

tipos inteiros de 2π e, por consequência, (2) reduz-se aos seus m primeiros termos.

Para $n=m$, o arco α_n sofre um acréscimo

$$\pi/2 \text{ ou } -\pi/2 \text{ ou } 3\pi/2 \text{ ou } -3\pi/2$$

donde, para $\sin \alpha_m$, um acréscimo ($\cos \alpha_m - \sin \alpha_m$) ou $-(\cos \alpha_m + \sin \alpha_m)$ e a soma dos quadrados destas quantidades sendo igual a 2 uma delas pelo menos não é inferior a 1 em valor absoluto. Assim o valor absoluto do m -ésimo termo de (2) é pelo menos

$$\frac{1}{2^m} \frac{3\pi}{2^{m+1}} = \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi}$$

quer para h_1 e h_4 , quer para h_2 e h_3 , e além disso este termo terá o sinal que quisermos, pois que h_1 e h_4 , h_2 e h_3 , dão resultados de sinais contrários. Em resumo ter-se-á

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| > \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi} - 2^{m^2-3m+3};$$

e por isso $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ aumenta indefinidamente

em valor absoluto para a sucessão dos valores de h que nós associamos à sucessão dos inteiros m , e isto com o sinal que quisermos.

A função $f(x)$ não tem pois em nenhum ponto uma derivada determinada, nem finita, nem infinita.

Se em vez de alunos principiantes se tratasse de alunos ao corrente dos profundos resultados de Denjoy sobre a indeterminação da relação (2), a função $f(x)$ forneceria um exercício fácil e instrutivo: classificar os diversos valores de x nos quatro tipos previstos por Denjoy.

Tradução de J. DA SILVA PAULO

P E D A G O G I A

Secção a cargo de Bento Caraça

O TRABALHO MANUAL E A INICIAÇÃO MATEMÁTICA

por FERNANDO LOBO D'ÁVILA LIMA

Tive há anos um encontro casual com um distinto professor de matemática que me disse estar embaraçado para classificar as provas de admissão dos alunos à escola onde professava e acrescentou que a-pesar-do seu cuidado em formular perguntas das mais simples, as provas só muito fracamente satisfaziam. Suponho que o ilustre professor terá pensado muitas vezes nas causas que podem determinar uma tal insuficiência de preparação nos alunos ao fim de meia dúzia de anos de trabalho. Eu, por mim, pensei que, pondo de parte a hipótese de uma incapacidade formal do educando para assimilar estas noções, restava considerar o método usado no ensino desta ciência. De facto, estou convencido de que o ensino das matemáticas elementares teria tudo a ganhar se fôsse feito de um modo diverso, quanto possível objectivo.

Tem-se abusado do lápis e do papel ou do giz e da pedra e destarte as noções basilares ou não chegam a formar-se ou ficam mal assentes. Esquece-se muitas vezes que abstrair significa, segundo a expressão feliz de Bergson, extrair da matéria.

Para não citar senão o mais vulgar dos exemplos, preguntamos quantos são os alunos que tenham verificado, coisa facilíma, a exactidão do clássico teorema de Pitágoras?

Todos o papagueiam, é certo, mas poucos o viram vivo e a saltar tal como é.

Mas agora reparo que estou aqui de um modo que pode parecer impertinente, eu, um intruso em coisas da matemática pretendendo através da «Gazeta de Matemática» ensinar o Padre Nosso ao Vigário pois que isto e muito mais já o sabem os seus leitores. Não é este o nosso fim mas antes aproveitar o honroso convite de colaboração para tornar público junto dos que mais particularmente se interessam pelos progressos do ensino, algo que por não ser só nosso nos parece deve ser conhecido.

Encarregado vai para treze anos de dirigir os cursos de Trabalhos Manuais para alunos e de iniciação para professores no Liceu de Pedro Nunes, tenho-me esforçado por contribuir, quanto possível, para uma modificação nos processos de ensinar, tornando o ensino activo de modo a criar no educando um interesse vivo.

