NOTA

Parece que os novos métodos de ensino vão enfim penetrando (quão lentamente!) entre nós.

No número 13 da «Gazeta» demos aos leitores um artigo do prof. Cardoso Guerra sôbre o ensino experimental da Geometria que, entre outros interêsses, tinha o de relatar a *sua experiência*.

Hoje o prof. Lobo de Ávila relata-nos uma outra experiência não menos interessante — a que tem vindo a realizar na Secção de Trabalhos Manuais do Liceu de Pedro Nunes.

Bom será que todos os interessados pelo ensino das Matemáticas Elementares dêem a estes trabalhos tôda a atenção que merecem. A «Gazeta» gostaria de recolher depoimentos sôbre o assunto e de instituir sôbre êle um largo debate [1].

B. C.

[1] Publicámos no último número da «Gazeta» um extenso artigo do Dr. Sebastião e Silva sôbre o ensino dos logaritmos no Liceu. Como nêle não vejo nenhum facto novo que permita avançar ou esclarecer a discussão do *problema pedagógico* que aqui debatera, abstenho-me de o comentar.

DOIS PRINCÍPIOS PEDAGÓGICOS GERAIS

por **J. W. A. Young**

(de «Lectures on fundamental concepts of Algebra and Geometry»)

1. *Não deve ser dada a definição* formal *de qualquer têrmo que não possa dar-se por meio de idéias òbviamente mais simples do que o têrmo definido.*

2. *Não deve ser tentada a demonstração* formal *duma proposição que parece evidente ao aluno, sem demonstração.*

A alguns pode parecer um desperdício de tempo quando se insiste no que é evidente. E, contudo, a grande maioria dos nossos compêndios o tornam necessário para assinalar absurdos pedagógicos. É difícil saber porque tantos dos nossos autores de compêndios ainda os incluem nas suas obras. Pode ser que os seus livros lhes pareçam cientìficamente defeituosos se tudo não definirem e demonstrarem formalmente. Mas, pelo contrário, tal atitude é tão absurda científica como pedagògicamente. É por uma necessidade lógica que alguns têrmos ficam por definir e algumas proposições por demonstrar. «Mas», podem dizer, «não é de desejar a redução do número de proposições não demonstradas ao mínimo?» Não! Pedagògicamente, é muito indesejável e, cientìficamente, não é necessário. Para uma mentalidade amadurecida, o problema da redução a um mínimo do número de têrmos definidos e de tornar independentes as proposições não demonstradas dum conjunto é interessante e importante; para a mentalidade do aluno do liceu, o problema não tem sentido. Deixemos que sejam grandes o número de têrmos não definidos formalmente e o número do que podemos chamar proposições preliminares (isto é, proposições formalmente não demonstradas). Lembremo-nos que a nossa primeira finalidade não é ensinar os alunos a *saber* geometria, mas sim levá-los a *pensar* geometria. Tal pode ser conseguido sòmente suscitando o seu interêsse pelas figuras e problemas geométricos e levando-os a pensar nisso *a seu modo*, primeiro. Os raciocínios dos próprios alunos devem ser dirigidos gradualmente para o modo formal. Não é nunca conveniente aprender a pensar geomètricamente sendo obrigado a repetir os raciocínios doutrem sob uma forma que aparecerá, pela natureza do caso, como artificial e anti-natural.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

MOVIMENTO MATEMÁTICO

Secção a cargo de A. Pereira Gomes

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

No dia 20 de Março realizou-se a reünião ordinária da Assembléia Geral da S. P. M.

Aprovou-se por unanimidade o relatório e as contas da Direcção, relativos a 1942.

Procedeu-se à eleição dos corpos gerentes para o biénio de 1943-44, cujos resultados foram os seguintes:

Mesa da Assembléia Geral: *Presidente*, Dr. Luiz Passos; *1.º secretário*, Dr. Francisco Inácio da

Silva; *2.º secretário*, Dr.ª D. Maria Antónia Rêgo Chaves.

Direcção: *Presidente*, Dr. Aureliano de Mira Fernandes; *Vice-Presidente*, Dr. Manuel Peres; *Secretário Geral*, Dr. Bento Caraça; *Tesoureiro*, Dr. Alfredo da Costa Miranda; *1.º Secretário*, Dr. Carlos F. Carvalho; *2.º Secretário*, Eng. F. Carvalho Araújo; *Vogal*, Dr.ª D. Maria Henriqueta Trigo de Sousa Zanatti.

