A Sociologia da Matemática

por **D. J. Struik** *(Massachussets Institute of Technology)*

1. Definição do problema

A sociologia da Matemática estuda a influência das formas de organização social sôbre a origem e o desenvolvimento dos conceitos e métodos matemáticos e o papel da Matemática como parte da estrutura social e económica de dada época.

As formas básicas da sociedade — a oriental, a greco-romana, a medievo-feudal, a capitalista primitiva, a capitalista moderna e a socialista — influenciaram tôdas, de modos diferentes, a aquisição do conhecimento matemático e foram, por sua vez, submetidas à sua influência. Há muitos problemas subsidiários, interessando grupos de cada sociedade, levantando todos questões a resolver. ¿Qual tem sido o papel do comerciante, do engenheiro, do topógrafo, do astrónomo, do navegante, do administrador, do artista, do filósofo e do matemático profissional? ¿Qual a razão por que a investigação matemática, por exemplo, floresce sob uma forma da sociedade, permanece estacionária sob outra, e decai ou não surge sob uma terceira?

Até agora, estes problemas só têm merecido ligeira investigação. Poucas pessoas negarão a influência dos factores sociológicos sôbre o desenvolvimento das ciências exactas. A explicação de *Heródoto* da origem da geometria pela necessidade de repartir de novo a terra, no Egipto, depois das inundações anuais, é uma afirmação clássica daquela tese. É costume fazer notar que o raciocínio racionalista grego teve a sua origem, assás compreensìvelmente, nas cidades mercantis jónicas, da Ásia Menor. O interêsse de *Leonardo de Pisa* no estudo da Aritmética e da Álgebra é sempre relacionado com o seu interêsse profissional de comerciante viajado. Ninguém nega, nos dias de hoje, íntima conexão entre a expansão das indústrias eléctricas e do avião, por um lado, e as matemáticas aplicadas, por outro. Compêndios de trigonometria antigos e modernos patenteiam, nos exemplos e nas figuras, a influência decisiva da astronomia, da navegação e da topografia no desenvolvimento da matéria.

Êste tipo de correlação exige uma definição mais precisa antes de ser submetido a qualquer análise específica. Eis um exemplo da forma pela qual a origem da Matemática jónica é habitualmente apresentada:

Cêrca do século VII A. C. eclodiu entre a Grécia e o Egipto um intercâmbio comercial activo. Naturalmente, surgiu a permuta de idéias como a das mercadorias. Os gregos, sedentos de saber, procuraram os sacerdotes egípcios para que os ensinassem. As idéias egípcias foram assim transplantadas, através do mar, e estimularam o pensamento grego, dirigiram-no para novas sendas e forneceram-lhe uma base de trabalho [1].

Isto pode considerar-se como um exame sociológico de certa ordem. Mas, uma observação mais cuidada mostra que está formulado em generalidades vagas que não indicam uma compreensão sociológica real. Houve intercâmbio comercial entre muitas nações e o Egipto. ¿Porque constituiram os gregos uma excepção conseguindo resultados notáveis? Mercadores viajantes prosperaram no Egipto, pelo menos desde cinco mil anos A. C. e o tráfego comercial pode datar-se dos tempos paleolíticos. A única explicação que se oferece é a da *sêde de saber* experimentada pelos gregos. ¿Porquê essa sêde? Nem todos os mercadores a sentem. Os babilónios depois da sua chegada à Suméria, quer como mercadores, quer como conquistadores, tiveram a avidez de saber necessária à absorpção de tôda a ciência dos sumérios, mas não surgiu nenhuma ciência do tipo grego. Continuaram e aprovaram os métodos antigos. A diferença, no caso dos gregos, deve explicar-se por métodos mais penetrantes do que uma referência à actividade comercial e à avidez de conhecimento. O sociólogo pode contribuir mostrando de que maneira a sociedade grega diferia radicalmente de tôdas as formas de estrutura social anteriores e posteriores. Qualquer coisa inteiramente nova deve ter ocorrido e deve fazer-se uma tentativa para defini-la, primeiro em termos sociais e, depois, em termos do pensamento científico.

A ascensão das matemáticas na Grécia antiga apresenta, então, o problema seguinte: ¿Como foi possível que um grupo de gregos, na maioria pertencentes à classe mercantil, se tornasse não só interessado na ciência do antigo Oriente, mas a encarasse dum ponto de vista inteiramente origi-

---

(1) F. CAJORI, *History of Mathematics* (New York, 1930), p. 15.

nal? E, ainda ¿como foi possível que só alguns dos problemas postos por êsses gregos tivessem recebido, embora unilateralmente, tôda a atenção e outros permanecessem na penumbra até aos tempos modernos?