A criança não atinge nem pode compreender senão o que vê. Se a isto acrescentarmos, o que é essencial nessas idades, uma participação activa, a compreensão torna-se fácil.

O Trabalho Manual serve admiravelmente este objectivo educativo, porque a criança é, como

acertadamente diz W. James: um organismo actuante.

Nesta orientação e no que respeita em especial ao ensino das matemáticas elementares, temos realizado com o auxílio de professores e de alunos uma pequena colecção de modelos que passamos a citar:

Álgebra

1. Verificação experimental da igualdade:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2. Verificação experimental da igualdade:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

3. Verificação experimental da igualdade:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

4. Verificação experimental da igualdade:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Geometria

Plana:

Verificação experimental das seguintes proposições:

5. A soma dos ângulos internos dum triângulo é igual a 180° .

6. A soma dos ângulos externos dum polígono convexo é igual a 360° .

7. Dos segmentos que de um ponto se podem conduzir para uma recta, o menor é o segmento perpendicular.

8. O ângulo inscrito numa circunferência tem por medida metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

9. Todo o ângulo inscrito que subtende uma semi-circunferência é recto.

10. Duas figuras homotéticas a uma terceira, são homotéticas entre si.

11. Um triângulo isósceles é equivalente a um rectângulo com a mesma altura e cuja base é metade da base do triângulo.

12. Um paralelogramo é equivalente a um rectângulo da mesma base e da mesma altura.

13. Os ângulos e os lados opostos de um paralelogramo são iguais, respectivamente.

14. A área dum polígono regular é igual ao produto do semi-perímetro pelo apótema.

15. A área do círculo é igual ao produto do raio pelo semi-perímetro da circunferência.

16. A área dum trapézio é igual ao produto da sua mediana pela altura.

17. Modelo permitindo demonstrar várias proposições:

I — A altura decompõe um triângulo rectângulo em triângulos semelhantes entre si e cada um semelhante ao triângulo dado.

II — Um cateto é mais proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção ortogonal sobre a hipotenusa.

III — A altura é meia proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa.

IV — Teorema de Pitágoras.

18 — O quadrado da hipotenusa de um triângulo rectângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos (Pitágoras).

19. A razão das áreas de duas figuras homotéticas é igual ao quadrado da razão de homotétia.

No Espaço:

20. Dos segmentos que de um ponto se podem conduzir para um plano, o menor é o segmento perpendicular.

21. A condição necessária e suficiente para que uma recta seja perpendicular a um plano é que seja perpendicular a duas rectas concorrentes do plano.

22. As intercepções de um plano com planos paralelos, são rectas paralelas.

23. Um paralelepípedo recto é equivalente a um paralelepípedo rectângulo da mesma altura e base equivalente.

24. Um prisma oblíquo é equivalente a um prisma recto de aresta lateral igual e cuja base seja a secção recta do prisma oblíquo.

25. Um prisma triangular recto é equivalente a três tetraedros da mesma altura e bases equivalentes.

Trigonometria

Modelos para verificar experimentalmente:

26. A variação das funções *seno* e *coseno* dos ângulos de 0 a 90° .

27. A variação das funções *tangente* e *cotangente* dos ângulos de 0 a 90° .

28. A variação das funções *seno*, *coseno*, *tangente* e *cotangente* dos ângulos de 0 a 90° .

É pouco, como se vê, o que está feito, e porventura ao professor encarregado do ensino convém fazer executar em classe estes modelos por um processo diverso, de mais fácil realização do que aquêle que temos seguido.

É evidente que assim deve ser, sempre que seja possível, mas de um modo ou de outro aqui fica bem expressa a nossa convicção sobre a necessidade de variar de processos adoptando-se na forma de ensinar, de preferência, o modo activo e experimental.

Aos doutos da especialidade o fazer aquilo que eu, só modestamente, posso formular.