Delegados à Associação Portuguesa para o Progresso das Ciências: Dr. Bento Caraça, Eng. Francisco Leite Pinto.

Com o relatório da Direcção foi aprovado um voto de agradecimento à Imprensa, com menção especial da *Gazeta de Matemática* pela atenção com que seguiu a actividade da S P. M.

Em 25 de Março, às 21 horas, na Faculdade de Ciências (Secção de Matemática) realiza-se a cerimónia da posse dos novos corpos gerentes.

SEMINÁRIO DE FÍSICA TEÓRICA ANEXO AO C. E. M. DO PÔRTO

No passado mês de Fevereiro o Assistente Fernandes de Sá, da Faculdade de Ciências do Pôrto, efectuou duas comunicações sôbre alguns resultados obtidos no trabalho que vem realizando dentro do Seminário de Física Teórica anexo ao Centro de Estudos Matemáticos daquela Faculdade, que, como já aqui dissemos, tem desenvolvido a sua actividade sob a orientação do Dr. Guido Beck.

Na 1.ª comunicação, *Microestrutura geométrica do espaço-tempo electrónico*, definiu-se uma geometria do espaço métrico que no caso de 4 dimensões permite uma nova interpretação das equações de Dirac da cinemática do electrão. O espaço definido apresenta flutuações próprias, microscópicas e leva a considerar as propriedades do electrão como conseqüências da estrutura geométrica do contínuo espaço-tempo onde êle se move.

Pôsto que não houvesse a intenção de axiomatizar a geometria considerada, iniciou-se o seu estudo no caso $n=3$.

Na 2.ª comunicação, *Transformações relativistas das grandezas quânticas*, estudou-se o comportamento das formas bilineares $\psi^* M \varphi$ e das matrizes $\widetilde{\Psi} M \Phi$ em rotações espaciais e em transformações de Lorentz gerais; ψ e φ representam spinores, $\widetilde{\Psi}$ e Φ soluções matrizes da equação de Dirac, M é uma matriz do sistema base.

A. PEREIRA GOMES

SÔBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA NA SUÍÇA

por Maria do Pilar Ribeiro

III

2. Pareceu-nos interessante, sobretudo para os Clubes de Matemática, dar uma idéia de uma lição sôbre assunto tão curioso como o problema dos isoperímetros.

O curso de «Questões escolhidas de Geometria elementar» dado pelo prof. Hopf, é um curso do 3.º semestre muito freqüentado por professores de Liceu. Ocupa uma lição semanal de 2 tempos de 45 m.

Depois do estudo anteriormente feito dos poliedros de Euler, análise de várias demonstrações do teorema de Euler para os poliedros convexos, aplicações, noções de topologia combinatória, teorema da congruência de Cauchy para os poliedros convexos e de propriedades globais da curvatura em curvas e polígonos, começou nesta lição o estudo do problema dos isoperímetros que pode enunciar-se como segue: Dado um número $L>0$, determinar a curva plana fechada de comprimento L que limita uma área máxima. A solução é, como se sabe, a circunferência de raio $L/2\pi$. A área é então $y^* = L^2/4\pi$.

O problema pode ainda ser pôsto desta 2.ª maneira: Dado um número y exprimindo uma área, determinar a curva plana fechada de comprimento mínimo que limite esta área.

O problema data já da antiqüidade grega (é o problema de Dido) e já então foi indicada a solução. Parece que, depois, o próprio Galileo se teria ocupado dêle. Pela primeira vez Steiner, em 1830, dá duas demonstrações muito interessantes mas incompletas, e é Weierstrass, em 1870, que dêle dá a 1.ª demonstração completa. Analizam-se as duas demonstrações de Steiner e depois duas demonstrações modernas:

Steiner demonstra que: dada uma curva plana de comprimento L, que não seja a circunferência, é sempre possível determinar uma outra curva plana do mesmo comprimento, limitando uma área maior.