O mercador tem tido influência sôbre a Matemática, mas apenas sôbre algumas das suas partes. Interessa-se pelo cálculo e necessita duma sólida aritmética elementar. Se é um viajante, o seu interêsse vai até à geometria necessária à geografia e ao conhecimento do movimento do sol e das estrêlas. O seu engenho é excitado pela concorrência e pela possibilidade de lucro individual, embora tal não conduza sempre à busca, na Matemática, de verdades mais profundas. Algumas vezes pode auxiliar a ciência convertendo-se em Mecenas. Estabelecer a existência de relações comerciais não é suficiente, por si só, para provar o desenvolvimento seguro da Matemática para além dum nível elementar determinado [2].

A instituïção da escravatura põe um problema de causalidade análogo. Há uma teoria, aceite por muitos, de que a natureza da sociedade greco-romana, e com ela a do seu tipo característico de ciência, foi determinada principalmente pelo seu carácter esclavagista. A decadência do sistema da escravatura é, então, considerada um factor decisivo do declínio da ciência. Esta teoria tem uma base razoável, mas deve ser examinada com cuidado. A antiga sociedade oriental conheceu também a escravatura, todavia, a sua ciência possuia características inteiramente diferentes das da ciência da Grécia e Roma. A sua escravatura decaiu ligeiramente e a expansão, a contracção e a estagnação políticas e culturais das formas orientais da sociedade não corresponderam, necessàriamente, aos desenvolvimentos da escravatura ou da ciência. Uma primeira distinção deve fazer-se entre a escravatura greco-romana para a produção e a escravatura oriental de luxo ou para obras públicas [3]. Uma segunda distinção consiste em que a escravatura, na Grécia, encontrava-se na indústria e, em Roma, não só na indústria, mas também na agricultura. Supomos que uma análise ulterior destas formas de escravatura e do seu desenvolvimento pode levar a uma nova compreensão dos progressos e limitações científicos de cada período, e do lugar relativo, na história da ciência, de homens como *Ahmes*, o escriba do papiro egípcio do Rhind; *Euclides*, o alexandrino do período primitivo; *Plotinus*, o neo-platónico; ou *Alkhwarizmi*, o algebrista maometano. Devemos apoiar-nos, aqui, no trabalho já feito, sobretudo nos domínios mencionados, por homens como *Farrington* e *Winspear*, para a antiguidade greco-romana, e *Wittfogel*, para a antiguidade oriental [4].

Por outro lado, não devemos exagerar demasiadamente a nossa análise sociológica e esquecer uma coisa evidentíssima: um processo científico segue, muitas vezes, as vias sugeridas pela sua estrutura construída com os resultados já obtidos. O estudante elabora a sua tese porque o professor pretende que êle esclareça um ponto obscuro do seu próprio trabalho. Podemos encontrar uma tal situação, muitas vezes numa estrutura social e cultural relativamente estável. Constituem um exemplo as matemáticas egípcia, babilónica e chinesa, uma vez o seu padrão bem estabelecido. Aqui encontramos, durante muitos séculos, uma real estagnação, e o progresso, quando se realiza, é alcançado por descobertas directamente dependentes do conhecimento e da técnica pre-existentes. Um outro exemplo consiste no progresso da Álgebra na Itália do século XVI. Depois de *Tartaglia* e *Cardan*, trabalhando como discípulos directos de determinados professores bolonheses, terem resolvido a equação do terceiro grau, o discípulo de *Cardan*, *Ferrari*, mostrou, em 1545, como se resolve uma equação do quarto grau. É um exemplo do descobrimento duma relação objectiva, o parentesco matemático de duas espécies de equações, no esqueleto duma estrutura social particular. A continuïdade desta estrutura permitiu a descoberta posterior de relações matemáticas mais profundas. No trabalho de *Cardan* apareceu um número real como a soma de dois números complexos *(sofisticos)*. Isso levou o professor bolonhês *Bombelli* à publicação, em 1572, duma investigação siste-

[2] Isto decorre de livros que evidenciam a influência do mercador na Matemática, como D. E. SMITH, *History of Mathematics*, 2 vols. (Boston, 1925), onde se toma em consideração, embora num nível elementar, a influência de outros factores, sobretudo a da Astronomia. Veja-se sôbre a influência do mercador D. E. SMITH, *Mathematical Problems in Relation to the History of Economics and Commerce*, *American Mathematical Monthly*, XXIV (1917), p. 221-225, ou W. SOMBART, *Der Bourgeois* (München-Leipzig, 1920), p. 164-169.

