Não é desprovido de interêsse notar, de passagem, o que pensava Gauss a respeito dos filósofos que se ocupam de questões científicas, de que não percebem nada; isto aplica-se, em particular, aos filósofos que esgravatam nos fundamentos da Matemática, sem terem prèviamente aguçado o bico sôbre algum duro edifício matemático. Inversamente, isto explica a razão por que B. Russell (1872), A. Whitehead (1861), David Hilbert (1862), da nossa época, trouxeram contribuïções importantes à filosofia das matemáticas: é que são matemáticos.

Escrevendo ao seu amigo Schumacher, a 1 de Novembro de 1844, Gauss declara: «Vê-se a mesma coisa (a incompetência matemática) entre os filósofos contemporâneos Schelling, Hegel, N. von Essenbeck, e os seus sucessores; não nos fazem êles pôr os cabelos em pé com as suas definições? Leia na história da filosofia antiga o que os grandes homens dessa época, Platão e outros (exceptuo Aristóteles) davam em matéria de explicações. E mesmo com o próprio Kant, as coisas muitas vezes não se passam melhor; a meu ver, a sua distinção entre juízos analíticos e sintéticos é uma daquelas idéias que, ou caem na banalidade, ou são falsas». Quando escrevia estas linhas, em 1844, Gauss estava em plena posse da geometria não euclideana, que era já uma refutação suficiente do que diz Kant sôbre o «espaço»...

Não se vá porém concluir dêste exemplo isolado, relativo a pormenores técnicos puramente matemáticos, que a Filosofia não era apreciada por Gauss; todos os progressos filosóficos tinham para êle grande interêsse, conquanto desaprovasse muitas vezes os meios pelos quais tinham sido alcançados.

Tradução de J. SEBASTIÃO E SILVA

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 5

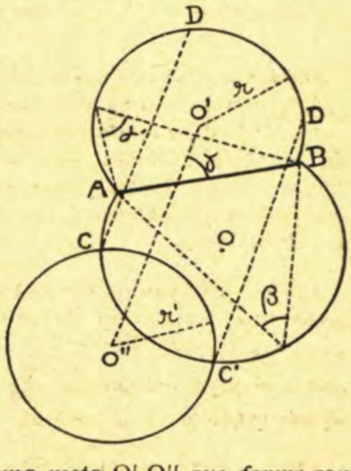
1255 — Resolva a equação $5-(x^2-1/2)^2/2=3x^2$ determinando o valor numérico das raízes reais até à aproximação de uma décima. R: *As raizes da equação são dadas pela expressão* $x=\pm[(-10\pm 256^{1/2}):4]^{1/2}=\pm[(-10\pm16):4]^{1/2}$ *e as raizes reais são:* $x=\pm(3/2)^{1/2}\sim\pm1{,}2$.

1256 — Simplifique a expressão $x^{-1/2}\,y^2\,\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{\sqrt{y^{-1}}}}$ e determine o seu valor numérico para $x=1{,}3273$ e $y=0{,}3456$ utilizando logaritmos. R: *A expressão simplificada é* $x\,.\,y^{7/3}$ *donde* $\log x+7/3\log y=$ $=0{,}12297+7/3\times\bar{1}{,}53857=\bar{1}{,}04630$ *e para valor numérico da expressão* $0{,}11125$.

1257 — Sabe-se que a área de um terreno com a forma rectangular é igual a 2,25 hectares. Mediu-se o ângulo que faz uma diagonal com um dos lados, obtendo-se o valor $37^\circ\,26'\,30''$. Calcule o comprimento e a largura do terreno, dispondo de uma tábua de logaritmos. R: *A área do rectângulo em função da diagonal é dada por* $A=d^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ *se fôr* d *a diagonal e* α *o seu ângulo com um dos lados. No caso pôsto é* $225=$ $=d^2\operatorname{sen}37^\circ\,26'\,30''\cos37^\circ\,26'\,30''$ *e por isso* $\log d=$ $=1/2(\log225+\operatorname{colg}\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{colg}\cos\alpha)=1/2\,(2{,}35218+$ $+0{,}21613+0{,}10019)=1{,}33425$. *Por outro lado, se forem* a *e* b *os lados do rectângulo serão* $a=d\operatorname{sen}\alpha$ *e* $b=d\cos\alpha$; *logo* $\log a=\log d+\log\operatorname{sen}\alpha=1{,}33425+$ $+\bar{1}{,}78387=1{,}11812$ *e* $a=131\text{ m}$; *e* $\log b=\log d+$ $+\log\cos\alpha=1{,}33425+\bar{1}{,}89981=1{,}23406$ *e* $b=172\text{ m}$.