1.ª hipótese. A curva não é convexa. Neste caso pode sempre traçar-se uma tangente comum a dois pontos da curva e tomar-se o simétrico dum dos arcos em relação à tangente. A nova curva tem o mesmo comprimento da anterior, mas limita uma área maior. Podemos passar, pois, ao exame da 2.ª hipótese: a curva é convexa. Seja L o seu comprimento e y a área que limita. Tomemos uma corda AB tal que dois arcos determinados por ela tenham o mesmo comprimento. A área y fica decomposta em duas, y_1 e y_2. Seja $y_1 < y_2$. Tomando o simétrico do arco que limita a área y_2 em relação a AB, obtenho uma curva do mesmo comprimento L e limitando uma área $2y_2 > y_1 + y_2$.

Podemos agora limitarmo-nos às curvas convexas tendo um eixo de simetria.

É sempre possível, se a curva não é uma circunferência, determinar um ponto P tal que o triângulo $[ABP]$ não seja rectângulo em P. A sua área será máxima, supondo constante os comprimentos dos lados AP e BP, quando o ângulo $A\hat{P}B$ fôr recto. Então podemos traçar um triângulo rectângulo de catetos iguais a $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ sôbre os quais se podem construir arcos congruentes aos anteriormente determinados pelo ponto P sôbre o arco $\widehat{AB}$. Formando a figura simétrica da assim obtida em relação a AB, ficamos com uma curva de comprimento L, limitando uma área maior.

E Steiner concluia daqui: Como êste processo era válido para tôdas as curvas que não fôssem a circunferência, esta era aquela curva que limitava uma área máxima.

Esta conclusão não é, como fàcilmente se verifica, legítima: Há problemas de extremais que não têm solução; Steiner não deu senão um processo para construir uma nova curva a partir de curvas que não são circunferências, e nada afirmou quanto à existência duma curva limitando uma área máxima.

Um exemplo de problema análogo, sem solução, é o seguinte: Dado um segmento de recta AB e uma recta AC de direcção diferente de AB, determinar uma curva $\widehat{AB}$ tangente em A a AC e cujo comprimento seja mínimo. É fácil ver que dada uma curva de comprimento L é sempre possível determinar uma outra, satisfazendo ambas às condições impostas, e de comprimento menor. A menor distância de A a B é o segmento $\overline{AB}$ que só seria solução quando as direcções de AC e AB coincidissem. E pode esclarecer-se o raciocínio de Steiner estabelecendo o paralelo com o seguinte:

Consideremos a sucessão dos números naturais

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

e seja $\varphi(n)$ um processo que permite dado um número n obter um maior (o seu quadrado, por exemplo). Êste processo aplica-se a todos os números naturais, excepto 1.

Concluir-se-ia com Steiner: Dado um número qualquer natural, diferente de 1, é sempre possível determinar um maior. Então 1 é o maior de todos.

Steiner deu ainda uma 2.ª demonstração do mesmo problema; mas incorreu no mesmo êrro. Ela corresponde à 2.ª maneira de formular o problema e é, como a anterior, interessante e engenhosa.

Êle demonstra que dada uma área y limitada por uma curva de comprimento L, é sempre possível, se a curva não fôr a circunferência, determinar uma curva de comprimento $L^* < L$ limitando a mesma área.

Podemos, como anteriormente, analizar o caso das curvas convexas.

Tomemos uma recta d, de direcção qualquer, mas cuja direcção não é a dum eixo de simetria para a curva, e as cordas perpendiculares a esta recta. Se transportarmos estas cordas, paralelamente a si mesmas, e de modo que os seus meios fiquem sôbre a recta d, obteremos uma nova curva c' simétrica em relação a d. Esta curva limita uma área $y^* = y$ (princípio de Cavaliéri) e tem um comprimento $L' < L$ (determinem-se os comprimentos das duas curvas).

Como a circunferência é a única curva para a qual não existe uma direcção a que não corresponda um eixo de simetria, Steiner tirou conclusões análogas às anteriores.

Além de Steiner, preocuparam-se com o problema os irmãos João e Jacob Bernouilli e Euler que deram a condição necessária. O problema estava nos fundamentos do cálculo das variações, mas só, com Weierstrass (1879), a análise atinge o desenvolvimento que lhe permite dar então uma condição suficiente, embora por um processo nada elementar.