[3] E. MEYER, *Sklaverei im Altertum* (1898), em *Kleine Schriften* (1910), p. 189-190; também K. WITTFOGEL, *Wirtschaft und Gesellschaft Chinas*, I (Leipzig, 1931), p. 395; *Die Theorie der orientalischen Gesellschaft*, *Zeitschr. für Sozialforschung*, VIII (1930), p. 96.

[4] B. FARRINGTON, *Vesalius on the Ruin of Ancient Medicine*, *The Modern Quarterly* (1938), p. 23-28; A. WINSPEAR, *The Genesis of Plato Thought* (New York, 1940), p. 348, K. WITTFOGEL, ob. cit.

mática da álgebra dos imaginários. Como é descrita nos nossos compêndios vulgares, a história da Matemática concentra-se, precisamente, sôbre tais descobertas, apresentando o descobrimento de novos resultados, quási exclusivamente, a partir do desenvolvimento lógico interno, com relativo desprêzo pelos factores sociológicos. Todavia, mesmo nos casos em que é dominante o factor matemático puro, existem factores sociológicos. Estes são evidentes no facto puramente social de que homens talentosos duma era, estudam Matemática, são encorajados a ensiná-la, a publicar e a formar discípulos. Noutros períodos, pode haver tantos homens de talento, mas o seu génio é levado por outras vias, algumas das quais são agora consideradas desvios [5].

2. Condições da actuação dos factores sociológicos

Em períodos de profundo soerguimento social, de transição, ou em períodos durante os quais uns povos se instruem à custa de outros de fundo social e cultural muito diverso, o factor sociológico pode fornecer o guia mais importante para a compreensão das modificações do conhecimento matemático. Registe-se que a modificação fundamental da Matemática chinesa, da fase oriental para a técnica e a ciência ocidentais, foi devida aos missionários jesuitas que se introduziram na China, no século XVI, com a onda da expansão capitalista europeia. Encaremos um caso em que os factores sociológicos não estão tão precisamente determinados. O chamado sistema de numeração hindu-árabe, um sistema decimal de posição, com dez símbolos, incluindo um símbolo para o zero, foi introduzido na Mesopotâmia, provàvelmente vindo da Índia, no tempo dos reis Sassanidas, talvez no século VII [6]. No século XIII e seguintes, penetrou na Europa e, assim, se tornou o nosso actual sistema de numeração. A antiga explicação do seu sucesso era demasiado simplista. Supunha-se que a superioridade intrínseca dêste sistema impressionou, só por si, a mentalidade prática, a tal ponto que todos os outros sistemas de numeração foram rejeitados. É certo que o sistema hindu-árabe é muito superior ao romano ou ao ábaco antigo. Menos convincente é o argumento de que era superior ao sistema usado pelos gregos. Êste sistema, com vinte e sete símbolos tirados do alfabeto, não tinha valor de posição, nem símbolo para o zero, e parece-nos à primeira vista, um tanto complicado. Todavia, para quem alguma vez o tenha experimentado, êle perde muito do seu aspecto grosseiro. Depois de curta prática, reconhece-se que êste sistema é tão cómodo na aritmética elementar, incluindo as fracções, como o sistema hindu-árabe [7]. Para um mercador ou um topógrafo do Próximo-Oriente pequena diferença havia entre o uso do sistema hindu e o do sistema grego [8]. Concluímos que devem ter ocorrido razões extra-matemáticas para a vitória de um sistema sôbre o outro. Há vários indícios de que tais razões podem ser encontradas de facto na história dos tempos dos *Sassanidas* e *Abassidas,* quando entre os orientais estava muito espalhado um preconceito, um ódio baseado na diferença de situação económica.

