Livros contados

Paulo Ventura Araújo

Contar e fazer contas. Uma introdução à teoria dos números,

de J. Eurico Nogueira, Suzana Nápoles, António Monteiro, José A. Rodrigues, M. Adelaide Carreira
(colecção Temas de Matemática, SPM/Gradiva, 2004)
recensão por Maria Pires de Carvalho, Universidade do Porto

Quando recebemos este livro, editado pela Gradiva em parceria com a SPM, surpreendeu-nos o uso de dois títulos de tão distinto grau de formalidade, como se os leitores devessem contar com um texto de divulgação matemática entremeado com um conteúdo de formato mais clássico. O prefácio do livro sugere isso mesmo e delimita o público a que o livro se destina: aquele que precisa de *aprofundar a sua cultura matemática*. Esta é uma excelente razão para avançarmos na leitura e conferirmos o que, nos nove capítulos do livro, há de promessa cumprida.

Os temas dos cinco primeiros capítulos correspondem a uma escolha primorosa de um vasto leque de assuntos possíveis em teoria de números; o capítulo seis é menos feliz, o sétimo é mesmo dispensável. Os autores optaram por incluir um Apêndice que, não sendo de leitura aprazível, contém informação útil. Segue-se uma Cronologia da história dos números, um pouco extensa e discutível. Globalmente trata-se de um livrinho de conteúdo essencialmente histórico, acessível a todos os que se interessam por matemática. Mas temos a fazer-lhe algumas críticas que julgamos pertinentes.

A divulgação da matemática, sobretudo a não especialistas, não é incompatível com uma apresentação cientificamente irrepreensível. Ora, se algumas opções dos autores são francamente meritórias, outras houve que diluíram a qualidade do livro e o remetem a um mais restrito nicho de leitores. Vejamos em detalhe as razões desta depreciação.

Todos os capítulos beneficiaram de incursões históricas minuciosas, que louvamos, mas cujo fluir no livro denota alguma descoordenação. Muitos aspectos são repetidos, deixando à mostra uma má costura entre os capítulos e alongando-os indevidamente (vejam-se, por exemplo, os vários retornos às fórmulas resolventes de equações polinomiais). Além disso, apresentam-se opiniões de enorme peso histórico sem justificação, como por exemplo, a afirmação, no capítulo 1, de que «*foram os Gregos quem mais importância atribuiu aos racionais e, o que é mais curioso, sem terem consciência disso*»; na Cronologia, a notícia de que o Último Teorema de Fermat foi provado por Andrew Wiles, quando se impõe incluir também o nome de Richard Taylor; ainda na Cronologia, a afirmação de que a Conjectura de Poincaré foi provada em 2004, quando na verdade os especialistas não estão ainda de acordo e hesitam em aprovar o argumento de Perelman.

Mas é no conteúdo matemático que esta obra mais se afasta de ser recomendável. Há muitos erros, imprecisões e omissões. Damos só alguns exemplos mais relevantes.

Capítulo 2:

(a) Além das repetidas provas de que certas recorrências estão bem definidas, o que poderia ter sido feito de uma vez por todas, o argumento das páginas 38 e 42 para mostrar a unicidade do resultado das operações em $\boldsymbol{N}$ não se percebe.

(b) A ordem por que se apresentam as propriedades das operações facilita a verificação delas mas introduz uma hierarquia que pode suscitar perguntas muito importantes que não são respondidas no texto: por exemplo, a unicidade do elemento neutro de uma operação só é válida se a operação for comutativa?

(c) A parte inteira de um número real, de que se fala na página 54, nem sempre é a característica do número; embora a secção 2.2 se refira sobretudo a fracções positivas, não é claro que seja este o único âmbito das afirmações que lá são feitas.

Capítulo 3: Depois de ser apresentada a prova de Euclides da infinidade dos primos, afirma-se que a de Kummer é «*ainda mais simples*»; ora, o argumento de Kummer recorre às mesmas ideias de Euclides (ou seja, que, se um natural divide outros dois, então divide a diferença ou a soma deles; e que, se um natural é maior que 1, então há um primo que o divide; e considera, como Euclides, o produto dos primeiros primos consecutivos), mas usa redução ao absurdo. Isso torna-o mais simples?!

Capítulo 4: A construção dos hiper-reais exige de facto um ultrafiltro para distinguir subconjuntos de naturais, que a família dos co-finitos não é.

Capítulo 5:

(a) Promete-se determinar «*por considerações geométricas simples, as raízes reais de uma equação quadrática*». De facto, só se usa este método em três exemplos, optando-se depois por uma dedução algébrica da fórmula resolvente. Além disso, nos exemplos há etapas de que não é dada qualquer justificação geométrica, como quando se procura «*uma raíz menor que* $9/2$ para $x^2+20=9x$ (página 136).

(b) No rodapé indexado por 51, exclui-se do argumento da página 145, as cúbicas em que $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Porquê? O que fazer neste caso?

Capítulo 6: Na prova da página 173 de que $\boldsymbol{R}$ não é numerável, afirma-se: «*para simplificar o problema, serão representados todos os números reais sob a forma de dízima infinita*». Zero tem dízima infinita? (Isso não é claro da definição que consta da página 54.) E é para *simplificar o problema* que se escrevem os reais de $]0,1[$ como dízimas infinitas, ou sem esta hipótese, que garante a unicidade da escrita em dízima, o argumento diagonal falha?

