixo de simetria o eixo* Oy. *A origem é um ponto de máximo, como se reconhece imediatamente. A função não admite outros máximos ou mínimos; com efeito, tem-se* $y'=-2x/(1-x^2)$. *Por ser* $y''=\dfrac{-2\,(1+x^2)}{(1-x^2)^2}>0$ *qualquer que seja* x *real, a imagem da função tem sempre a concavidade voltada no sentido dos* yy *negativos e não tem pontos de inflexão. Os pontos* $x=\pm 1$ *são pontos de descontinuïdade, visto que não existem os limites* $\lim\limits_{x\to -1-0} y$ *e* $\lim\limits_{x\to 1+0} y$, *e tem-se* $\lim\limits_{x\to -1+0} y=-\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to 1-0} y=-\infty$. *É sabido que* $\log(1-x)=-x-x^2/2-\cdots x^n/n-\cdots$ *e, portanto,* $\log(1-x^2)=-x^2-x^4/2-\cdots-x^{2n}/n-\cdots$. *Para* $x=1/3<1$ *será* $\log\left(1-\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{9}-\frac{1}{2\cdot 3^4}-\cdots-\frac{1}{n\cdot 3^{2n}}-\cdots$. *A convergência desta série pode ser verificada pelo critério d'Alembert e, por conseqüência* (V. «Gazeta de Matemática» n.º 11), *tem-se* $-\dfrac{1}{(p+1)\,3^{2p+2}}-\dfrac{1}{(p+2)\,3^{2p+4}}-\cdots\leq\dfrac{1}{p\cdot 3^{2p}}\,[k+k^2+\cdots]$, *onde* $k=\dfrac{p\cdot 3^{2p}}{(p+1)3^{2p+2}}$, *ou* $\leq\dfrac{1}{p3^{2p}}\cdot\dfrac{k}{1-k}=\dfrac{1}{(p+1)3^{2p+2}-p\cdot 3^{2p}}$. *Se considerarmos três termos da série, cometeremos um êrro sistemático inferior a* $1/24057$. *Se efectuarmos o cálculo de cada um dêstes três termos até à quinta casa dècimal, cometeremos êrros de cálculo tais que a soma dos seus módulos é inferior a* $3/100000$. *Logo,* $\log\left(1-\frac{1}{9}\right)\simeq-0,11111-0,00617-0,00045=-0,1177$.

1402 — Resolver a equação $2x^5-6x+3=0$. Utilisar o método gráfico para a localização das raízes irracionais e determiná-las com um êrro inferior a 10^{-2}. R: *A equação pode pôr-se sob a forma* $2x^5=6x-3$. *As suas raízes reais serão as abscissas dos pontos de intersecção das curvas* $y=2x^5$ *e* $y=6x-3$. *A equação admite duas raízes positivas e uma negativa, que pertencem aos intervalos* $(0,1)$ $(1,2)$ $(-2,-1)$. *As outras duas raízes são complexas conjugadas. As três raízes reais não são inteiras. Também não são fraccionárias, porque a equação não é satisfeita para* $x=\pm 1/2$, $\pm 3/2$, *únicos números fraccionários que poderiam ser suas raízes.*

Uma tábua de potências e uma máquina de calcular permitem a construção dos quadros de que se deduziria $-1,41<x_1<1,40$, $0,51<x_2<0,52$ *e* $1,13<x_3<1,14$.

1403 — Dada função $z = \log(x^2+y^2) + \operatorname{arctg} y/x$ calcular as suas derivadas de 1.ª e 2.ª ordens.

R:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{2x-y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x+2y}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2+2xy-4x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2-4xy-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-xy-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Soluções dos n.ºs 1401 a 1403 de A. Sá da Costa.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de freqüência, Março 1942

Ponto n.º 4

1404 — Verifique a identidade vectorial: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})^2 + (\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 = 2(\mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2)$. Traduzirá alguma propriedade do paralelogramo? R: *A identidade verifica-se imediatamente. Com efeito, é* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2+2\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *e* $(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2-2\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *e notando que* $\operatorname{mod}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ *e* $\operatorname{mod}(\mathbf{u}-\mathbf{v})$ *são as medidas das diagonais do paralelogramo construido sôbre* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$, *a propriedade referida pode enunciar-se: «a soma dos quadrados das diagonais é igual ao dôbro da soma dos quadrados dos lados».*

1405 — Construa o produto das n determinações de $\sqrt[n]{A}$ $(A>0)$. Tenha em atenção a paridade de n. R: *Seja* $\alpha_k = \sqrt[n]{A}$ $(k=0,1,2,\cdots n-1)$. *Tem-se* $\alpha_k = (\sqrt[n]{A})\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$. *O produto dos módulos de* α_k *é, evidentemente,* A; *a soma dos argumentos é* $0+\frac{2\pi}{n}+\frac{4\pi}{n}+\cdots+\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}(1+2+\cdots+n-1) = (n-1)\pi$. *Se* n *é impar o produto* $\Pi\alpha_k$ *tem o valor* A *e se* n *for par o valor* $-$A.

1406 — Dados a recta r e o plano π de equações: $r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ e $\pi \equiv x+y+z=1$ determine a equação do plano que passa por r e é perpendicular a π e a do que passa pela mesma recta e faz o menor ângulo com π. R: *A equação do feixe de planos de eixo* r *é* $x-2+\lambda(y-3)=0$; *para o plano desta família perpendicular a* π *tem-se* $1+\lambda=0$ *e portanto a equação* $x-y+1=0$. *O ângulo* φ *de* r *com* π *é dado por* $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\mathbf{n}\times\mathbf{r}}{\operatorname{mod}\mathbf{n}\cdot\operatorname{mod}\mathbf{r}}$ *sendo* $\mathbf{n}$ *o vector de* π $\mathbf{n}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\operatorname{mod}\mathbf{n}=\sqrt{3}$ *e* $\mathbf{r}$ *o vector de* r, $\mathbf{r}=\mathbf{k}$, $\operatorname{mod}\mathbf{r}=1$. *Tem-se então* $\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{3}/3$ *ou* $\cos\varphi=\sqrt{2/3}$. *Para a plano que faz o menor ângulo com* π *tem de determinar-se* λ *de modo que* $\frac{1+\lambda}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+\lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ *donde* $\lambda^2-2\lambda+1=0$ *ou* $\lambda=1$. *O plano pedido tem pois por equação* $x+y-5=0$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de freqüência, 25 de Fevereiro de 1942.

Ponto n.º 1

1407 — Designando por α_1, α_2 e α_3 os valores por ordem crescente dos argumentos de $\sqrt[3]{1}$, desenvolver o determinante: $D(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & x^2 \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ -1 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix}$ e calcular $D(\alpha_2)$. R: *Tem-se* $D(x) = \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ *e* $D(\alpha_2) = \alpha_2^3 - \alpha_3\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$, *atendendo a que* $\alpha_2^3=1$ *e a que* $\alpha_1=1$.

1408 — São dados os vectores: $P-O = \mathbf{i}+3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $Q-O=2\mathbf{j}$, $R-O=\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Determinar o volume do tetraedro $[OPQR]$, a área da face oposta ao vértice O e as equações das faces. Pela projecção de P sôbre o plano $z=0$ conduzir uma recta que determine com os eixos OX e OY um triângulo de área 8. (O é a origem do referencial). R: *Vol.* $[OPQR] = \frac{1}{6}(P-O)\times(Q-O)\wedge(R-O) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2/3$. *Área* $[PQR] = 1/2\cdot\operatorname{mod}[(P-Q)\wedge(R-Q)] = \sqrt{30}/2$ *visto que* $P-Q=\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $R-Q=-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ *e* $(P-Q)\wedge(R-Q) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$. *As coordenadas dos vértices são* $O(0,0,0)$, $P(1,3,3)$, $Q(0,2,0)$ *e* $R(0,1,2)$, *a equação da face* OQR *é* $x=0$ *e a da face* PQR *é* $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. *A projecção de* P *sôbre* $z=0$ *é o ponto* $P'(1,3,0)$ *ou simplesmente* $P'(1,3)$. *Trata-se de um problema de geometria plana.*