A primeira referência existente aos dez numerais hindus, fora da Índia, encontra-se nos escritos do bispo *Severus Sebokht* (662), que os menciona com o propósito expresso de mostrar que os gregos não possuiam o monopólio da cultura [9]. Existiu em Bagdad, sob o domínio dos califas *Abassidas* primitivos, uma escola matemática que parece ter-se recusado, intencionalmente, a aceitar lições dos gregos e voltado para as fontes judaicas e babilónicas [10]. A esta escola perten-

[5] «Houve talvez tantos homens de génio na Idade Média como há agora; pelo menos a minha investigação dá essa impressão, que seria confirmada, estou disso certo, por um inquérito estatístico. Se êsses cientistas medievais não fizeram uma grande obra, podemos preguntar o que teriam feito homens como GAUSS, FARADAY ou CLAUDE BERNARD se tivessem nascido nos séculos VIII ou IX». G. SARTON, *Introduction to the History of Science,* I (Baltimore, 1927), p. 20.

[6] A data é ainda indeterminada. De acôrdo com alguns investigadores, êste sistema de numeração bem pode ter sido conhecido dos gregos de Alexandria. Vide D. E. SMITH e L. KARPINSKI, *Hindu-Arabic Numerals* (Boston, London, 1911) e CAJORI, ob. cit. p. 88-90. Tornou-se muito usado depois do século VIII sob o domínio dos Árabes.

[7] Tal foi constatado, por exemplo, por J. G. SUNGLY, *The Employment of the Alphabet in Greek Logistics, Recueil offert à J. Nicole* (Genève, 1905), p. 515-530, que defende a sua tese contra o antigo ponto de vista de HANKEL, GOW e CANTOR. Vide também T. L. HEATH, *A Manual of Greek Mathematics* (Oxford, 1931), p. 28 e 31, que chama ao sistema grego para as operações elementares *muito pouco menos conveniente do que o nosso.*

[8] A-fim-de apreciar o valor do sistema grego, não devemos esquecer nunca que o significado aritmético das letras gregas era tão familiar para os gregos como o dos símbolos $0, 1, 2, \cdots$ o é para nós.

[9] Citado em D. E. SMITH, *History of Mathematics,* I, p. 166-167.

[10] Vide S. GANDZ, *The Mishnat ha Middot, the First Hebrew Geometry of about 150 C. E. and the Geometry of Muhammed ibn Musa Al-Khowarizmi, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik* A 2 (1936).

ceu *Alkwarizmi*, o pai da nossa álgebra. Êste ódio pela influência e domínio gregos foi uma das causas principais das fáceis vitórias do Islam nascente, na Síria [11].

Ainda nos parece fácil compreender a vitória que o sistema hindu-árabe alcançou sôbre o ábaco e os numerais romanos entre a classe nascente dos mercadores europeus do século XIII e XVI. Todavia, esquece-se, freqüentemente, que o antigo sistema grego ainda existia, era usado na influente Constantinopla e, certamente, conhecido dos venezianos, que foram senhores de Constantinopla de 1203-1261. ¿Por que razão seleccionaram, então, os mercadores italianos o sistema árabe? A resposta a esta pregunta parece não ter sido dada, mas alguns factos podem sugeri-la. «A civilização árabe era bastante sensível na Sicília e em Espanha, não só na parte moura, mas também em locais, como Toledo, que estavam ainda em poder dos cristãos; os povos de língua árabe rodeavam o Mediterrâneo e dominavam o comércio asiático» [12]. Na Itália, o sistema árabe parece ter surgido primeiro em Florença e em Pisa, que mantinham relações mais íntimas com o mundo árabe do que com o grego e que rivalizavam comercialmente com Veneza [13].

Na sociedade moderna a técnica influencia o desenvolvimento da Matemática, quer directamente, pondo problemas técnicos susceptíveis de tratamento matemático pelo perito, quer indirectamente, através da Física, da Química e de outras ciências naturais. Tem sido tentada uma distinção entre Matemática *pura* e *aplicada*, estando esta directamente relacionada com a técnica e mostrando, mais claramente, portanto, o seu fundo social. Esta distinção, que data apenas do século XIX, torna-se cada vez menos aceite com o descobrimento da lei dialéctica elementar de que tôda a matemática pura pode ser aplicada. Mesmo o tipo *mais puro* de matemática não é isento de mancha sociológica. O projecto do avião moderno, a engenharia das comunicações, os novos trabalhos na plasticidade e muitos outros domínios da engenharia exigem instrumentos matemáticos apurados que são apenas parcialmente tratados nos nossos textos teóricos puros. Domínios como a análise harmónica, o cálculo tensorial, a integração nos campos real e complexo, a teoria dos grupos, desenvolvidos na maior parte sem relação especial com a sua aplicabilidade na técnica, transformaram-se em abstrações de determinadas relações concretas da natureza e em guias úteis para o contrôle da indústria. Creio que os matemáticos modernos descortinam, em geral, o fundo social da sua ciência, mais através destas relações com a técnica, do que por um estudo da história [14].

