os polígonos nestas condições que ocupam uma maior área são os regulares. Por considerações para as curvas circunscritas a polígonos, demonstra ser a circunferência a que limita uma área maior.

Podem consultar-se para êste problema os livros: *Blaschke* — «Kreis und Kugel» e *Bonnesen* — «Les problèmes des isoperimétres et des isépiphanes».

As duas demonstrações modernas aparecem em 1902 com Hurwitz e em 1939 com F. Schmidt.

O professor Hopf desenvolveu estas duas demonstrações na lição seguinte, discutiu-as e mostrou uma conexão inesperada entre a teoria das séries trigonométricas e o problema dos isoperímetros que é posta em relêvo pela demonstração de Hurwitz.

3. O 3.º curso a que nos referimos é o de geometria diferencial regido pelo prof. Plancherel.

Compreende 4 tempos semanais de 45 m sendo um dêles dedicado à correcção de exercícios propostos em lições anteriores.

Foram até agora resolvidos 36 exercícios dos quais transcrevemos alguns que podem dar uma idéia do nível do ensino neste 3.º semestre da Escola.

1) Demonstrar que, se o plano osculador a uma curva torsa C é tangente a uma esfera fixa de centro O: 1.º o plano rectificante passa pelo ponto O; 2.º a razão entre o raio de curvatura $\rho=1/k$ e o raio de torsão $\sigma=1/\tau$ é uma função linear do arco $\rho/\sigma=As+B$ e 3.º estabelecer os recíprocos.

2) Demonstrar que o plano tangente à superfície $xyz=a^3$, limita com os planos de coordenadas um tetaedro de volume constante.

3) Consideremos a família dos planos rectificantes duma curva. Mostrar que a característica do plano rectificante é o eixo instantâneo de rotação do triedro de Frenet.

4) Une-se um ponto fixo O a um ponto variável P que se desloca sôbre uma superfície esférica. Determinar o invólucro dos planos que passam por P perpendiculares a OP.

5) Demonstrar que a superfície $4a^2z^2=(x^2-2a^3)(y^2-2a^2)$ possue uma linha de pontos umbilicais e que esta linha é a intersecção desta superfície com a esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$.

6) Demonstrar a proposição seguinte: Se a curva de intersecção de duas superfícies é uma linha de curvatura para cada uma das duas superfícies, estas cortam-se ao longo desta linha sob um ângulo constante e reciprocamente. (Utilizar a fórmula de O. Rodrigues).

7) Demonstrar que as torsões de duas linhas assintóticas qne passam por um ponto duma superfície são iguais e de sinais contrários e que o quadrado da torsão da linha assintótica é igual à curvatura total com o sinal trocado.

ANTOLOGIA

O «DISCRETO» E O «CONTÍNUO»

por E. T. Bell

(de «Men of mathematics», traduzido em francês com o título «Les grands mathématiciens»)

Desde os tempos mais remotos, duas tendências inversas, que por vezes se auxiliam mùtuamente, têm governado o desenvolvimento geral da Matemática: uma refere-se ao «discreto»; a outra, ao «contínuo».

O discreto aplica-se a descrever tôda a Natureza e tôda a Matemática, atòmicamente, por meio de elementos distintos, individualmente identificáveis, como os tijolos duma parede, os números 1, 2, 3, etc. O contínuo procura esquematizar os fenómenos naturais, o curso dum planeta sôbre a sua órbita, a passagem duma corrente eléctrica, os movimentos periódicos das marés e uma multidão de outros fenómenos que nos induzem a crer que conhecemos a Natureza segundo a fórmula mística de Heraclito: «Tudo flue». Hoje, êste «fluir» ou o seu equivalente «a continuïdade» tornou-se uma idéia tão pouco clara que é quási vasia de sentido. Mas deixemos isso por agora.

Intuïtivamente, nós *sentimos* que *sabemos* o que se deva entender por «movimento contínuo» como o duma ave ou duma bala no ar, ou a queda duma gota da chuva. Êste movimento é *doce;* não se faz por *sacadas*, é *ininterrupto*. No movimento contínuo ou, mais geralmente, na própria continuïdade, os números *individualizados* 1, 2, 3, não constituem a imagem matemática adequada. Os pontos dum segmento de recta, por exemplo, não constituem entidades tão separadas como os elementos da sucessão 1, 2, 3,..., *em que a passagem dum têrmo ao seguinte é sempre a mesma* (dêste modo: 1, $1+1=2$, $1+2=3$, e assim sucessivamente): porém, *entre* dois pontos duma recta, por muito próximos que estejam, nós podemos sempre *encontrar,* ou pelo menos *imaginar, um outro* ponto: *não há passagem imediata dum ponto ao seguinte,* por isso que não há pontos *consecutivos.*

A concepção da «*continuïdade*» quando aplicada à maneira de Newton, de Leibniz e dos seus sucessores, conduz ao domínio ilimitado do Cálculo Infinitesimal e das suas numerosas aplicações à Ciência e à Técnica; conduz a tudo que se chama hoje a *Análise Matemática.* O outro quadro, o do *discreto,* é o domínio da Álgebra, da Teoria dos Números, da Lógica Matemática. A Geometria participa simultâneamente da natureza do contínuo e do discreto.

Uma das grandes missões dos matemáticos de hoje é harmonizar o contínuo e o discreto, eliminar dêles tôda a obscuridade e encorporá-los numa matemática alargada.

Tradução de J. SEBASTIÃO E SILVA

SÔBRE AS MODERNAS TENDÊNCIAS DA MATEMÁTICA

por ***E. T. Bell***

(de «Men of mathematics», traduzido em francês com o título «Les grands mathématiciens»)

Poincaré foi o último sábio que conseguiu abraçar pràticamente todo o domínio das matemáticas, puras e aplicadas. Crê-se geralmente que seria impossível a um cérebro humano de hoje assimilar mais de duas das quatro divisões principais das matemáticas: aritmética, álgebra, geometria, análise, sem falar da astronomia e da física matemática, e ainda menos de realizar aí qualquer obra criadora de primeira ordem; ora, mesmo em 1880, na época em que se abria a grande carreira de Poincaré, pensava-se ordinàriamente que tinha sido Gauss o último matemático universal; não será, portanto, impossível que algum futuro Poincaré consiga, uma vez mais, cultivar o domínio completo.

À medida que as matemáticas se desenvolvem, contraem-se e dilatam-se alternadamente, um pouco à maneira dum dos modelos do universo de Lemaître. Actualmente, nós atravessamos um período explosivo de expansão, e é absolutamente impossível a um ser humano familiarizar-se com a enorme massa caótica de matemáticas que tem inundado o mundo desde 1900. Mas já, em certos sectores, se vê desenhar uma tendência para a contracção, que nos deve regosijar; acontece isto, por exemplo, com a álgebra, em que a introdução em grande escala, dos métodos axiomáticos torna imediatamente a questão mais abstracta, mais geral e menos desconexa. A maneira moderna de abordar os problemas faz descobrir analogias inesperadas, que em certos casos são mesmo identidades disfarçadas; e pode conceber-se que a próxima geração de algebristas não terá necessidade de conhecer tudo o que é agora considerado importante, porque muitos dos pontos particulares difíceis foram reduzidos, e encorporados em princípios gerais mais simples e de maior alcance.

Tradução de J. SEBASTIÃO E SILVA

OS FILÓSOFOS E A MATEMÁTICA

por E. T. Bell

(de «Men of mathematics», traduzido em francês com o título «Les grands mathématiciens»)

Por um dos veredictos mais irónicos que se têm conhecido no decurso do longo processo da experiência contra a especulação, a descoberta de Ceres coincidiu com a publicação dum ataque sarcástico do famoso filósofo G. W. Hegel (1770-1831) contra a conjectura dos astrónomos, na investigação dum oitavo planeta. Se êles prestassem um pouco de atenção à Filosofia, declarava Hegel, veriam imediatamente que não pode haver senão sete planetas — nem mais um, nem menos um. Tais investigações representavam, portanto, uma estúpida perda de tempo. Sem dúvida, êste ligeiro lapso de Hegel foi explicado, bem ou mal, pelos seus discípulos, mas o que êles não conseguiram foi suprimir as centenas de pequenos planetas que se riem do seu anátema olímpico.