1258 — Defina superfície de revolução. Indique, sem definir, alguns sólidos limitados, total ou parcialmente, por tais superfícies.

1259 — Diga como construia um quadrilátero, dados dois ângulos opostos, as diagonais e o ângulo que estas fazem entre si. R: *Seja* AB *uma das diagonais que é vista dos vértices* D *e* C *sob os ângulos* α *e* β, *dados, (ângulos opostos). Construem-se os lugares dos pontos sob os quais é visto o segmento* AB *segundo aquêles ângulos. Sejam* O *e* O' *os centros dos arcos que constituem tais lugares. Por um dêles* O' *(por exemplo) centro do arco de raio* r, *tracemos uma recta* O' O'' *que forme com* AB *o ângulo dado* γ *das duas diagonais, sendo* O' O'' *o comprimento da segunda diagonal. Com*



centro em O'' *e raio* r, *traça-se uma circunferência que cortará ou não o arco de centro* O. *Se houver pontos de encontro, seja* C *um dêles. Por* C *traço uma paralela a* O' O'' *que encontrará o arco de centro* O' *em* D. ACBD *é um um dos quadriláteros que se podem construir, e o outro* $AC'BD'$. *É fácil notar que pode haver* 2, 1 *ou* 0 *soluções.*

1260 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação $x-(2y+5):5=100/6-3y$. R: *A equação proposta é equivalente a* $30x+78y=530$, *equação que não tem soluções inteiras, o mesmo sucedendo à proposta.*

Soluções dos n.os 1255 a 1260 de J. da Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 4

1261 — Determine o parâmetro m de modo que a equação $5x^2+(2m+1)x+m-2=0$ tenha duas raízes x' e x'' que satisfaçam a relação $2x'+5x''-1=0$. R: *As equações que resolvem o problema são* $2x'+5x''=1$; $x'+x''=-(2m+1):5$ *e* $x'x''=(m-2):5$. *A resolução do sistema dá para* m *os valores* $m'=-4$ *e* $m''=1/8$.

1262 — Escreva e simplifique o têrmo médio do desenvolvimento de $\left(\sqrt{2a}-\sqrt{1/2a}\right)^6$. R: $T_4=-20$.

1263 — Escreva o têrmo geral da sucessão $\frac{3}{-3}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{12}{9}\cdots$ e calcule o seu limite quando o número de termos cresce indefinidamente. R: *O têrmo geral é* $u_n=\frac{3n}{4n-7}$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=3/4$.

1264 — A altura de um trapézio rectângulo mede 198,15 metros e uma das suas bases é dupla da outra. Calcule a medida do *menor* ângulo interno do trapézio, sabendo que a base maior mede 426,38 metros. Utilize logaritmos. R: *A equação que resolve o problema é* $198{,}15=213{,}19\ \mathrm{tg}\,\alpha$ *donde* $\alpha=42^\circ\,54'\,20''$.

1265 — Os ângulos α e β são dois ângulos positivos que satisfazem às relações: $\alpha+\beta<\pi/2$; $\mathrm{sen}\,\alpha=\sqrt{2}/2$; $\cos\beta=1/2$. Calcule $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$. R: *Dos dados do problema conclue-se que* $\mathrm{tg}\,\alpha=1$ *e* $\mathrm{tg}\,\beta=\sqrt{3}$ *donde* $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=-(2+\sqrt{3})$.

1266 — Em que quadrantes são simultâneamente crescentes as funções: tangente e secante. Justifique a sua resposta.

1267 — Demonstre que tôda a recta conduzida pelo ponto de intercepção das diagonais de um paralelogramo é dividida por êste ponto e pelos dois lados opostos em duas partes iguais.
R: *É fácil ver que com a recta, uma diagonal e os dois lados opostos cortados pela recta, se formam dois triângulos iguais de que dois lados são os segmentos em que fica dividida a recta; opondo-se êsses dois lados a ângulos iguais êles são, por isso, iguais.*

1268 — A secção feita num cone de revolução por um plano que passa pelo eixo é um triângulo eqüilátero cuja área é $\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$. Calcule a área total do cone. R; *A área do triângulo eqüilátero em função do lado (geratriz do cone) é* $\sqrt{3}=g^2\sqrt{3}/4$, *donde* $g=2$ cm. *O raio da base do cone é* $g/2=1$ cm *e a área total* $A=\pi r(g+r)=3{,}14\times1(2+1)=9{,}42\ \mathrm{cm}^2$.