Todavia, é importante constatar que esta função fundamental da técnica é característica exclusiva da moderna sociedade industrial. Foi quási ignorada no antigo Oriente e na sociedade greco-romana. Teve certa influência indirecta através da navegação e da arquitectura, mas não se ouve falar do cálculo matemático duma estrutura técnica até à era capitalista (com algumas excepções, como as das estruturas de *Arquimedes*). Não está provado que os vastos trabalhos técnicos dos chineses, dos babilónios e dos romanos tenham exigido mais do que o tipo de matemática muito elementar. A técnica teve influência nas ciências exactas, certamente, como o atestam muitos tratadistas de Mecânica, todavia, a aplicação nunca foi além dos fundamentos elementares. Na sua *Arquitectura*, *Vitruvius* presta elevado tributo à Matemática, mas a teoria e a prática estavam divorciadas. No seu livro oitavo descreve os métodos práticos de condução de água para as casas e as cidades, trata de canos de chumbo, tubos e condutas de barro, e pode ser lido sem qualquer preparação matemática. No seu livro nono ocupa-se dos métodos de duplicação do quadrado, do teorema de *Pitágoras*, da lei da hidroestática de *Arquimedes*, e da duplicação do cubo, mas, parece, sem grande relação com a arquitectura. Os nomes dos inventores e dos técnicos da Antiguidade (*Ctesibios, Philon, Frontinus*) não têm, ou dificilmente alcançam, um lugar na história da Matemática, mesmo pela sua influência indirecta, exceptuado o caso importante de *Arquimedes* e, talvez, o de *Heron*.

---

(11) P. K. HITTI, *History of the Arabs* (London, 1937), p. 153.

(12) G. SARTON, *Introduction to the History of Science*, II (Baltimore, 1931), p. 6.

(13) Havia também em uso outros símbolos numéricos de origens ainda duvidosas. Vide G. FALCO, *Un indovinello paleografico*, *Bolletino Storico-bibliografico Subalpino*, XXXVII (1935).

(14) Vide T. C. FRY, *Industrial Mathematics*, in *Researche — A National Resource*, II (Dec. 1940), Report of the National Research Council to the National Research Planning Board (Washington, 1941), p. 268-288. O Dr. FRY cita uma nota estimulante do Dr. H. M. EVJEN: «Alta matemática, de-certo, respeita apenas aquêles ramos da ciência que não encontraram ainda um vasto domínio de aplicação e que, portanto, não emergiram ainda, por assim dizer, da obscuridade. É, por conseqüência, um têrmo temporal e subjectivo» (p. 273). A nota tem o interêsse duma hiper-simplificação do ponto de vista sociológico.

Com o advento do capitalismo moderno, a técnica começa a desempenhar um papel importante no progresso da Matemática. O progresso da utensilagem mecânica no Renascimento foi, como *H. Grossmann* analisou, a origem da Mecânica moderna como ciência [15]. A Mecânica então progrediu para além dos apertados limites da Antiguidade e tornou-se fonte inspiradora de matemáticos. Neste primeiro período inspirou os filósofos e levou-os a crer numa estruturação matemática do universo. Muitos matemáticos foram inventores, como *Descartes, Pascal, Newton* e *Leibniz*. Para *Leibniz*, o estudo das ciências exactas fazia parte da sua investigação do método geral da invenção e do descobrimento.

A aplicação dos novos instrumentos aos problemas da técnica só gradualmente se foi fazendo. No século XVIII, *Euler* e os *Bernoulli* aplicaram a Matemática à construção naval e de canais. A maior parte da influência da técnica manteve-se indirecta, mesmo depois da revolução industrial, através da Mecânica e da Física como intermediárias. A actual influência directa da técnica sôbre a Matemática teve início no século XX com tôda a transformação da função industrial da ciência.

Dêste curto bosquejo podemos concluir que seria muito instrutivo um estudo da influência da técnica na Matemática. Uma coisa se destaca: o fundamento técnico duma forma social — as suas edificações, aquedutos, instrumentos, navios, o seu génio inventivo, a sua perícia técnica — não é de si mesmo um índice da extensão e das tendências da Matemática cultivada nessa sociedade. Pode haver influência, duma sôbre a outra, mas essa influência pode variar em quantidade e qualidade. Devemos encarar a estrutura técnica duma sociedade, não como uma coisa isolada, mas na sua relacionação completa com muitos outros aspectos da sociedade, tais como a existência da escravatura, a extensão do intercâmbio comercial, a influência da luta de classes, a estabilidade das formas sociais e o tempo de ócio.