Não é desprovido de interêsse notar, de passagem, o que pensava Gauss a respeito dos filósofos que se ocupam de questões científicas, de que não percebem nada; isto aplica-se, em particular, aos filósofos que esgravatam nos fundamentos da Matemática, sem terem prèviamente aguçado o bico sôbre algum duro edifício matemático. Inversamente, isto explica a razão por que B. Russell (1872), A. Whitehead (1861), David Hilbert (1862), da nossa época, trouxeram contribuïções importantes à filosofia das matemáticas: é que são matemáticos.

Escrevendo ao seu amigo Schumacher, a 1 de Novembro de 1844, Gauss declara: «Vê-se a mesma coisa (a incompetência matemática) entre os filósofos contemporâneos Schelling, Hegel, N. von Essenbeck, e os seus sucessores; não nos fazem êles pôr os cabelos em pé com as suas definições? Leia na história da filosofia antiga o que os grandes homens dessa época, Platão e outros (exceptuo Aristóteles) davam em matéria de explicações. E mesmo com o próprio Kant, as coisas muitas vezes não se passam melhor; a meu ver, a sua distinção entre juízos analíticos e sintéticos é uma daquelas idéias que, ou caem na banalidade, ou são falsas». Quando escrevia estas linhas, em 1844, Gauss estava em plena posse da geometria não euclideana, que era já uma refutação suficiente do que diz Kant sôbre o «espaço»...

Não se vá porém concluir dêste exemplo isolado, relativo a pormenores técnicos puramente matemáticos, que a Filosofia não era apreciada por Gauss; todos os progressos filosóficos tinham para êle grande interêsse, conquanto desaprovasse muitas vezes os meios pelos quais tinham sido alcançados.

Tradução de J. SEBASTIÃO E SILVA

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 5

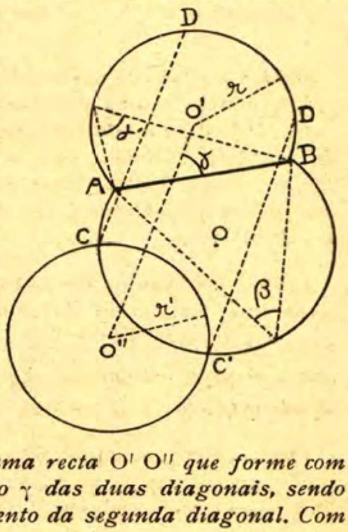
1255 — Resolva a equação $5-(x^2-1/2)^2/2=3x^2$ determinando o valor numérico das raízes reais até à aproximação de uma décima. R: *As raizes da equação são dadas pela expressão* $\mathrm{x}=\pm[(-10\pm 256^{1/2}):4]^{1/2}=\pm[(-10\pm 16):4]^{1/2}$ *e as raizes reais são:* $\mathrm{x}=\pm(3/2)^{1/2}\sim\pm 1{,}2$.

1256 — Simplifique a expressão $x^{-1/2}\,y^2\,\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{y^{-1}}}$ e determine o seu valor numérico para $x=1{,}3273$ e $y=0{,}3456$ utilizando logaritmos. R: *A expressão simplificada é* $\mathrm{x}\,.\,\mathrm{y}^{7/3}$ *donde* $\log \mathrm{x}+7/3\log \mathrm{y}=0{,}12297+7/3\times\bar{1}{,}53857=\bar{1}{,}04630$ *e para valor numérico da expressão* $0{,}11125$.

1257 — Sabe-se que a área de um terreno com a forma rectangular é igual a 2,25 hectares. Mediu-se o ângulo que faz uma diagonal com um dos lados, obtendo-se o valor $37^\circ\,26'\,30''$. Calcule o comprimento e a largura do terreno, dispondo de uma tábua de logaritmos. R: *A área do rectângulo em função da diagonal é dada por* $\mathrm{A}=\mathrm{d}^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ *se fôr* d *a diagonal e* α *o seu ângulo com um dos lados. No caso pôsto é* $225=\mathrm{d}^2\operatorname{sen}37^\circ 26'\,30''\cos 37^\circ 26'\,30''$ *e por isso* $\log\mathrm{d}=1/2(\log 225+\operatorname{colg}\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{colg}\cos\alpha)=1/2(2{,}35218+0{,}21613+0{,}10019)=1{,}33425$. *Por outro lado, se forem* a *e* b *os lados do rectângulo serão* $\mathrm{a}=\mathrm{d}\operatorname{sen}\alpha$ *e* $\mathrm{b}=\mathrm{d}\cos\alpha$; *logo* $\log\mathrm{a}=\log\mathrm{d}+\log\operatorname{sen}\alpha=1{,}33425+\bar{1}{,}78387=1{,}11812$ *e* $\mathrm{a}=131\,\mathrm{m}$; *e* $\log\mathrm{b}=\log\mathrm{d}+\log\cos\alpha=1{,}33425+\bar{1}{,}89981=1{,}23406$ *e* $\mathrm{b}=172\,\mathrm{m}$.

1258 — Defina superfície de revolução. Indique, sem definir, alguns sólidos limitados, total ou parcialmente, por tais superfícies.

1259 — Diga como construia um quadrilátero, dados dois ângulos opostos, as diagonais e o ângulo que estas fazem entre si. R: *Seja* AB *uma das diagonais que é vista dos vértices* D *e* C *sob os ângulos* α *e* β, *dados, (ângulos opostos). Construem-se os lugares dos pontos sob os quais é visto o segmento* AB *segundo aquêles ângulos. Sejam* O *e* O' *os centros dos arcos que constituem tais lugares. Por um dêles* O' *(por exemplo) centro do arco de raio* r, *tracemos uma recta* O' O'' *que forme com* AB *o ângulo dado* γ *das duas diagonais, sendo* O' O'' *o comprimento da segunda diagonal. Com*



centro em O'' *e raio* r, *traça-se uma circunferência que cortará ou não o arco de centro* O. *Se houver pontos de encontro, seja* C *um dêles. Por* C *traço uma paralela a* O' O'' *que encontrará o arco de centro* O' *em* D. ACBD *é um um dos quadriláteros que se podem construir, e o outro* AC'BD'. *É fácil notar que pode haver* 2, 1 *ou* 0 *soluções.*

1260 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação $x-(2y+5):5=100/6-3y$. R: *A equação proposta é equivalente a* $30x+78y=530$, *equação que não tem soluções inteiras, o mesmo sucedendo à proposta.*

Soluções dos n.os 1255 a 1260 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 4

1261 — Determine o parâmetro m de modo que a equação $5x^2+(2m+1)x+m-2=0$ tenha duas raízes x' e x'' que satisfaçam a relação $2x'+5x''-1=0$. R: *As equações que resolvem o problema são* $2x'+5x''=1$; $x'+x''=-(2m+1):5$ *e* $x'x''=(m-2):5$. *A resolução do sistema dá para* m *os valores* $m'=-4$ *e* $m''=1/8$.

1262 — Escreva e simplifique o têrmo médio do desenvolvimento de $\left(\sqrt{2a}-\sqrt{1/2a}\right)^6$. R: $T_4=-20$.

1263 — Escreva o têrmo geral da sucessão $\frac{3}{-3}, \frac{6}{1}, \frac{9}{5}, \frac{12}{9} \cdots$ e calcule o seu limite quando o número de termos cresce indefinidamente. R: *O têrmo geral é* $u_n=\frac{3n}{4n-7}$ *e* $\lim_{n\to\infty} u_n=3/4$.

1264 — A altura de um trapézio rectângulo mede 198,15 metros e uma das suas bases é dupla da outra. Calcule a medida do *menor* ângulo interno do trapézio, sabendo que a base maior mede 426,38 metros. Utilize logaritmos. R: *A equação que resolve o problema é* $198{,}15=213{,}19 \operatorname{tg}\alpha$ *donde* $\alpha=42^\circ 54' 20''$.