Seja $x/p+y/q=1$ *a equação procurada. Temos* $\pm 8 = pq/2$ *e* $1/p+3/q=1$, *sistema que fornece as soluções pedidas.*

Soluções dos n.ºs 1404 a 1408 de M. Zaluar.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — Cálculo — 2.º exame de freqüência, 1941-42

1409 — Integrar o sistema $y''+5y-3z=e^x$, $z'+6y-4z=x$. R: *Aplicando o símbolo* D *vem:* $y=\frac{-3e^x+3x}{D^3-4D^2+5D-2}$ *e integrando vem:* $y=C_1e^x+$ $+C_2xe^x+C_3e^{2x}+3/2\cdot x^2e^x-3/2\cdot x-15/4$ *e* $z=(2C_1+2/3\cdot C_2)e^x+2C_2xe^x+3C_3e^{2x}+3x^2e^x+$ $+2x^2e^x+2/3\cdot e^x-5/2\cdot x-25/4$.

1410 — Calcular $\iint\limits_D dx\,dy$. O domínio D é limitado pelas linhas $y=-x/2+1$, $y=x+1$ e $y=2(2-x)$. R: $I=\int_0^1 dx\int_{1-x/2}^{1+x}dy+\int_1^2 dx\int_{1-x/2}^{4-2x}dy=3/2$.

1411 — Determinar a tangente à linha x^3+xy^2- $-2y^2=0$ na origem.

1412 — Determinar a evoluta da linha $y=x^2/2$.

1413 — Determinar a subtangente da linha $x=t^t$; $y=\operatorname{sen}\pi t/2+t$ no ponto correspondente a $t=1$.

1414 — Determinar os pontos de inflexão da linha $y=\operatorname{sen}x+\cos x$.

1415 — Determinar as assíntotas da linha $\rho=\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

1416 — Integrar a equação $y'^2-xy'+y=0$ e determinar a solução singular.

Soluções dos n.os 1409 e 1410 de J. Rios de Sousa.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — 2.º exame de freqüência, 1943

Ponto n.º 1

1417 — Integrar a equação $(x^2-1)y'-2y=1$, e determinar o raio de curvatura, na origem, da linha integral que passa por êste ponto. R: *Pode integrar-se por separação de variáveis:* $\frac{dy}{2y+1}-$ $-\frac{dx}{x^2-1}=0$; *o integral geral é* $2y+1=C\frac{x-1}{x+1}$. *Para* $x=y=0$, *vem* $C=-1$; *a linha integral que passa pela origem tem, pois, para equação* $2y+1=$ $=\frac{1-x}{1+x}$. *Como* $y_0'=-1$, $y_0''=2$, *vem* $R_0=\sqrt{2}$.

1418 — Integrar o sistema $\begin{cases} y'+z=\operatorname{tg}^2x \\ z''-z'+y+z=\operatorname{tg}x, \end{cases}$ e determinar o plano osculador no ponto $(0,2,-1)$ da linha integral que passa por êste ponto. R: *Usando o símbolo* D, *fica* $\begin{cases} Dy+z=\operatorname{tg}^2x \\ y+(D^2-D+1)z=\operatorname{tg}x; \end{cases}$ *eliminando* y, *vem* $(D^3-D^2+D-1)z=1$, *cujo integral geral é* $z=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\operatorname{sen}x-1$; *e, portanto,* $y=-C_1e^x+C_3\cos x-C_2\operatorname{sen}x+1+\operatorname{tg}x$. *As condições iniciais dão-nos* $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=1$; *a linha integral tem, pois, para equações* $\begin{cases} y=\cos x+\operatorname{tg}x+1 \\ z=\operatorname{sen}x-1 \end{cases}$; *donde* $\begin{cases} y_0'=1 \\ z_0'=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y_0''=-1 \\ z_0''=0 \end{cases}$. *A equação do plano osculador é* $x-z=1$.