Muito raramente um conjunto surpreendente de novos conceitos é um resultado do progresso de idéias matemáticas em independência total. Os factores sociológicos desempenham determinado papel, é claro. Os novos conceitos científicos, além disso, não necessitam de surgir precisamente no meio das lutas, mas, um pouco mais, na periferia. Os estímulos que levam ao progresso actuam lentamente e exigem, não só uma determinada maturidade, mas também quietação. Há, evidentemente, excepções, como a de *Thales*, o pai lendário da Matemática grega, que se supõe ter sido um membro militante da sua classe. *Descartes* alistou-se no exército holandês, uma das guardas-avançadas da revolução burguesa, e participou na Guerra dos Trinta Anos, mas, cedo descobriu que as maiores idéias nascem na quietação. *Galois*, o jovem génio francês, dois séculos mais tarde, participou activamente na revolução de Julho, e, pouco depois, encontrou a morte. É mais característico o trabalho original realizado em situações pacíficas, não demasiadamente afastadas dos centros de actividade económico-social, como o de *Newton* em Cambridge, *Euler* em Berlim, ou *Poincaré* em Paris. O primeiro instituto de investigação matemática fundou-se, não em Atenas com as suas acesas lutas de classes, mas em Alexandria onde a actividade económica se realizava num ambiente relativamente calmo. Por vezes, a distância geográfica entre a actividade social e a invenção matemática é muito grande; o exemplo mais frisante é o da descoberta das geometrias não-euclideanas na Hungria e na Rússia nas primeiras décadas do século XIX. Ambas as descobertas foram inspiradas pelo génio de *Gauss*, que levou, êle próprio, uma vida calma numa cidade provinciana da Alemanha semi-feudal. Cometeria grave êrro, todavia, quem visse, nestes casos notáveis de semi-divórcio do progresso social e da actividade científica, uma prova da independência da criação matemática. *Gauss* pertence, com *Lessing* anterior a êle e com o seu contemporâneo mais velho *Goethe*, ao grande despertar germânico do final do século XVIII e início do século XIX, do qual *Franz Mehring* delineou as raízes burguesas [16]. A conexão entre a obra de *Gauss* e a dos matemáticos da França revolucionária é tão íntima que *Felix Klein* construiu um longo quadro comparativo dos resultados de *Gauss* com os de *Legendre*, um dos matemáticos franceses em cuja obra podemos estudar a influência da revolução francesa no progresso da Matemática. Em relação a *Legendre*, *Gauss* mergulhava mais fundo, mas Göttingen oferecia mais sossêgo do que Paris [17]. Ao elaborar idéias que dominariam a Matemática moderna, *Gauss* conservou pessoalmente o tipo do século XVIII.

---

(15) H. GROSSMANN, *Die gesellschaftlichen Grundlagen der mechanistischen Philosophie und die Manufaktur Zeitschr. für Sozialforschung*, IV (1935), p. 161-231.

(16) Por exemplo em *Die Lessing-Legende* (4.ª Aufl., Stuttgart, 1913).

(17) FELIX KLEIN, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 1 (Berlim, 1926), p. 60-61.

3. Relações da Matemática com outras disciplinas

Ao comparar grandes matemáticos do século XIX, *Felix Klein* notou que os matemáticos criadores podem encarar a vida de diferentes pontos de vista, mas, da sua posição particular pouco se reflecte nas suas obras [18]. Êle chegou a esta conclusão comparando a obra de católicos, como *Weierstrass* e *Cauchy*, protestantes, como *Riemann*, e judeus, como *Jacobi*, e a sua afirmação não é incorrecta no período, relativamente curto, que foi considerado e no grupo, relativamente pequeno, de credos religiosos. Tal constitui um aviso para nós quando tentemos generalizar. As filosofias e as religiões reflectem determinadas relações sociais objectivas, talvez as do passado, e, como tais, podem fornecer elementos estimulantes ou retardadores do trabalho matemático. Na sociedade grega a Matemática nasceu e medrou no violento chocar de filosofias. Materialistas e idealistas degladiavam-se na interpretação dos conceitos matemáticos. Os primeiros enunciados claros dos problemas do infinito são de *Zenão* de Elea numa tentativa de hostilizar quer os pitagóricos, quer os atomistas. Quando assentou a poeira nos campos de batalha, as posições matemáticas estratégicas estavam na posse dos matemáticos idealistas da escola platónica com a sua ênfase na estrutura lógica e esterilidade da aplicação [19]. *Euclides*, que respeitava a tradição platónica, inclui êsse ponto de vista nos seus Elementos. Na medida em que estes ainda constituem, na essência e no espírito, o esqueleto da nossa geometria ordinária, plana e espacial, a influência de *Platão* faz-se ainda sentir no ensino dos nossos dias. O modêlo ordinário do compêndio americano de geometria conjuga um máximo de estrutura lógica com um mínimo de aplicações à ciência e à vida modernas. Aqui, a persistência obstinada dum certo tipo de Matemática no ensino recua a condições sociais e culturais doutrora.