1265 — Os ângulos α e β são dois ângulos positivos que satisfazem às relações: $\alpha+\beta<\pi/2$; $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{2}/2$; $\cos\beta=1/2$. Calcule $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. R: *Dos dados do problema conclue-se que* $\operatorname{tg}\alpha=1$ *e* $\operatorname{tg}\beta=\sqrt{3}$ *donde* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-(2+\sqrt{3})$.

1266 — Em que quadrantes são simultâneamente crescentes as funções: tangente e secante. Justifique a sua resposta.

1267 — Demonstre que tôda a recta conduzida pelo ponto de intercepção das diagonais de um paralelogramo é dividida por êste ponto e pelos dois lados opostos em duas partes iguais. R: *É fácil ver que com a recta, uma diagonal e os dois lados opostos cortados pela recta, se formam dois triângulos iguais de que dois lados são os segmentos em que fica dividida a recta; opondo-se êsses dois lados a ângulos iguais êles são, por isso, iguais.*

1268 — A secção feita num cone de revolução por um plano que passa pelo eixo é um triângulo eqüilátero cuja área é $\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Calcule a área total do cone. R; *A área do triângulo eqüilátero em função do lado (geratriz do cone) é* $\sqrt{3}=g^2\sqrt{3}/4$, *donde* $g=2$ cm. *O raio da base do cone é* $g/2=1$ cm *e a área total* $A=\pi r(g+r)=3{,}14\times1(2+1)=9{,}42\ \text{cm}^2$.

Soluções dos n.os 1261 a 1268 de J. Calado.

I. S. C. E. F. — Exame de Aptidão, 1-8-1942

1269 — *a)* Diga que propriedades conhece das equações do 2.º grau. *b)* Resolva a desigualdade $\frac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-1)}<0$. R: *A desigualdade dada implica um dos dois sistemas:*

$$\text{a)}\ \begin{cases}(x+3)(x-2)>0\\(x+1)(x-1)<0\end{cases}\quad\begin{cases}x<-3 \text{ ou } x>2\\-1<x<1\end{cases}\quad \textit{impossível};$$

$$\text{b)}\ \begin{cases}(x+3)(x-2)<0\\(x+1)(x-1)>0\end{cases}\quad\begin{cases}-3<x<2\\x<-1 \text{ ou } x>1\end{cases}$$

$$-3<x<-1 \text{ ou } 1<x<2.$$

1270 — Calcule o valor numérico da expressão

$$A=\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{1/3} \quad \text{para } a=141{,}43 \quad b=20{,}04.$$

$$\text{R:}\quad A=\left(\frac{ab(b-a)}{b^2-a^2}\right)^{1/3}=\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{1/3},$$

$$\log A=\frac{1}{3}(\log 141{,}43+\log 20{,}04+\operatorname{colog} 161{,}47)=$$

$$=\frac{1}{3}(2{,}1505415+1{,}3018977+\bar{3}{,}7919082)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 1{,}2443474=0{,}4147825,$$

donde $A=2{,}59885$.

1271 — *a)* Enuncie as propriedades que relacionam a medida de um ângulo cujos lados intersectam arcos de circunferência com as medidas dêsses arcos. *b)* Dadas duas circunferências concêntricas, calcule a área do segmento determinado no círculo de raio maior por uma tangente à circunferência de raio menor. Caso particular: $R=2r$.

R: *Seja* O *o centro das duas circunferências de raios* R *e* r $(r < R)$, $\overline{AB}$ *a corda da circunferência de raio* R *tangente à de raio* r, *e* 2α *a medida em radianos do ângulo* AOB. *Tem-se:* $A = \pi R^2 \cdot 2\alpha/2\pi$ — *área* $[AOB] = \alpha R^2 - r\sqrt{R^2-r^2} = R^2 \arccos\frac{r}{R} - r\sqrt{R^2-r^2}$. *Para* $R=2r$, *vem*

$$A = 4r^2 . \arccos\frac{1}{2} - r\sqrt{3r^2} = (4\pi/3 - \sqrt{3})\, r^2 .$$

1272 — *a)* Defina poliedro regular e descreva os poliedros regulares que conhece. *b)* Dado um cubo de lado L, inscreve-se nêle uma esfera e nela um cubo de lado l. Calcule a razão dos volumes dos dois cubos. R: *O diâmetro da esfera é igual ao lado do cubo circunscrito e igual à diagonal do cubo inscrito. Logo* $D^2 = L^2 = 3l^2$ *donde* $L^2/l^2 = 3$. *A razão dos volumes é* $V/v = L^3/l^3 = 3\sqrt{3}$.

1273 — Calcule o perímetro e a área de um trapézio rectângulo conhecendo a altura: $h = 7{,}45$ metros, a base menor: $b = 25{,}14$ metros e o ângulo obtuso que lhe é adjacente: $\alpha = 108^\circ 37' 43''$. R: *Designando por* B *a base maior, tem-se* $B - b = h \times \operatorname{tg}(\alpha - \pi/2) = 7{,}45 \times \operatorname{tg} 18^\circ 37' 43''$ *e* $l = h/\cos(\alpha - \pi/2) = 7{,}45/\cos 18^\circ 37' 43''$, *donde* $\log B - b = 0{,}3999062$ *ou* $B - b = 2{,}5113$ *e* $\log l = 0{,}8955229$ *donde* $l = 7{,}8618$. *Perímetro:* $P = B + b + h + l = 68{,}1$ m.

Área: $$S = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{52{,}79}{2} \cdot 7{,}45 = 196{,}6 \text{ m}^2 .$$

1274 — Mostre que, se x, y e z são três números em progressão geométrica, é válida a igualdade $(x+y+z)(x-y+z) = x^2 + y^2 + z^2$. R: *A igualdade a verificar reduz-se a* $(x+z)^2 - y^2 = x^2 + y^2 + z^2$ *ou, finalmente, a* $xz = y^2$. *Se* $y = xr$ *e* $z = xr^2$, *tem-se imediatamente* $xz = x^2 r^2 = y^2$.

Soluções dos n.os 1269 a 1274 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico

Ponto n.º 4

1275 — Três proprietários têm de participar nas despesas de um canal de irrigação proporcionalmente à extensão das suas propriedades e na razão inversa das distâncias das mesmas propriedades ao canal. Tendo as despesas do canal importado em 200 contos, calcular a parte a pagar por cada proprietário, sabendo que as propriedades têm de extensão 65 hectares, 96,2 hectares e 70 hectares, e que as suas distâncias ao canal são respectivamente 250 metros, 100 metros e 200 metros. R: *Sejam* x, y *e* z *as partes a pagar pelos proprietários. As equações que resolvem o problema são* $x + y + z = 200$ *e* $\frac{250x}{65} = \frac{100y}{96{,}2} = \frac{200z}{70}$ *o que dá os valores* x=33.078$88, y=122.391$86 *e* z=44.529$26.

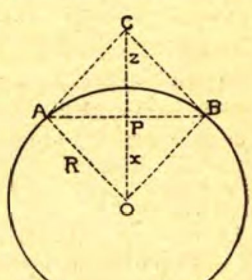
1276 — Determinar k de modo que $2x(x+2) - k^2 > 1$ seja verificada para todos os valores de x. R: *Deveria ser negativo o descriminante do trinómio, isto é,* $2 + 2(k^2+1) < 0$, *desigualdade que é impossível, logo o problema não tem solução.*

1277 — Mostre que num triângulo rectângulo de hipotenusa a é $\frac{\operatorname{tg} B}{1 + \sec B} = \frac{b}{a+c}$. R: *Se forem* b *e* c *os catetos opostos aos ângulos* B *e* C *será* $\operatorname{tg} B = b/c$ *e portanto* $\frac{\operatorname{tg} B}{1 + \sec B} = \frac{b}{a+c}$.

1278 — Determine a área do losango circunscrito a uma circunferência de raio 3 centímetros, sabendo que um dos ângulos do losango mede 60º. R: *Se forem* d_1 *e* d_2 *as diagonais do losango, será* $\frac{d_1}{2} = \frac{3}{\operatorname{sen} 30}$ *e* $\frac{d_2}{2} = \frac{3}{\operatorname{sen} 60}$ *logo* $d_2 = 12$ *e* $d_1 = 4\sqrt{3}$, *logo a área mede* $24\sqrt{3}$ cm².