1419 — Calcular $\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx\,dy$. O domínio D é limitado pela curva $\rho=\theta\ (0\le\theta\le\pi/2)$ e pelo eixo dos yy. R: *Temos, em coordenadas polares* $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$, $I=\iint\limits_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx\,dy=\iint\limits_D\rho\cos 2\theta\,d\rho\,d\theta=$ $=\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta\,d\theta\int_0^\theta\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\theta^2\cos 2\theta\,d\theta$; *integrando por partes vem* $I=-\pi/8$. *Podíamos integrar em primeiro lugar em ordem a* θ; *e, então,*

$$I=\iint\limits_D\rho\cos 2\theta\,d\rho\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\rho\,d\rho\int_\rho^{\pi/2}\cos 2\theta\,d\theta=$$
$$=-1/2\int_0^{\pi/2}\rho\operatorname{sen}2\rho\,d\rho=-\pi/8.$$

1420 — Sejam $x=\frac{\cos u}{2}$, $y=\frac{\operatorname{sen}u}{2}$, $z=\frac{\sqrt{3}u}{2}$ as equações da linha (L) e sôbre a binormal em M marque-se um segmento MP de comprimento constante l. Determinar o ângulo θ que a tangente em M à curva (L) faz com a tangente em P à linha (c) lugar dos pontos P. R: *A linha* (L) *é uma hélice em que* $u=s$. *Teremos em notação vectorial:* $\mathbf{P}=\mathbf{M}+l\mathbf{b}$; *atendendo à segunda fórmula de Frenet, vem* $\frac{d\mathbf{P}}{ds}=\mathbf{t}+l\frac{\mathbf{n}}{T}$; *donde* $\frac{d\mathbf{P}}{ds}\,|\,\mathbf{t}=\mathbf{t}\,|\,\mathbf{t}+\frac{l}{T}\mathbf{n}\,|\,\mathbf{t}=1$. *Temos, pois,* $\frac{dP}{ds}\cos\theta=1$, *sendo* $\left(\frac{dP}{ds}\right)^2=1+\frac{l^2}{T^2}$. *Como* $T=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, *vem finalmente* $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{4+3l^2}}$.

Soluções dos n.os 1417 a 1420 de A. Pereira Gomes.

I. S. T. — Cálculo — 2.º exame de freqüência, 1942-43

1421 — Dadas as três funções $P=xy$, $Q=yz$, $R=zx$, verificar o teorema de Ostrogradski no cilindroide limitado pelo plano xy, pela superfície cilíndrica $x^2+y^2=1$ e pelo hemisfério superior da esfera $x^2+y^2+(z-4)^2=1$.

R: $\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$; $\iiint_V (y+z+x)\,dx\,dy\,dz = \iint_S (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + zx\cos\gamma)\,dS$ *onde* V *e* S *são o volume e a superfície do cilindroide definido no enunciado. Tem-se* $\iiint_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V_1} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{V_2} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ *onde* V_1 *é o volume do cilindro definido por* $z=0$, $z=4$, $x^2+y^2=1$ *e* V_2 *o do hemisfério definido por* $z=4$, $x^2+y^2+(z-4)^2=1$. *Tem-se*

$$\iiint_{V_1} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{A_1} x\,dx\,dy \int_0^4 dz + \iint_{A_1'} y\,dy\,dz \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} dx + \iint_{A_1''} z\,dx\,dz \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dx = 4\iint_{A_1} x\,dx\,dy + 2\iint_{A_1'} y\sqrt{1-y^2}\,dy\,dz + 2\iint_{A_1''} z\sqrt{1-x^2}\,dx\,dz$$

onde A_1, A_1', A_1'' *são as áreas limitadas por* $x^2+y^2=1$; $y=\pm 1$; $z=0$; $z=4$ *e* $x=\pm 1$, $z=0$, $z=4$, *respectivamente. Anàlogamente*