Um outro exemplo de escola filosófica que influenciou profundamente a criação matemática é o materialismo de *Descartes* e seus discípulos, ao qual nos referimos já. Um dos principais dogmas desta escola era o da natureza matemática do universo e da consideração da Matemática como a chave do controle da natureza. Esta crença era partilhada por muitos que não podiam seguir o cartesianismo no seu materialismo, como *Leibniz*, e a ela cabe a popularidade da Matemática nos núcleos progressivos dos séculos XVII e XVIII. E, para dar um exemplo dos nossos dias, o materialismo dialéctico, muito mais do que as outras filosofias, tem actuado como estimulante do estudo das ciências exactas, num grande país, que floresce sob o impulso da planificação integral.

Há também exemplos de atitudes filosóficas que têm desencorajado o estudo da Matemática. A decadência gradual da sociedade esclavagista romana atraiu a atenção de muitos espíritos, lògicamente treinados, mais para a salvação da alma do que para problemas respeitantes ao controle do número e do espaço. Isto explica por que tôda uma classe devotou a sua atenção, com todos os seus dons intelectuais, a exercícios dialécticos de natureza teológica, desprezando as ciências naturais e a Matemática. Todos os matemáticos, bem conhecidos, dêste período, desde *Ptolomeu* a *Proclus*, eram pagãos e um dêles, *Hipatia*, morreu como mártir anti-cristão. Contribuiram muitíssimo para novos resultados e alguns dêles, como *Proclus*, dedicavam-se também a problemas éticos.

Podemos aproximar-nos do nosso país para observar os efeitos duma filosofia, duma atitude mental, na perseguição dos estudos matemáticos. ¿Qual a razão do orgulho de tantos licenciados por absolutamente nada significar para êles a Matemática? ¿Qual a razão do simultâneo desejo tímido de alguns outros de conhecerem um pouco mais dela, como *Henry Adams* [20]? ¿Como se

[18] *Ibid.*, p. 71: «Esta curta investigação afirma a experiência de todos os estudos do homem, nomeadamente, que em questões de *Weltanschauung* os dons do intelecto não são decisivos. A disposição do coração e da vontade, a influência da educação, as experiências, tôda a acção do mundo exterior e da sua própria natureza são activos na sua formulação». Ainda: «Freqüentemente, prevalece no público a opinião de que os matemáticos e os cultores das ciências naturais devem ser de tendências liberais e mesmo radicais, de acôrdo com a sua maneira de pensar penetrante, lògicamente sem preconceitos. Uma vista de olhos na história mostra que esta opinião não concorda com os factos. A nossa ciência tem representantes notáveis em todos os campos e partidos».

[19] Para a interpretação dos enunciados de ZENÃO veja-se F. CAJORI, *The History of Zeno's Arguments in Motion*, *American Mathematical Monthly*, XXII (1915). Um guia para a compreensão do significado social da Matemática na antiga Grécia é WINSPEAR, op. cit., e M. A. DINNIK, *Outline of the History of Philosophy of Classical Greece* (Moscow, 1936, em russo). Discordamos, contudo, da interpretação de WINSPEAR de que os paradoxos de ZENÃO constituem simples sofismas; são documentos notáveis de filosofia matemática e, como tais, a sua influência construtiva foi enorme.