1279 — Determinar a área de um trapézio isósceles inscrito numa circunferência de raio R, sendo uma das bases igual ao diâmetro e um dos lados não paralelos igual a a. R: *As equações que resolvem o problema são:* $a^2 = x^2 + (R-y)^2$ *e* $R^2 = x^2 + y^2$; *sendo* x *a altura do trapézio e* y *metade da base menor. Então será* $x = \frac{a}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2}$ *e* $y = R - \frac{a^2}{2R}$ *e a área é* $A = \left(2R - \frac{a^2}{2R}\right)\left(\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}\right)$.

1280 — Dada uma esfera de raio R, determinar a distancia do centro a que se deve tirar um plano secante para que seja igual ao volume da esfera a soma dos volumes do cone circunscrito à esfera com base na secção dêsse plano e do cone com a mesma base e vértice no centro da esfera. R: *Seja* y *o raio de secção produzido na esfera pelo plano,* x *a distância do centro da esfera ao plano secante e* z *a altura do cone circunscrito. A igualdade dos volumes dá-nos a equação* $4R^3 = y^2(x+z)$. *Do triângulo rectângulo* [ACO], *tira-se a relação* $y^2 = xz$; *e do triângulo rectângulo* [APO] *deduz-se a equação* $y^2 + x^2 = R^2$. *Estas três equações permitem determinar o valor pedido que é* $x = R(\sqrt{5} - 2)$. *Note-se que para a eliminição basta substituir* y^2 *tirado da 2.ª equação na 1.ª e na 3.ª, dividindo membro a membro as igualdades obtidas.*



Soluções dos n.os 1275 a 1280 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º exame de freqüência, 1942

1281 — Discuta o sistema $9x+my-z=4$, $4mx-2y+(m-1)z=m$ e $5x+(2m-1)y-3z=3(m+2)$ onde m é um número real. R: *Determinado para* $m\neq-1, 35/9$. *Indeterminado para* $m=-1$. *Incompatível para* $m=35/9$.

1282 — Determine a equação do lugar geométrico dos pontos cujas distâncias às duas rectas de equações $ay+bx+c=0$ e $a'y+b'x+c'=0$ estão numa relação k conhecida.

R: $\dfrac{ay+bx+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm k\dfrac{a'y+b'x+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$.

1283 — Deduza a equação dum plano que passe pela recta $x=3z+2$, $y=-z+3$ e diste $\sqrt{3}$ do ponto $(1,2,-3)$. R: $x+3{,}675y+0{,}675z-10{,}025=0$ *e* $x+0{,}925y-2{,}075z-4{,}775=0$.

1284 — Prove, sem desenvolver o determinante, que a equação $\begin{vmatrix} x & c & 1 \\ b & x & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}=0$ admite as raízes 1 e c.

R: *Para* $x=1$ *a* 1.ª *e a* 3.ª *linhas são iguais. Para* $x=c$ *a* 2.ª *e a* 3.ª *colunas são proporcionais.*

1285 — Dada a recta $r=Ax+By+C=0$ e um ponto $M(x_0y_0)$ efectue uma rotação dos eixos supostos rectangulares em tôrno da origem de modo que a recta fique paralela ao novo eixo dos XX. Deduza da operação a fórmula da distância dum ponto a uma recta. R: *Efectuar a rotação, calcular a distância nesse novo sistema e, em seguida, desfazer a rotação.*

1286 — Deduza a equação do plano que passa pelo ponto $M(2,-3,8)$ é paralelo à recta r_1 e perpendicular ao plano Π_1,

$$r_1\equiv x=\frac{y}{4}=\frac{z}{8} \quad e \quad \Pi_1\equiv x-2y+3z-8=0.$$

R: $28(x-2)+5(y+3)-6(z-8)=0$.

Soluções dos n.os 1282, 1284 e 1286 de A. Sá da Costa, e dos n.os 1281, 1283 e 1285 de J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 1.º exame de freqüência, 20-2-1942

1287 - Calcular $[1+i+i^2+\dots+i^{n-1}]^n$. Discussão ($n$ inteiro e positivo). R: $S=\left[\dfrac{1-i^n}{1-i}\right]^n$. *Se* $n=4p$ *é* $i^n=1$ *e* $S=0$; *se* $n=4p+1$ *é* $i^n=i$ *e* $S=1^n=1$; *se* $n=4p+2$ *é* $i^n=-1$ *e* $S=\left(\dfrac{2}{1-i}\right)^n=2^{2p+1}\times\left[\cos\left(p\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(p\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=(-1)^p2^{2p+1}i$; *se* $n=4p+3$ *é* $i^n=-i$ *e* $S=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=\cos\left(2p\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(2p\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-i$.

1288 — Verificar que os três planos de eqs. $4x-y-z=0$, $2x-2y-3z=0$, $2x-3y+2z=1$ definem uma superfície prismática e determinar os parâmetros directores das arestas. Calcular o volume do prisma que se obtém cortando essa superfície prismática por dois planos perpendiculares às arestas, um passando pela origem e outro pelo ponto $(2,3,3)$. R: *Consideremos o sistema constituído pelas equações dos três planos. A característica da matriz dos coeficientes das variáveis é* 2, *por ser nulo o único determinante de 3.ª ordem que nela pode formar-se e haver determinantes de 2.ª ordem não nulos. Notemos que não são nulos os determinantes* $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=10$, $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-10$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}=-10$ *e que, tomado para principal o sistema constituído por duas quaisquer das três equações e para incógnitas principais* x *e* y, *o característico é, à parte o sinal, o determinante* $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=10$. *Por conseqüência, os três planos intersectam-se dois a dois e definem uma superfície prismática.*

Para determinar os parâmetros directores das arestas, consideremos, por exemplo, a aresta definida pelos dois primeiros planos $\begin{cases} 4x-y-z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$ *cujos parâmetros directores são* $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=5$, $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=10$, $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=10$ *ou* $(1,2,2)$.

O plano π *que passa por* O *e é perpendicular às arestas tem por equação* $x+2y+2z=0$ *e o plano* π' *que passa por* $(2,3,3)$ *e é perpendicular às arestas* $x+2y+2z=14$. *Os pontos de encontro de* π *com as as três arestas são dados por*

$$\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 4x-y-z=0 \\ 2x+2y-3z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 4x-y-z=0 \\ 2x-3y+2z=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \end{cases}$$

e são $(0,0,0)$ $(0,-1/5,1/5)$ $(2/9,-7/45,2/45)$ *e o ponto de encontro de* π' *com a aresta definida pelos dois primeiros planos é a solução do sistema* $\left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=14 \\ 4x-y-z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \end{array}\right.$ *isto é* $(14/9, 28/9, 28/9)$. *O volume do prisma é igual a metade do volume do paralelipipedo cujas arestas concorrentes num vértice são determinadas pelos quatro pontos encontrados. Então, o volume do prisma tem por medida*

$$V=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/5 & 1/5 & 1 \\ 2/9 & -7/45 & 2/45 & 1 \\ 14/9 & 28/9 & 28/9 & 1 \end{array}\right|=\frac{49}{405}.$$

I. S. C. E. F. — 1.ª CADEIRA — **2.º exame de freqüência, 16-6-1942**

1289 — Calcular os três primeiros termos do desenvolvimento em série da função $y=\frac{1}{\cos^3 x}$. R: *Notemos que* $\cos^3 x=\cos x\cdot\cos^2 x=\frac{1}{2}\cos x\cdot$ $\cdot(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}(\cos x+\cos x\cdot\cos 2x)=\frac{1}{2}(\cos x+$ $+\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x)=\frac{3}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 3x$.