$$\iiint_{V_2} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{A_2} x\,dx\,dy \int_4^{4+\sqrt{1-x^2-y^2}} dz + \iint_{A_2'} y\,dy\,dz \int_{-\sqrt{1-y^2-(z-4)^2}}^{+\sqrt{1-y^2-(z-4)^2}} dx + \iint_{A_2''} z\,dx\,dz \int_{-\sqrt{1-x^2-(z-4)^2}}^{+\sqrt{1-x^2-(z-4)^2}} dy = \iint_{A_2} x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy + 2\iint_{A_2'} y\sqrt{1-y^2-(z-4)^2}\,dy\,dz + 2\iint_{A_2''} z\sqrt{1-x^2-(z-4)^2}\,dx\,dz.$$

Por outro lado, tem-se $\iint_S (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + zx\cos\gamma)\,dS = \iint_{S_1} (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + zx\cos\gamma)\,dS_1 + \iint_{S_2} (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + zx\cos\gamma)\,dS_2$ *onde* S_1 *é a superfície do cilindro definido por* $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=4$ *e* S_2 *a do hemisfério superior de* $x^2+y^2+(z-4)^2=1$ *e* $z=4$. *Tem-se*

$$\iint_{S_1} (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + zx\cos\gamma)\,dS_1 = 2\iint_{A_1'} y\sqrt{1-y^2}\,dy\,dz + 2\iint_{A_1''} z\sqrt{1-x^2}\,dx\,dz + 4\iint_{A_1} x\,dx\,dy$$

$$\iint_{S_2} (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + zx\cos\gamma)\,dS_2 = 2\iint_{A_2'} y\sqrt{1-y^2-(z-4)^2}\,dy\,dz + 2\iint_{A_2''} z\sqrt{1-x^2-(z-4)^2}\,dx\,dz + \iint_{A_2} x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

onde A_1, A_1', A_1'', A_2, A_2' *e* A_2'' *são as áreas já definidas.*

1422 — Calcular o volume limitado pela esfera de raio 3 e de centro na origem, pelo plano xy e pela superfície cilíndrica $x^2(x^2+y^2)=9(x^2-y^2)$.

R: $V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_A dx\,dy \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{+\sqrt{9-x^2-y^2}} dz = 2\iint_A \sqrt{9-x^2-y^2}\,dx\,dy$ *onde* A *é a área limitada por* $x^2(x^2+y^2)+9(y^2-x^2)=0$;

$$V = \int_{-3}^{+3} dx \int_{-x\sqrt{\frac{9-x^2}{9+x^2}}}^{+x\sqrt{\frac{9-x^2}{9+x^2}}} \sqrt{9-x^2-y^2}\,dy.$$

1423 — Integrar a equação $(x^2+2x)y'' - (2+2x)y' + 2y = (x^2+2x)^2$ sabendo que é $y = c_1x^2 + c_2(1+x)$ o integral geral da equação homogénea correspondente. R: *A equação admite um integral particular da forma* $Y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = x^4/6 + 2x^3/3$. *O integral geral é* $y+Y$.

1424 — Determinar as curvas planas cujo raio de curvatura é inversamente proporcional à raiz quadrada da derivada (em ordem à abscissa) do coeficiente angular da tangente. R: *O problema reduz-se à integração da equação diferencial* $\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\cdot\sqrt{y''} = k$ *ou* $(1+y'^2)^3 = k^2 y''$ *que, mediante a mudança* $y'=z$, *se converte em* $(1+z^2)^3 = k^2 z'$, *equação de variáveis separáveis.*

Soluções dos n.os 1421 a 1424 de A. Sá da Costa.

F. C. P. — Análise Superior — 3.º exercício de repetição, 5 de Fevereiro de 1943

1425 — Determinar uma função analítica tal que a parte real seja: $\varphi = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ e que tome o valor -1 para $z = i$. R: $z^2 + \log z - i\pi/2$.