Soluções dos n.os 1261 a 1268 de J. Calado.

I. S. C. E. F. — Exame de Aptidão, 1-8-1942

1269 — *a)* Diga que propriedades conhece das equações do 2.º grau. *b)* Resolva a desigualdade $\frac{(x+3)\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x-1)}<0$. R: *A desigualdade dada implica um dos dois sistemas:*

$$\text{a)}\ \begin{cases}(x+3)(x-2)>0\\(x+1)(x-1)<0\end{cases}\quad\begin{cases}x<-3\ \textit{ou}\ x>2\\-1<x<1\end{cases}\quad \textit{impossível};$$

$$\text{b)}\ \begin{cases}(x+3)(x-2)<0\\(x+1)(x-1)>0\end{cases}\quad\begin{cases}-3<x<2\\x<-1\ \textit{ou}\ x>1\end{cases}$$

$$-3<x<-1\ \textit{ou}\ 1<x<2.$$

1270 — Calcule o valor numérico da expressão $A=\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{1/3}$ para $a=141{,}43$ $b=20{,}04$.

$$\text{R:}\quad A=\left(\frac{ab(b-a)}{b^2-a^2}\right)^{1/3}=\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{1/3},$$

$$\log A=\frac{1}{3}(\log 141{,}43+\log 20{,}04+\mathrm{colog}\,161{,}47)=$$

$$=\frac{1}{3}(2{,}1505415+1{,}3018977+\bar{3}{,}7919082)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 1{,}2443474=0{,}4147825,$$

donde $A=2{,}59885$.

1271 — *a)* Enuncie as propriedades que relacionam a medida de um ângulo cujos lados intersectam arcos de circunferência com as medidas dêsses arcos. *b)* Dadas duas circunferências concêntricas, calcule a área do segmento determinado no círculo de raio maior por uma tangente à circunferência de raio menor. Caso particular: $R=2r$.

R: *Seja* O *o centro das duas circunferências de raios* R *e* r $(r < R)$, $\overline{AB}$ *a corda da circunferência de raio* R *tangente à de raio* r, *e* 2α *a medida em radianos do ângulo* AOB. *Tem-se:*
$A = \pi R^2 \cdot 2\alpha/2\pi -$ *área* $[AOB] = \alpha R^2 - r\sqrt{R^2-r^2} =$
$= R^2 \arc\cos \dfrac{r}{R} - r\sqrt{R^2-r^2}$. *Para* $R=2r$, *vem*

$$A = 4r^2 . \arc\cos\frac{1}{2} - r\sqrt{3r^2} = (4\pi/3 - \sqrt{3})\, r^2 .$$

1272 — *a)* Defina poliedro regular e descreva os poliedros regulares que conhece. *b)* Dado um cubo de lado L, inscreve-se nêle uma esfera e nela um cubo de lado l. Calcule a razão dos volumes dos dois cubos. R: *O diâmetro da esfera é igual ao lado do cubo circunscrito e igual à diagonal do cubo inscrito. Logo* $D^2 = L^2 = 3l^2$ *donde* $L^2/l^2 = 3$. *A razão dos volumes é* $V/v = L^3/l^3 = 3\sqrt{3}$.

1273 — Calcule o perímetro e a área de um trapézio rectângulo conhecendo a altura: $h = 7{,}45$ metros, a base menor: $b = 25{,}14$ metros e o ângulo obtuso que lhe é adjacente: $\alpha = 108^\circ 37' 43''$. R: *Designando por* B *a base maior, tem-se* $B - b = h \times \times \operatorname{tg}(\alpha - \pi/2) = 7{,}45 \times \operatorname{tg} 18^\circ 37' 43''$ *e* $l = h/\cos(\alpha-\pi/2) = 7{,}45/\cos 18^\circ 37' 43''$, *donde* $\log B - b = 0{,}3999062$ *ou* $B - b = 2{,}5113$ *e* $\log l = 0{,}8955229$ *donde* $l = 7{,}8618$.
Perímetro: $P = B + b + h + l = 68{,}1$ m.
Área: $S = \dfrac{B+b}{2} \cdot h = \dfrac{52{,}79}{2} \cdot 7{,}45 = 196{,}6$ m².