Então, $y=\frac{1}{\cos^3 x}=\frac{4}{3\cos x+\cos 3x}$. *E, porque*

$3\cos x=3\left(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)$ *e*

$\cos 3x=1-\frac{3^2x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$, *será*

$$y=\frac{4}{(3-3x^2/2!+3x^4/4!+\cdots)+(1-3^2x^2/2!+3^4x^4/4!+\cdots)}=$$
$$=\frac{4}{4-6x^2+7x^4/2+\cdots}=1+3x^2/2+11x^4/8+\cdots.$$

1290 — Determinar um polinómio do 4.º grau que tome os mesmos valores que a função $y=x^x$ para $x=-2,-1,0,1,2$. R: *Tem-se o seguinte quadro de valores:*

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{2}$	-1	1	1	4.

Note-se que $y(0)=\lim_{x\to 0} x^x=e^{\lim_{x\to 0} x\log x}=e^0=1$. *Seja* $ax^4+bx^3+cx^2+dx+c$ *o polinómio pedido. Deverá ser*

$$\left\{\begin{array}{l} 16a-8b+4c-2d+e=\frac{1}{2} \\ a-b+c-d+e=-1 \\ e=1 \\ a+b+c+d+e=1 \\ 16a+8b+4c+2d+e=4 \end{array}\right.$$

a resolução dêste sistema de equações lineares conduz a $7x^4/16-x^3/24-23x^2/16+25x/24+1$.

1291 — Resolver a equação $2x^4-2x^3-5=0$. A primeira aproximação das raízes irracionais será determinada gràficamente; pedem-se essas raízes aproximadas às décimas. R: *A aplicação do teorema de Descartes à equação e à sua transformada em* $y=-x$, $2y^4+2y^3-5=0$, *mostra-nos que a equação proposta tem apenas duas raizes reais, uma positiva e outra negativa. As outras duas são complexas conjugadas. A raiz positiva é inferior a* 4 *e a negativa é superior a* -4 *(método de Mac-Laurin). A equação não admite raizes inteiras porque o seu 1.º membro toma os valores* -5, -5, 1 *para* $x=0,1,-1$, *dos quais nenhum é divisivel por* 3. *A transformada da equação em* $z=2x$ *é* $z^4-2z^3-40=0$ *que não admite raizes inteiras, visto que o seu 1.º membro, para* $z=0,1,-1$, *toma os valores* -40, -41, -37 *nenhum dêles divisivel por* 3. *A equação proposta não admite, portanto, raizes racionais. As suas duas raizes reais são irracionais.*

Notemos que a equação proposta pode escrever-se sob a forma $2x^4=2x^3+5$ *e que, portanto, as suas raizes reais serão as abscissas dos pontos de intersecção das curvas de equações* $y=2x^3+5$ *e* $y=2x^4$.

O gráfico destas curvas mostrar-nos-ia que a raiz negativa pertence ao intervalo $(-2,-1)$ *e a positiva ao intervalo* $(1,2)$.

Com o auxilio duma tábua de potências e duma máquina de calcular, constroem-se fàcilmente as linhas preenchidas dos quadros seguintes pela ordem indicada à esquerda:

	x	x^4	x^3	$2x^4-2x^3-5$
1)	-2	16	-8	43
	$-1,9$			
	$-1,8$			
	$-1,7$			
	$-1,6$			
3)	$-1,5$	5,0625	$-3,375$	11,875
	$-1,4$			
	$-1,3$			
4)	$-1,2$	2,0736	$-1,728$	2,6032
5)	$-1,1$	1,4641	$-1,331$	0,5902
2)	$-1,$	1	-1	-1

donde $-1,1<x_1<-1$

	x	x^4	x^3	$2x^4-2x^3-5$
1)	1	1	1	−5
	1,1			
	1,2			
	1,3			
	1,4			
3)	1,5	5,0625	3,375	−1,625
5)	1,6	6,5536	4,096	−0,0848

	x	x^4	x^3	$2x^4-2x^3-5$
4)	1,7	8,3521	4,913	1,8782
	1,8			
	1,9			
2)	2	16	8	11

donde $1{,}6 < x_2 < 1{,}7$.

Soluções dos n.os 1287 a 1291 de A. Sá da Costa.

GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. P. — GEOMETRIA PROJECTIVA — **Exame de freqüência, 1942-43**

Introdução:

1292 — Considerar um triângulo ABC. Dizendo-se interior qualquer ponto I que pertença a um segmento que tenha para extremos o vértice A e um ponto do lado BC. *a*) Demonstrar que a recta BI intersecta o lado AC num ponto X e, depois, que o ponto I está entre B e X. *b*) Demonstrar, também, que o segmento que une dois pontos interiores não intersecta nem o lado BC nem o lado AB.

1293 — Sejam A, B, X e Y quatro pontos duma recta. Se B estiver entre A e X e A entre Y e X, demonstrar que A está entre Y e B.

1294 — Demonstrar que as diagonais dum losango são perpendiculares.

1295 — Poder-se-á afirmar ou negar, sem que seja feita qualquer hipótese sôbre paralelismo, que, num triângulo rectângulo, a recta que une o ponto médio da hipotenusa ao ponto médio dum dos catetos seja perpendicular a êste cateto? ¿ Poder-se-á, igualmente, afirmar ou negar que a mesma recta intersectará o outro cateto?

Geometria Projectiva:

1296 — Seja: ABC, um triângulo; l, uma recta; A_1, B_1 e C_1, os pontos de intersecção da recta l com os lados BC, CA e AB; A'_1, o conjugado harmónico de A_1, relativamente aos vértices B e C; B'_1, o conjugado harmónico de B_1, relativamente aos vértices C e A; C'_1, o conjugado harmónico de C_1, relativamente aos vértices A e B. Demonstrar que as três rectas AA'_1, BB'_1 e CC'_1 concorrem num mesmo ponto.

1297 — Demonstrar que se C separa harmònicamente o ponto D dos pontos A e B, também A separa harmònicamente o ponto B dos pontos C e D.

1298 — Determinar, analìticamente, evidentemente, as abscissas dos pontos que separam harmònicamente tanto os pontos de abscissas -1 e 1, comos os pontos de abscissas $a-1$ e $a+1$.

Construções:

1299 — Desenhar um triângulo equilátero XYZ inscrito numa circunferência de 3 cm de diâmetro. Designar por A o ponto da circunferência dimaetralmente oposto ao vértice Z. Determinar os vértices B, C e D do quadrângulo com o 4.º vértice em A e que tenha, para triângulo diagonal, o triângulo XYZ.

1300 — Desenhar um rectângulo $ABCD$, sendo $AB=5$ cm e $BC=3$ cm. Marcar sôbre AB e para o lado de B o ponto X tal que $BX=3$ cm. Unir X com D. Tirar, só com a régua, pelo ponto C a paralela a XD.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — CÁLCULO — **2.º exame de freqüência, 1941-42**

1301 — Integrar a equação

$$z' + \frac{z}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{2} z^3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 0.$$

R: *Tem-se* $z^{-3} z' + \dfrac{z^{-2}}{\operatorname{sen} 2x} = -\dfrac{1}{2} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x$ *e fazendo* $z^{-2} = y$ *vem* $\dfrac{y'}{2} - \dfrac{y}{\operatorname{sen} 2x} = \dfrac{1}{2} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x$. *O integral geral da equação sem 2.º membro é* $y = C \operatorname{tg} x$. *Variando constantes vem* $C = \int \operatorname{tg} 2x \, dx$, *logo* $z^{-2} = C_1 \operatorname{tg} x \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \log \cos 2x$.

1302 — Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}}$. O domínio D é limitado pelas linhas $y^2 = 4x$ e $x = 1$.

R: $\displaystyle\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^{2\sqrt{x}} dy = 4 .$

1303 — Determinar o raio de curvatura da linha $x^2-2xy+2y^2-1=0$ no ponto $(1,1)$.

1304 – Determinar o sentido da concavidade da linha $\rho=\pi/4\theta$ no ponto $(1,\pi/4)$.

1305 — Determinar as assíntotas da linha
$$x=\frac{t}{t^2-1}\ ;\ y=\frac{t^3}{t^2-1}.$$

1306 — Determinar uma relação entre a e b de modo que a envolvente das rectas $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=1$ seja a hipérbole $xy=1$.