Schwarz, em 1884, dá também uma demonstração, mas embora se não sirva de grande aparelhagem matemática, a sua demonstração também não é fácil. Coloca a questão para os polígonos de n lados iguais, não regulares, e demonstra que os polígonos nestas condições que ocupam uma maior área são os regulares. Por considerações para as curvas circunscrítas a polígonos, demonstra ser a circunferência a que limita uma área maior.

Podem consultar-se para êste problema os livros: *Blaschke* — «Kreis und Kugel» e *Bonnesen* — «Les problèmes des isoperimétres et des isépiphanes».

As duas demonstrações modernas aparecem em 1902 com Hurwitz e em 1939 com F. Schmidt.

O professor Hopf desenvolveu estas duas demonstrações na lição seguinte, discutiu-as e mostrou uma conexão inesperada entre a teoria das séries trigonométricas e o problema dos isoperímetros que é posta em relêvo pela demonstração de Hurwitz.

3. O 3.º curso a que nos referimos é o de geometria diferencial regido pelo prof. Plancherel.

Compreende 4 tempos semanais de 45 m sendo um dêles dedicado à correcção de exercícios propostos em lições anteriores.

Foram até agora resolvidos 36 exercícios dos quais transcrevemos alguns que podem dar uma idéia do nível do ensino neste 3.º semestre da Escola.

1) Demonstrar que, se o plano osculador a uma curva torsa C é tangente a uma esfera fixa de centro O: 1.º o plano rectificante passa pelo ponto O; 2.º a razão entre o raio de curvatura $\rho=1/k$ e o raio de torsão $\sigma=1/\tau$ é uma função linear do arco $\rho/\sigma=As+B$ e 3.º estabelecer os recíprocos.

2) Demonstrar que o plano tangente à superfície $xyz=a^3$, limita com os planos de coordenadas um tetaedro de volume constante.

3) Consideremos a família dos planos rectificantes duma curva. Mostrar que a característica do plano rectificante é o eixo instantâneo de rotação do triedro de Frenet.

4) Une-se um ponto fixo O a um ponto variável P que se desloca sôbre uma superfície esférica. Determinar o invólucro dos planos que passam por P perpendiculares a OP.

5) Demonstrar que a superfície $4a^2z^2=(x^2-2a^2)(y^2-2a^2)$ possue uma linha de pontos umbilicais e que esta linha é a intersecção desta superfície com a esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$.

6) Demonstrar a proposição seguinte: Se a curva de intersecção de duas superfícies é uma linha de curvatura para cada uma das duas superfícies, estas cortam-se ao longo desta linha sob um ângulo constante e reciprocamente. (Utilizar a fórmula de O. Rodrigues).

7) Demonstrar que as torsões de duas linhas assintóticas que passam por um ponto duma superfície são iguais e de sinais contrários e que o quadrado da torsão da linha assintótica é igual à curvatura total com o sinal trocado.

ANTOLOGIA

O «DISCRETO» E O «CONTÍNUO»

por E. T. Bell

(de «Men of mathematics», traduzido em francês com o título «Les grands mathématiciens»)

Desde os tempos mais remotos, duas tendências inversas, que por vezes se auxiliam mùtuamente, têm governado o desenvolvimento geral da Matemática: uma refere-se ao «discreto»; a outra, ao «contínuo».

O discreto aplica-se a descrever tôda a Natureza e tôda a Matemática, atòmicamente, por meio de elementos distintos, individualmente identificáveis, como os tijolos duma parede, os números 1, 2, 3, etc. O contínuo procura esquematizar os fenómenos naturais, o curso dum planeta sôbre a sua órbita, a passagem duma corrente eléctrica, os movimentos periódicos das marés e uma multidão de outros fenómenos que nos induzem a crer que conhecemos a Natureza segundo a fórmula mística de Heraclito: «Tudo flue». Hoje, êste «fluir» ou o seu equivalente «a continuïdade» tornou-se uma idéia tão pouco clara que é quási vasia de sentido. Mas deixemos isso por agora.

Intuïtivamente, nós *sentimos* que *sabemos* o que se deva entender por «movimento contínuo» como o duma ave ou duma bala no ar, ou a queda duma gota da chuva. Êste movimento é *doce;* não se faz por *sacadas*, é *ininterrupto.* No movimento contínuo ou, mais geralmente, na própria conti-