Apêndice:

(a) No rodapé 68 diz-se erradamente que o Último Teorema de Fermat afirma que «*Sendo n um natural maior que* 2, *não existem x, y, z inteiros que sejam solução da equação* $x^n+y^n=z^n$». Como é óbvio, o teorema só se refere a soluções inteiras positivas.

(b) O enunciado do Teorema de Wilson, que surge primeiro na página 80, é um critério de primalidade, logo traduz-se por uma equivalência; os autores reduziram-no, no Apêndice, a uma só implicação.

Nota-se em geral uma apresentação tímida dos assuntos mais difíceis, o que os autores podem justificar com o público alvo a que se dirigem, mas que ressoa ao velho preconceito de que só o que é trivial é apreciado e que há pouca capacidade nos leitores para entender componentes menos elementares da matemática. Por exemplo: (I) Por que funciona o argumento para extrair raízes quadradas que consta da página 67? (II) Na caixa que inicia a página 72 promete-se uma prova do Teorema Fundamental da Aritmética; o argumento utiliza, sem provar, que *se um primo divide um produto finito, então divide algum dos factores*. (III) Por que não é aceitável a fórmula de Gandi (aliás transcrita erradamente) como geradora de todos os primos (página 79)? (IV) Diz-se na página 91: «*o alemão Georg Bernhard Riemann (...) usou a fórmula de Euler* [que surge na linha seguinte, com explicação adicional em

rodapé envolvendo Riemann que é posterior a Euler], *mas também não logrou concretizar os seus intentos»*. Para que se falou então desta fórmula e do seu uso por Riemann? (V) Na página 100 menciona-se uma descoberta de Ulam e remete-se o leitor para uma página da Internet, sem ser sequer claro que se trate de um teorema. (VI) Por que se mencionou na página 111 que a quadratriz «*não é gráfico de uma função algébrica*» se nem sequer se explica o que isso significa? (VII) Diz-se na página 116 *que «um complexo é definido como sendo da forma* $a+bi$*, onde a e b são reais»*. Obteríamos a mesma estrutura se, em vez de *i*, juntássemos a uma raíz de outro polinómio sem zeros reais que não x^2+1? E como se justifica que as operações entre complexos sejam as apresentadas na página 117? (VIII) Na dedução da fórmula resolvente de equações cúbicas (página 144), começa-se por reduzir uma cúbica geral x^3+bx^2+cx+d à versão mais simples y^3+py+q, através da mudança de variável $x = y - \frac{b}{3}$. Como se justifica que alguém se tenha lembrado de usar esta mudança de variável? (O coeficiente do termo quadrático na cúbica geral, *b*, é o simétrico da soma das três raízes; juntando a cada uma $b/3$, a soma anula-se e o coeficiente do termo quadrático na variável *y* é zero.) (IX) Na caixa da página 177 diz-se: «*pode demonstrar-se que a cardinalidade* [dos números transcendentes] *coincide com a dos reais*». Por que não se tirou partido da igualdade da página 174, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, para deduzir esta afirmação tão interessante?

Impunha-se dos cinco autores uma revisão cuidada do texto para evitar as muitas gralhas que ele contém, algumas resultado de mera desatenção mas que adulteram o conteúdo (por exemplo, na página 66, a $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são atribuídas dízimas finitas). Se é verdade que a opção de colocar parte do conteúdo em caixas aproxima o aspecto do texto do dos manuais escolares, tem a desvantagem de sublinhar uma visão francamente questionável da história da matemática: por exemplo, por que mereceu Pedro Nunes uma caixa de destaque e Anastácio da Cunha não?

É frequente que os autores de textos de matemática, preocupados com o conteúdo científico, descuidem a linguagem e tornem as suas obras de leitura árdua. O português um pouco coxo que transpira deste livro é disso um exemplo lamentável, até por comprometer uma apresentação mais elegante da matemática. Por exemplo, na página 48, encontra-se: «*para estender a operação de multiplicação ao conjunto dos números inteiros põe-se, para quaisquer naturais (...)*»; na página 78 diz-se: «*(...) não havia, no máximo, mais do que uma expressão com esta propriedade*»; na página 106, lê-se: «*uma sucessão* $(a_n)_{n\in N}$ *de números reais diz-se fundamental se, dado um número* $\varepsilon > 0$ *arbitrário, se tiver* $|a_n - a_k| < \varepsilon$ *para todo o n e k tais que n, k > p, para algum p.*» A frase que segue a caixa da página 175, que lida com cardinais e potências finitos, sugere ao leitor que se prova analogamente que $2^{\aleph}$ é o cardinal das partes de um conjunto de cardinal $\aleph$ quando na verdade $2^{\aleph}$ não pode ser definido independentemente da noção de partes de um conjunto.

São muitos os reparos aqui feitos, dirão. É que são graves alguns dos defeitos que encontrámos e que minaram uma obra que tinha à partida larga margem para ser um sucesso. Esperemos que seja possível uma segunda edição corrigida que faça justiça à qualidade dos autores.

Esta secção propõe-se publicar recensões aprofundadas de livros de Matemática editados recentemente em português, dando preferência a livros que interessem a um público alargado. Agradecemos aos leitores da Gazeta de Matemática o envio de sugestões de livros que julguem merecedores da nossa atenção. Contacto do editor da secção: Paulo Ventura Araújo (FCUP); e-mail: paraujo@fc.up.pt