1307 — Determinar os novos limites dos integrais $\int_0^1 dx \int_0^x dy$ quando se inverte a ordem de integração.

1308 — Determinar um integral particular de $y''-y=xe^x$.

Soluções dos n.os 1301 e 1302 de J. Rios de Sousa.

I. S. C. E. F. — 2.ª CADEIRA **— 2.º exame de freqüência — 17-6-1942**

1309 — Determine os pontos múltiplos da curva $y^3-x^3=x^2y^2$ e as tangentes na origem dos eixos coordenados. R: *Os pontos múltiplos da curva dada são as soluções reais do sistema*
$$\begin{cases} f\equiv y^3-x^3-x^2y^2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\equiv -3x^2-2xy^2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\equiv 3y^2-2x^2y=0 . \end{cases}$$
Êste admite a solução única $x=y=0$. *Para* $x=y=0$ *tem-se* $r=s=t=0$ *e* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}=-6$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=0$ *e* $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}=6$. *A origem é portanto um ponto triplo. A equação complexiva das tangentes é* $-6X^3+$ $+6Y^3=0$ *ou* $(X-Y)(X^2+XY+Y^2)=0$ *e só uma é real* $X=Y$.

1310 — Mudar as variáveis independentes na equação $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ fazendo
$$\begin{cases} 2x=uv \\ y=2/v . \end{cases}$$

1311 — Calcular a área da superfície cilíndrica $y^2=3x$ limitada pelos planos $z=0$, $z=3$, $x=0$, $x=4$. R: *A área da superfície cilíndrica* $y=f(x)$ *limitada pelos planos* $x=x_0$, $x=x_1$, $z=z_0$, $z=z_1$ *é* $A=\left|(z_1-z_0)\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx\right|$. *Portanto, para o nosso caso, tem-se sucessivamente*
$$A=3\left|\int_0^4\sqrt{1+3/4x}\,dx\right|=3\left|\int_\infty^{\sqrt{19}/4}\frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^2}\right|=3\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2-1}+\right.$$
$$\left.+\log\sqrt[4]{\frac{t+1}{t-1}}\right]_\infty^{\frac{\sqrt{19}}{4}}=\frac{2\sqrt{19}}{3}+\frac{1}{4}\log\frac{35+8\sqrt{19}}{3}.$$

1312 — Integrar a equação $y(2px+y)=\sqrt{x}$. R: *Resolvendo a equação em ordem a* p *vem* $p=-\dfrac{y}{2x}+\dfrac{6}{2y\sqrt{x}}$ *que se reconhece como uma equação de Bernoulli. Multiplicando ambos os membros por* $2y$ *obtém-se* $2yp=-\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *e substituindo* y^2 *por* z *e, portanto,* $2yp$ *por* z' *encontra-se a equação linear* $z'=-\dfrac{z}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *cujo integral geral é*
$$z=e^{\int\frac{dx}{x}}\left[\int\frac{e^{-\int\frac{dx}{x}}}{\sqrt{x}}dx+c\right]=x\left[\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}+c\right]=$$
$$=x\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}+c\right]=-2\sqrt{x}+cx.$$
O integral geral da equação proposta é $y^2=-2\sqrt{x}+cx$.

Soluções dos n.os 1309 a 1312 de A. Sá da Costa.

I. S. T. — CÁLCULO **— 2.º Exame de freqüência, 1942**

1313 — Determinar a envolvente duma família de rectas tal que é constante e igual a 3 o comprimento do segmento em cada uma delas intersectado pelos eixos coordenados (rectangulares). R: *A equação da envolvente obtém-se eliminando* p *entre as equações*
$$\begin{cases} \dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{\sqrt{9-p^2}}-1=0 \\ \dfrac{x}{p^2}-\dfrac{py}{(9-p^2)^{3/2}}=0 . \end{cases}$$
A primeira é a equação geral das rectas nas condições do enunciado e a segunda obteve-se igualando a zero a derivada parcial em ordem a p *do primeiro membro da equação anterior.*

1314 — Calcular o volume limitado pelo plano xy, pelo paraboloide $xy=2z$ e pela superfície cilíndrica $(x^2+y^2)^2=2xy$.

1315 — Integrar a equação

$$(x-x^2)y'' + \frac{1}{2}(3-4x)y' = y/4$$

sabendo que $y_1 = x^n$ é integral particular. Determinar n. R: *A transformação* $y = y_1 t$ *permite baixar duma unidade a ordem da equação proposta, mantendo-a homogénea. Assim, vem* $u'(2x-2x^2) = u(2x-1)$ *que se integra por separação das variáveis, sendo* $u = t'$ *e* $y_1 = x^{-1/2}$.

1316 — Determinar uma curva tal que a sua ordenada, em cada ponto, é metade da ordenada da sua evoluta, no respectivo centro de curvatura. R: *Tudo se reduz à integração da equação diferencial* $yy'' = 1 + y'^2$ *incompleta em* x *e convertível, mediante a mudança* $y' = z$, *na equação de 1.ª ordem* $yz' = 1 + z^2$ *de variáveis separáveis.*

Soluções dos n.os 1315 a 1316 de A. Sá da Costa.

F. C. P. — Análise Superior — 1.º Exercício de revisão, 1942-43

1317 — Integrar a equação $2zq - pq^2 - 4p = 0$ e determinar a superfície integral que contém a linha: $y = 0$ e $z = x^2/2$. R: *Vamos usar o método de Lagrange-Charpit. Do sistema tiramos:* $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$ *ou* $p = cq$, *donde* $q = \sqrt{\frac{2z-4c}{c}}$ *e* $p = \sqrt{c(2z-4c)}$. *Temos:* $dz = \sqrt{c(2z-4c)}\,dx + \sqrt{\frac{2z-4c}{c}}\,dy$. *Integrando vem o integral completo:* $c(2z-4c) = (cx+y+kc)^2$. *As superfícies integrais pedidas são:* a) $y = 0$ *e* b) *a que se obtém eliminando* c *entre:* $c(2z-4c) = (cx+y+2c\sqrt{c-1})^2$ *e*

$$2z - 8c = 2(cx+y+2c\sqrt{c-1})\left(x + 2\sqrt{c-1} + \frac{c}{\sqrt{c-1}}\right).$$

1318 — Integrar a equação $p^2 + q = z$ pelo método de Cauchy, determinando a superfície integral que contém a linha $\begin{cases} y = 1 \\ z = x^2. \end{cases}$ R: *Temos:* $\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2p^2+q} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} = \frac{du}{u}$. *Façamos* $u_0 = 1$. *Temos:* $q = q_0 u$, $p = p_0 u$; $y = y_0 + \log u$, $x = x_0 + 2p(u-1)$ *e* $z = z_0 + p_0^2(u^2-1) + q_0(u-1)$. *Fazendo* $y = u$ *vem* $y_0 = 1$, $x_0 = v$ *e* $z_0 = v^2$. $H_0: \frac{\partial z_0}{\partial v} - p_0\frac{\partial x_0}{\partial v} - q_0\frac{\partial y_0}{\partial v} = 0$ *ou* $2v - p_0 = 0$; $p_0 = 2v$ *e* $q_0 = -3v^2$. *Portanto:* $x = v(4u-3)$, $y = 1 + \log u$, $z = v^2u(4u-3)$ *ou* $x^2 = z(4 - 3e^{1-y})$.

1319 — O plano tangente em M duma superfície corta o eixo dos zz num ponto P. $\overline{PM}$ corta o plano xOy em Q. Determinar as superfícies S tais que Q tenha de abscissa a. Determinar a superfície que contém a circunferencia $x^2 + y^2 = ax$ e $z = a$. R: *Plano tangente:* $Z - z = p(X-x) + q(Y-y)$. *Equações de* PM: $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z - z + px + qy}{px+qy}$.

Coordenadas de Q: $\begin{cases} X = a = \dfrac{-z+px+qy}{px+qy}\,x \\ Y = y_2 = \dfrac{-z+px+qy}{px+qy}\,y. \end{cases}$

Donde a equação $px + qy = -\frac{zx}{a-x}$. *Integrando vem:* $z = (x-a)\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ *e a superfície pedida é:* $z = -(x-a)\frac{x^2+y^2}{y^2}$.