Nota — Os modelos acima citados encontram-se em exposição na Secção de Trabalhos Manuais do Liceu Pedro Nunes de Lisboa.

N O T A

Parece que os novos métodos de ensino vão enfim penetrando (quão lentamente!) entre nós.

No número 13 da «Gazeta» demos aos leitores um artigo do prof. Cardoso Guerra sobre o ensino experimental da Geometria que, entre outros interesses, tinha o de relatar a *sua experiência*.

Hoje o prof. Lobo de Ávila relata-nos uma outra experiência não menos interessante — a que tem vindo a realizar na Secção de Trabalhos Manuais do Liceu de Pedro Nunes.

Bom será que todos os interessados pelo ensino das Matemáticas Elementares dêem a estes trabalhos toda a atenção que merecem. A «Gazeta» gostaria de recolher depoimentos sobre o assunto e de instituir sobre ele um largo debate ⁽¹⁾.

B. C.

⁽¹⁾ Publicámos no último número da «Gazeta» um extenso artigo do Dr. Sebastião e Silva sobre o ensino dos logaritmos no Liceu. Como nele não vejo nenhum facto novo que permita avançar ou esclarecer a discussão do *problema pedagógico* que aqui debatera, abstenho-me de o comentar.

DOIS PRINCÍPIOS PEDAGÓGICOS GERAIS

por J. W. A. Young

(de «Lectures on fundamental concepts of Algebra and Geometry»)

1. Não deve ser dada a definição formal de qualquer termo que não possa dar-se por meio de idéias obviamente mais simples do que o termo definido.

2. Não deve ser tentada a demonstração formal duma proposição que parece evidente ao aluno, sem demonstração.

A alguns pode parecer um desperdício de tempo quando se insiste no que é evidente. E, contudo, a grande maioria dos nossos compêndios o tornam necessário para assinalar absurdos pedagógicos. É difícil saber porque tantos dos nossos autores de compêndios ainda os incluem nas suas obras. Pode ser que os seus livros lhes pareçam cientificamente defeituosos se tudo não definirem e demonstrarem formalmente. Mas, pelo contrário, tal atitude é tão absurda científica como pedagógica. É por uma necessidade lógica que alguns termos ficam por definir e algumas proposições por demonstrar. «Mas», podem dizer, «não é de desejar a redução do número de proposições não demonstradas ao mínimo?» Não! Pedagogicamente, é muito indesejável e, cientifi-

camente, não é necessário. Para uma mentalidade amadurecida, o problema da redução a um mínimo do número de termos definidos e de tornar independentes as proposições não demonstradas dum conjunto é interessante e importante; para a mentalidade do aluno do liceu, o problema não tem sentido. Deixemos que sejam grandes o número de termos não definidos formalmente e o número do que podemos chamar proposições preliminares (isto é, proposições formalmente não demonstradas). Lembremo-nos que a nossa primeira finalidade não é ensinar os alunos a *saber* geometria, mas sim levá-los a *pensar* geometria. Tal pode ser conseguido somente suscitando o seu interesse pelas figuras e problemas geométricos e levando-os a pensar nisso *a seu modo*, primeiro. Os raciocínios dos próprios alunos devem ser dirigidos gradualmente para o modo formal. Não é nunca conveniente aprender a pensar geomêtricamente sendo obrigado a repetir os raciocínios doutrem sob uma forma que aparecerá, pela natureza do caso, como artificial e anti-natural.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

MOVIMENTO MATEMÁTICO

Secção a cargo de A. Pereira Gomes

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

No dia 20 de Março realizou-se a reunião ordinária da Assembléa Geral da S. P. M.

Aprovou-se por unanimidade o relatório e as contas da Direcção, relativos a 1942.

Procedeu-se à eleição dos corpos gerentes para

o biénio de 1943-44, cujos resultados foram os seguintes:

Mesa da Assembléa Geral: Presidente, Dr. Luiz Passos; 1.º secretário, Dr. Francisco Inácio da