1426 — Calcular $\int_c \frac{dz}{z^2(z+1)\sqrt{z+3}}$ ao longo duma circunferência de raio 2 e centro 0. R: $2i\pi\left(-\frac{7}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1427 — Calcular, aproveitando a teoria dos resíduos o seguinte integral: $\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1+x^2}dx$. Lembra-se que $z^{1/2} = \rho^{1/2} e^{1/2 \cdot i \cdot (\theta+2k\pi)}$ e que 0 é um ponto crítico da função. R: $-\pi/\sqrt{2}$.

Soluções dos n.[os] 1425 a 1427 de J. Rios de Sousa.

MECÂNICA RACIONAL - FÍSICA MATEMÁTICA - ASTRONOMIA

I. S. T. — Mecânica Racional — 2.º exame, 1942

1428 — Quando é que excepcionalmente não existe, no movimento instantâneo dum sólido, um só ponto de aceleração nula?

1429 — Um fio flexível e inextensível, pesado e homogéneo, de comprimento dado, é suspenso, uma primeira vez, pelas suas extremidades, em dois pontos A e B situados à mesma altura. O mesmo fio é suspenso, uma segunda vez, pelas suas extremidades, nos pontos A e B e pelo seu meio no ponto C que é o meio do segmento $\overline{AB}$. Mostrar que, no segundo caso, as tensões das duas catenarias, em A e B, fazem, com a vertical, o mesmo ângulo que faziam as da catenária primitiva; e que a sua grandeza comum é metade da grandeza das tensões da primeira catenária.

1430 — Conhecidos os eixos principais de inércia, em relação a um ponto O, determinar os pontos do espaço em relação aos quais os eixos principais são paralelos àqueles. Discussão.

1431 — Um ponto pesado é obrigado a mover-se, sem atrito, sôbre uma superfície cilíndrica de geratrizes verticais. Qualquer que seja a secção recta da superfície cilíndrica, a trajectória do ponto é tal que a sua transformada, na planificação da superfície, é uma parábola.

F. C. P. — Física Matemática — 2.º exame de freqüência, 21 de Maio de 1942

1432 — Seja $f(x)$ uma função mensurável em R_1 e E um conjunto mensurável -L arbitrário. 1) A que condições se deve sugeitar $f(x)$ para que a função de conjunto $\mu(E) = L\int_E f(x)\,dx$ se possa identificar com uma medida (exterior) de E? R: *A função* $f(x)$ *deve ser uma função mensurável, satisfazendo a* $|\underset{x}{E}[f(x)<0]| = 0$. 2) Será possível escrever todo o conjunto E como soma dum número finito ou infinito numerável de conjuntos E_i de medida μ finita? R: *Aproveite-se a possibilidade de decompor o conjunto* E *numa soma de conjuntos* $E = \sum_{j=1}^{\infty} G_j$ *disjuntos, mensuráveis e de medida* L *finita; e atenda-se a que é possivel escrever o mesmo conjunto* E *do seguinte modo* $E = \sum_{n=1}^{\infty} E \cdot \underset{x}{E}[n-1 \leq f(x) < n] = \sum_{i=1}^{\infty} H_i$. *A solução do problema é então* $E = \sum_{j,i=1}^{\infty} G_j \cdot H_i$ *visto que no conjunto da medida* L *finita,* $G_j \cdot H_i$, *a função* $f(x)$ *é limitada.* 3) A que condição satisfazem duas funções $f(x)$ e $g(x)$ que conduzem à mesma medida μ? R: *As duas funções devem ser equivalentes.* 4) Supondo que $f(x)$ é somável em R_1, mostrar que para todo o número arbitrário η se pode determinar um conjunto aberto G satisfazendo às duas seguintes condições: $G \supset E$ e $L\int_{G-E} f(x)\,dx < \eta$. R: *Se assim não fôsse. construir-se-ia uma sucessão de conjuntos* G_n *satisfazendo a* $G_n \supset E$, $|G_n - E| < \varepsilon_n$ *e* $L\int_{G_n-E} f(x)\,dx > \eta$ *e nesse caso ter-se-ia por passagem ao limite* $\int_B f(x)\,dx \geq \eta$, *sendo* $B = \prod_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}(G_n - E)$ *o que é absurdo visto que* B *é um conjunto de medida* L *nula.*

Soluções de L. Neves Real.