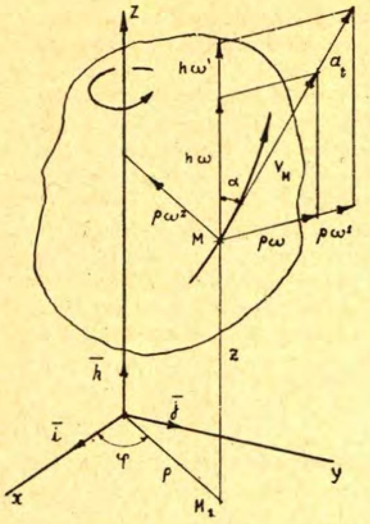
Soluções dos n.os 1317 a 1319 de Jaime Rios de Sousa.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — Mecânica Racional — Exame de freqüência, 2.º sem., 1.ª ch., 1941-42

1320 — Um sólido está animado dum movimento helicoidal dextrorsum uniformemente variado em volta dum eixo fixo com respeito ao referencial do movimento. Sabe-se que um dos seus pontos M, à distância de 60 cm do eixo, possue uma velocidade igual a 2 m/s no instante definido por $t = 10$ s e que o vector velocidade de M faz com o eixo do movimento um ângulo de 30°. A aceleração de M vale 2 m/s². Determinar no instante considerado: *a)* a velocidade angular do movimento (em voltas p/min.); *b)* a velocidade de escorregamento do sólido ao longo do eixo (em dm/min.); *c)* o passo do movimento (em metros); *d)* o valor da aceleração angular do movimento; *e)* calcular o valor da velocidade dum ponto à distância de 1 metro do eixo no instante definido por $t = 20$ s. R: a), b) e c) $\rho = 0{,}60$ m, $v_M^1 = 2$ m/s *e* $t_1 = 10$ s; $\alpha = 30°$; $h\omega_1 = v_M^1 \cdot \cos 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = 1{,}73$ m/s, $\rho\omega_1 = v_M^1 \cdot \text{sen}\, 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ m/s *e* $\omega_1 = \frac{1}{0{,}6}$ rad./s, *donde: velocidade de escorregamento:* 1038 dm/min; *velo-*

cidade angular: $\frac{50}{\pi} \approx 15{,}9$ v/min.; *passo do movimento:* $6{,}5$ m; d) $a_M^2 = \rho^2\omega^4 + h^2\omega'^2 + \rho^2\omega'^2 \to 4 = \frac{1}{0{,}6^2} +$



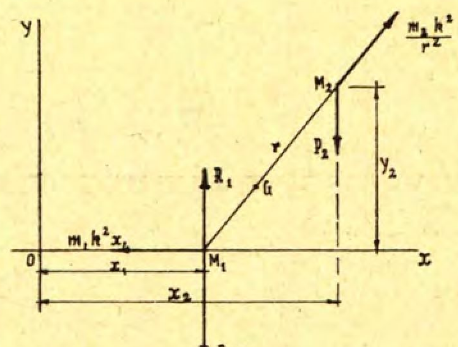
$+ 0{,}6^2 \cdot \omega'^2 \cdot 2^2$, *donde* $\omega' = \pm \frac{10}{36 \times 2}\sqrt{44} = \pm 0{,}92$ rad./s² *e êste valor de* ω' *é independente do tempo, visto o movimento ser uniformemente variado. Tomaremos* $\overline{\omega}' = 0{,}92 \cdot \overline{k}$; e) $\omega = \omega' t + \omega_0 = 0{,}92 \cdot t + \omega_0$. *Para* $t = 10$ s, $\omega_1 = 1{,}66$ rad./s, *logo* $1{,}66 = 0{,}92 \times 10 + \omega_0$, *donde* $\omega_0 = -7{,}54$ *e por conseguinte* $\omega = 0{,}92\,t - 7{,}54$. *Para* $t = 20$ *vem* $\omega_2 = 10{,}86$ *e* $v_M = \sqrt{\rho^2 + h^2} \cdot \omega = \sqrt{1 + 1{,}038^2} \times 10{,}86$, *donde* $v_M = 15{,}64$ m/s.

1321 — Um sistema é constituído por dois pontos materiais pesados M_1 e M_2 de massas respectivamente iguais a m_1 e m_2. O ponto M_1 é obrigado a uma horizontal Ox perfeitamente polida (O fixo) e o ponto M_2 move-se livremente no plano vertical que contém Ox. Além dos pesos, actuam sôbre os pontos mais as seguintes fôrças: sôbre M_1 uma atracção proporcional à sua distância x a O (factor de proporcionalidade $m_1 k^2$), sôbre M_2 uma fôrça repulsiva proveniente de M_1 inversamente proporcional ao quadrado da distância de M_1 a M_2 (factor de proporc. $m_2 k^2$). Notar que se supõe M_1 *não* actuado por M_2. *a)* parametrar o sistema e classificar as fôrças que intervêm no estudo do seu movimento de dois modos diferentes; *b)* exprimir em função dos parâmetros e das suas primeiras derivadas: a resultante cinética, a fôrça viva e o momento cinético do sistema em M_1 (no movim. absoluto); *c)* id., id., do momento cinético em O no movimento relativo em volta de G; *d)* escrever as equações independentes das reacções que permitem estudar o movimento do sistema; *e)* escrever as equações que completamente determinam as fôrças de ligação. R: a) *Parâmetros:* x_1, x_2, y_2. *Classificação das fôrças — Exteriores:* $p_1, p_2, m_1 k^2 x_1, \frac{m_2 k^2}{r^2}, R_1$; *Interiores: não há; Dadas:* $p_1, p_2, m_1 k^2 x_1^2, \frac{m_2 k^2}{r^2}$; *Ligação:* R_1; b) $\overline{Q} = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2$ *donde* $\begin{cases} Q_x = m_1 x_1' + m_2 x_2' \\ Q_y = m_2 y_2', \end{cases}$

$$2T = m_1 x_1'^2 + m_2 (x_2'^2 + y_2'^2),$$

$$\overline{K}_{M_1} = \overline{M_2 - M_1} \wedge \overline{m_2 v_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 & 0 \\ m_2 x_2' & m_2 y_2' & 0 \end{vmatrix} = m_2 [(x_2 - x_1) y_2' - y_2 x_2'] \cdot \overline{k};$$

c) *No movimento relativo em volta de* G *o momento cinético é independente do polo (quantidade de mo-*



vimento relativa nula) e portanto $\overline{K}_O^r = \overline{K}_G^r = K_G$. $\overline{K}_G = m_2 [(x_2 - x_1) y_2' - y_2 x_2'] \cdot \overline{k} + Q_x \eta - Q_y (\xi - x_1)$ *onde* $\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $\eta = \frac{m_2 y_2}{m_1 + m_2}$; d) $m_1 x_1'' = -m_1 k^2 x_1$,

$$m_2 x_2'' = \frac{m_2 k^2}{r^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad m_2 y_2'' = -p_2 + \frac{m_2 k^2}{r^2} \cdot \frac{y_2}{r};$$

e) $m_1 y_1'' = 0 = R_1 - p_1 \to R_1 = p_1$.

Soluções dos n.os 1320 e 1321 de R. Sarmento de Beires.

I. S. T. — Mecânica Racional — 2.º exame de freqüência, 1942

1322 — Um ponto material P é obrigado a mover-se, sem atrito, sôbre um elipsoide de revolução, e atraído, pelos dois focos F e F', com fôrças respectivamente proporcionais a $\overline{PF}^2$ e $\overline{PF'}^3$. Achar as posições de equilíbrio.

1323 — Um ponto material livre descreve uma parábola, sob a acção duma fôrça central, sendo o centro de fôrças o ponto de intersecção da directriz com o eixo da parábola. Achar a lei de fôrças.

1324 — Um ponto move-se, com movimento uniforme, sôbre uma curva plana fixa. ¿Qual deve ser a curva para que a projecção da aceleração, sôbre uma recta fixa do plano da curva, seja constante?