1274 — Mostre que, se x, y e z são três números em progressão geométrica, é válida a igualdade $(x+y+z)(x-y+z) = x^2+y^2+z^2$.
R: *A igualdade a verificar reduz-se a* $(x+z)^2 - y^2 = x^2 + y^2 + z^2$ *ou, finalmente, a* $xz = y^2$. *Se* $y = xr$ *e* $z = xr^2$, *tem-se imediatamente* $xz = x^2 r^2 = y^2$.

Soluções dos n.os 1269 a 1274 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico
Ponto n.º 4

1275 — Três proprietários têm de participar nas despesas de um canal de irrigação proporcionalmente à extensão das suas propriedades e na razão inversa das distâncias das mesmas propriedades ao canal. Tendo as despesas do canal importado em 200 contos, calcular a parte a pagar por cada proprietário, sabendo que as propriedades têm de extensão 65 hectares, 96,2 hectares e 70 hectares, e que as suas distâncias ao canal são respectivamente 250 metros, 100 metros e 200 metros. R: *Sejam* x, y *e* z *as partes a pagar pelos proprietários. As equações que resolvem o problema são* $x+y+z=200$ *e* $\dfrac{250x}{65} = \dfrac{100y}{96{,}2} = \dfrac{200z}{70}$ *o que dá os valores* x=33.078$88, y=122.391$86 *e* z=44.529$26.

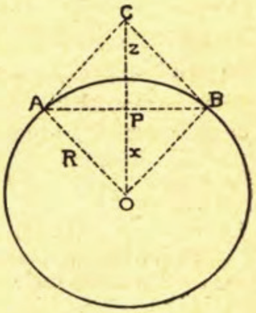
1276 — Determinar k de modo que $2x(x+2) - k^2 > 1$ seja verificada para todos os valores de x. R: *Deveria ser negativo o descriminante do trinómio, isto é,* $2 + 2(k^2+1) < 0$, *desigualdade que é impossível, logo o problema não tem solução.*

1277 — Mostre que num triângulo rectângulo de hipotenusa a é $\dfrac{\operatorname{tg} B}{1+\sec B} = \dfrac{b}{a+c}$. R: *Se forem* b *e* c *os catetos opostos aos ângulos* B *e* C *será* $\operatorname{tg} B = b/c$ *e portanto* $\dfrac{\operatorname{tg} B}{1+\sec B} = \dfrac{b}{a+c}$.

1278 — Determine a área do losango circunscrito a uma circunferência de raio 3 centímetros, sabendo que um dos ângulos do losango mede 60º. R: *Se forem* d_1 *e* d_2 *as diagonais do losango, será* $\dfrac{d_1}{2} = \dfrac{3}{\operatorname{sen} 30}$ *e* $\dfrac{d_2}{2} = \dfrac{3}{\operatorname{sen} 60}$ *logo* $d_2 = 12$ *e* $d_1 = 4\sqrt{3}$, *logo a área mede* $24\sqrt{3}$ cm².

1279 — Determinar a área de um trapézio isósceles inscrito numa circunferência de raio R, sendo uma das bases igual ao diâmetro e um dos lados não paralelos igual a a. R: *As equações que resolvem o problema são:* $a^2 = x^2 + (R-y)^2$ *e* $R^2 = x^2 + y^2$; *sendo* x *a altura do trapézio e* y *metade da base menor. Então será* $x = \dfrac{a}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$ *e* $y = R - \dfrac{a^2}{2R}$ *e a área é* $A = \left(2R - \dfrac{a^2}{2R}\right)\left(\dfrac{a}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}\right)$.

1280 — Dada uma esfera de raio R, determinar a distancia do centro a que se deve tirar um plano secante para que seja igual ao volume da esfera a soma dos volumes do cone circunscrito à esfera com base na secção dêsse plano e do cone com a mesma base e vértice no centro da esfera. R: *Seja* y *o raio de secção produzido na esfera pelo plano,* x *a distância do centro da esfera ao plano secante e* z *a altura do cone circunscrito. A igualdade dos volumes dá-nos a equação* $4R^3 = y^2(x+z)$. *Do triângulo rectângulo* [ACO], *tira-se a relação* $y^2 = xz$; *e do triângulo rectângulo* [APO] *deduz-se a equação* $y^2 + x^2 = R^2$. *Estas três equações permitem determinar o valor pedido que é* $x = R(\sqrt{5}-2)$. *Note-se que para a eliminição basta substituir* y^2 *tirado da* 2.ª *equação na* 1.ª *e na* 3.ª, *dividindo membro a membro as igualdades obtidas.*



Soluções dos n.os 1275 a 1280 de J. da Silva Paulo.