F. C. P. — Astronomia — 2.º exame de freqüência, ano lectivo 1941-42

I Parte — 1. Deduza a expressão da variação da latitude celeste duma estrêla em virtude do fenómeno da aberração das fixas.

2. Em que difere o fenómeno da aberração planetária do fenómeno da aberração das fixas?

3. Como atende ao efeito da aberração diurna nas observações feitas com o instrumento de passagens suposto colocado no meridiano?

4. ¿A aberração tem alguma influência sôbre as observações feitas com o astrolábio de prisma?

5. A que chama período sinódico dum planeta? ¿O período sinódico dum planeta é maior ou menor que um ano? Justifique as respostas.

6. As fases dos planetas dependem das posições relativas do planeta, do Sol e da Terra? Examine em pormenor o caso dos planetas exteriores.

7. Explique o que é a elipse de paralaxe anual e deduza as expressões analíticas dos seus eixos.

8. Explique o que entende por depressão do horizonte e como a toma em consideração nas observações feitas com o sextante.

9. Indique os êrros dum altazimute distinguindo os de construção do instrumento dos de colocação.

II Parte — Quais são as declinações das estrêlas que, devido à refracção astronómica, se vêm acima do horizonte durante o espaço de um dia, mais 8 minutos siderais do que se a refracção não existisse? Latitude do local $41^\circ\, 8'$ N.

Nota — Os alunos têm hora e meia para responder à primeira parte e outra hora e meia para responder à segunda. Em relação à primeira parte os alunos devem: responder a uma das preguntas 1, 2, 3 ou 4; responder a uma das preguntas 5 ou 6; responder às preguntas 7, 8 e 9. Seguidamente podem responder às restantes preguntas.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

1433 — Estabelecer a fórmula

$$\int \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)\, x \cdot dx = \frac{\operatorname{sen}^n x \cdot \cos nx}{n} + C$$

(Euler). Achar as fórmulas correspondentes para $\int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen}(n+1)\, x\, dx$, $\int \cos^{n-1} x \cos(n+1)\, x dx$, $\int \cos^{n-1} x \operatorname{sen}(n+1)\, x \cdot dx$.

1434 — Calcular $I_{m,n} = \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt[m]{a+bx}}$ (m, n inteiros positivos).

1435 — Achar em termos finitos as equações das evolutas da curva que corta sob um ângulo constante φ as geratrizes do cone circular recto de semi-abertura u.

1436 — Prove que o grupo de movimentos que transformam em si mesmo um sólido regular de $n+1$ vértices num espaço n-dimensional é o grupo alternante de grau $n+1$; e que no espaço de $n+1$ dimensões, o grupo para o mesmo sólido é o grupo simétrico de grau $n+1$.

(Maud Willey, *Am. Math. Monthly* 1937)

1437 — Uma esfera S de raio constante move-se mantendo fixo um ponto P da sua superfície. Sendo C uma esfera fixa e Q a projecção ortogonal de P no plano radical de S e C prove que Q se move na superfície duma esfera.

(V. Thébault)

1438 — João e Francisco jogam 500 partidas de cara ou cunho a um escudo de aposta. João possui 40 escudos e Francisco 25. Supondo que o ajuste de contas só se realiza depois de acabada a série, calcular a probabilidade de que êsse ajuste de contas possa realizar-se integralmente.

1439 — Um diamante bruto de valor a partiu-se em três fragmentos. Calcule a esperança matemática do valor total do diamante quebrado supondo que o preço dum diamante é proporcional ao quadrado do seu pêso. Enuncie as hipóteses de que tem de se servir para a solução, sempre que elas não estejam implícitas no enunciado.

(Émile Borel)

1440 — Calcular o limite da soma de uma sucessão de fracções, cujos numeradores estão em progressão aritmética e os denominadores em progressão geométrica. Condição de convergência. (Aplicação numérica: $1/2+2/4+3/8+4/16+\cdots$).

Problemas propostos por Mário de Alenquer.