1325 — Um fio pesado homogéneo está em equilíbrio, suspenso pelas suas extremidades em dois pontos A e B, situados à mesma altura. Conhecido o comprimento do fio, ¿qual deve ser a distância $\overline{AB}$ para que a tensão seja mínima em A e B?

F. C. P. — Física Matemática — **Exame final, Julho de 1942**

1326 — Seja $\cdots \lambda_{-n} < \cdots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 \cdots < \lambda_n \cdots$ uma sucessão tal que $R_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} I_n$, $I_n = [\lambda_n \leq \lambda \leq \lambda_{n+1}]$ e representemos por $E(\lambda)$ uma decomposição da unidade.

Qual é o domínio do operador $B = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda'_n E(I_n)$ em quê $\{\lambda'_n\}$ é uma sucessão de números quaisquer, reais ou complexos? Será indiferente a ordem pela qual se escrevem os termos $\lambda'_n E(I_n)$?

Que operador se obtém no caso particular $\lambda'_n = 1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$?

Determinado êste operador, calcular os valores próprios e os espaços próprios de B.

Haverá uma base de vectores próprios?

B pode representar uma grandeza física?

Caracterizá-la, dando o espectro, a probabilidade de um valor do intervalo J $\lambda' < \lambda \leq \lambda''$.

A circunstância de $\{\lambda'_n\}$ ser uma sucessão discreta ou não, terá alguma influência sôbre o conjunto dos resultados possíveis de uma medida de B (o espectro da grandeza B)?

1327 — Seja A uma grandeza física e $E(\lambda)$ o seu operador de projecção.

Se fizermos $U(I) = \| E(I)\varphi \|^2$, a cada conjunto $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}_1$ corresponde uma medida exterior $\overset{*}{U}(\mathfrak{M})$:

Nestas condições, discutir a seguinte definição.

$\overset{*}{U}(\mathfrak{M})$ é a probabilidade de que, ao medir A, no estado físico φ, se encontre como resultado um ponto do conjunto $\mathfrak{M}$ mensurável-$\overset{*}{U}$.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — Cálculo das Probabilidades — **13-2-1942**

1328 — Tiram-se 7 cartas de um baralho de 52. Calcular a probabilidade de saída de 4 figuras e do mesmo naipe (o ás é considerado figura).

1329 — São dadas 4 urnas com as composições seguintes: U_1, 2 esferas brancas e 3 esferas pretas; U_2, 2 esf. br. e 8 esf. pr.; U_3, 6 esf. br. e 4 esf. pr.; e U_4, 4 esf. br. e 1 esf. pr. Extraem-se 4 esferas, uma de cada urna. Pede-se a probabilidade de que pelo menos 2 das esferas extraídas sejam brancas. R: *Seja* p_i *a probabilidade de saída de uma esfera branca da urna* U_i *e* $q_i = 1 - p_i$ *a probabilidade relativa à esfera preta. Tem-se:* $p_1 = 2/5$, $p_2 = 1/5$, $p_3 = 3/5$ *e* $p_4 = 4/5$. *Designando por* P_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ *a probabilidade de saída de* k *esferas brancas na extracção indicada, a probabilidade pedida* P *é:* $P = P_2 + P_3 + P_4 = 1 - P_0 - P_1$, *atendendo a que* $\sum_{k=0}^{4} P_k = 1$. *Como é sabido,* P_k *é o coeficiente de* t^k *no produto* $\Pi(p_i t + q_i)$. *Temos pois:* $P_0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 = 24/5^4$, $P_1 = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 154/5^4$, *e portanto* $P = 447/625 \sim 0{,}715$.

Solução de Manuel Zaluar

F. C. L. — Cálculo das Probabilidades — **2.º exame de freqüência, Maio, 1942**

Enuncie o paradoxo de Bertrand e explique porque há várias soluções.

Noção de pêso das observações.

Explique como no problema de compensação de observações indirectas pode reduzir as equações de observações não lineares à forma linear.

1330 — Calcule o valor médio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sendo $\frac{dx\,dy}{k}$ a probabilidade elementar e sendo o domínio de definição de $f(x, y)$ limitado por $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 4$.

1331 — Dum ângulo α obtiveram-se as seguintes determinações:

$30^\circ 20' \pm 0{,}2'$, $30^\circ 22' \pm 0{,}4'$, $30^\circ 19' \pm 0{,}2'$.

Calcule o valor mais provável e um aferidor.

F. C. P. — Cálculo das Probabilidades — 2.º exame de freqüência, 1942

1332 — Três séries de medições de uma grandeza conduziram aos seguintes resultados (l_i): $120{,}43 \pm 0{,}15$, $120{,}38 \pm 0{,}20$ e $120{,}50 \pm 0{,}20$. Calcular a média pesada e o seu êrro mediano.

R: *Pondo* $l_i = 120{,}30 + \frac{z_i}{100}$ *teremos* $z_1 = 13$, $z_2 = 8$ *e* $z_3 = 20$. *Tomando iguais à unidade os pesos das duas últimas determinações* $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, *virá* $p_1 = \frac{0{,}20^2}{0{,}15^2} = 1{,}8$.

1333 — Medições de dois lados e do ângulo compreendido dum triângulo plano conduziram às médias $a = 3{,}000 \pm 0{,}004$, $b = 4{,}000 \pm 0{,}005$ *e* $C = 90^\circ \pm 10''$. Calcular o valor mais provável do lado c e o seu êrro. R: *De* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ *resulta para valor mais aproximado* $c_0 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. *O desenvolvimento linear aproximado* $c - c_0 = \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)_0 (a - a_0) + \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)_0 (b - b_0) + \left(\frac{\partial c}{\partial C}\right)(C - C_0) = \frac{3}{5}(a - a_0) + \frac{4}{5}(b - b_0) + \frac{12}{5}(C - C_0)$ *conduz ao êrro mediano (medições independentes de* a, b *e* C)

$$m_c^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 m_C^2,$$ *sendo* $m_a = 0{,}004$, $m_b = 0{,}005$ *e* $m_C \approx \operatorname{sen} 10''$.

1334 — Medições das distâncias de três pontos colineares A, B e C conduziram aos valores $\overline{AB} = 1504{,}12$, $\overline{BC} = 948{,}15$ e $\overline{AC} = 2452{,}20$. Determinar os valores mais prováveis dessas distâncias e os seus erros, *a)* supondo igualmente precisos os valores dados; *b)* atribuindo às três medições de distâncias pesos a elas inversamente proporcionais. R: *Pondo*

$$\overline{AB} = 1504{,}12 + \frac{l_1}{100}, \quad \overline{BC} = 948{,}15 + \frac{l_2}{100} \quad e$$
$$\overline{AC} = 2452{,}20 - \frac{l_3}{100},$$

os resultados das medições são $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ *e a equação de condição* $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ *escreve-se* $l_1 + l_2 + l_3 + 7 = 0$. *O problema poderá ser resolvido por compensação.*

Soluções dos n.os 1332 a 1334 de Gonçalves Miranda.

PROBLEMAS

Secção a cargo de A. Ferreira de Macedo e Mário de Alenquer

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Matemáticas Elementares

1335 — Seja $\overline{OA_0}$ um segmento rectilíneo de comprimento igual ao dôbro do diâmetro de uma circunferência dada. Marque-se, a partir de $\overline{OA_0}$, o ângulo $A_0\hat{O}A_1 = 45^\circ$, e outro $O\hat{A}_0A_1 = 90^\circ$; a partir de $\overline{OA_1}$, o ângulo $A_1\hat{O}A_2 = \frac{1}{2}\cdot 45^\circ$, e outro $O\hat{A}_1A_2 = 90^\circ$; a partir de $\overline{OA_2}$, o ângulo $A_2\hat{O}A_3 = \frac{1}{2^2}\cdot 45^\circ$, e outro $O\hat{A}_2A_3 = 90^\circ$; e assim sucessivamente, de modo que seja sempre $A_{n-1}\hat{O}A_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot 45^\circ$ e $O\hat{A}_{n-1}A_n = 90^\circ$. Calcular $\lim_{n\to\infty} \overline{OA_n}$.