[20] «Pelo melhor êle nunca teria sido um matemático; pelo pior êle nunca procuraria sê-lo; mas precisava de ler Matemática, como qualquer outra língua universal, e nunca

explica que, mesmo entre homens e mulheres cultos do nosso tempo, exista a crença firme de que a Matemática está imóvel, acabada para sempre, e que o matemático é um repetidor do saber do passado? Esta atitude de espírito é destrutiva de novo progresso da ciência exacta como um instrumento da reconstrução social. Os seus fundamentos devem determinar-se por um estudo do papel da Matemática na sociedade moderna, como um todo, e não apenas nas suas escolas e indústrias.

Estes exemplos muito desconexos bastarão para mostrar que há lugar para uma sociologia da Matemática. Mostram também que é necessária uma análise cuidadosa das estruturas sociais antes de tentar interpretar a sua influência no estado da ciência exacta. A superficialidade só causa desânimo e faz com que o trabalho pareça irrisório. Os progressos formidáveis da história económica, durante as últimas décadas, tornaram a tarefa potencialmente possível. A história da técnica, também um factor importante do aspecto sociológico, como vimos, está ainda num estado pouco satisfatório. A falta pode suprir-se sem grande dificuldade com a abundante documentação de que se dispõe. Afortunadamente, os períodos nos quais o matemático está interessado são, em geral, os mais profundamente estudados por outros — as civilizações da China, Babilónia, Egipto antigo, Grécia clássica, Imperio Romano, Europa sob o feudalismo e depois da sua desintegração, e o capitalismo moderno. Uma excepção parece ser o primitivo mundo islâmico e a Índia antes dos maometanos, a respeito dos quais a informação sociológica é muitíssimo escassa.

Termino com um aviso final. Devemos ter sempre a consciência de que uma descoberta matemática, um estado de espírito respeitando a Matemática, um método de ensino, não são nunca explicados por uma só causa. A realidade é complexa e mesmo o acto mais modesto ou mais subtil reflecte dum modo ou de outro uma infinidade de aspectos do universo real. Não podemos afirmar que um facto particular foi causador duma ocorrência ou estado de espírito particular. Devemos descobrir o modo segundo o qual todos os factores — sociológicos, lógicos, artísticos e pessoais — desempenharam uma função no caso em estudo, não esquecendo nunca, todavia, que o homem é um ser social mesmo quando êle se preocupa com as linhas rectas dum hiper-cone num espaço hepta-dimensional.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

---

atingiu o alfabeto», *The Education of Henry Adams* (Boston: Houghton Mifflin, 1927), p. 60. Vide também p. 449. A ansiedade de HENRI ADAMS tem o sabor dum século distante — de acôrdo com o seu próprio carácter.

Uma função contínua sem derivada

por **Henri Lebesgue**

(Publicado em *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 38 (1939-1941), págs. 212-213)

Antes de expor o seu interessante exemplo de função sem derivada, R. Tambs Lyche nota muito justamente que a primeira função desta natureza, devida a Weierstrass, serve mal para o ensino elementar, o que me conduziu a procurar como, sob êste ponto de vista pedagógico, melhorar êste exemplo que, utilizando o desenvolvimento em série de Fourier, tem a grande vantagem de mostrar que as funções não deriváveis podem apresentar-se no decurso dum cálculo normal. Isto é fácil, e por isso a observação que se segue não é certamente nova; pode no entanto ser útil a sua publicação.

Seja, por exemplo, a função evidentemente contínua

$$(1) \qquad f(x)=\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}\operatorname{sen} 2^{n^2} x=\sum_1^\infty u_n(x)$$

tem-se

$$(2) \qquad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_1^\infty \frac{1}{2^n h}\left[\operatorname{sen} 2^{n^2}(x+h)-\operatorname{sen} 2^{n^2} x\right].$$

O limite superior do valor absoluto do n-ésimo têrmo de (2) é também o de $|u'(x)|$, donde se deduz que o valor absoluto da soma dos $m-1$ primeiros termos de (2) é no máximo

$$\sum_1^{m-1} \frac{1}{2^n} 2^{n^2}=\sum_1^{m-1} 2^{n^2-n}<2^{(m-1)^2-(m-1)+1}=2^{m^2-3m+3}.$$

porque cada têrmo 2^{n^2-n} é inferior à metade do seguinte.

Demos a h os quatro valores

$$h_1=\frac{\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_2=\frac{-\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_3=\frac{3\pi}{2^{m^2+1}} \quad \text{e} \quad h_4=\frac{-3\pi}{2^{m^2+1}}.$$

Os arcos $\alpha_n=2^{n^2}x$ sofrem então, para $n>m$, acréscimos, positivos ou negativos, que são múl-