MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.° exame de freqüência, 1942

1281 — Discuta o sistema $9x+my-z=4$, $4mx-2y+(m-1)z=m$ e $5x+(2m-1)y-3z=3(m+2)$ onde m é um número real. R: *Determinado para* $m\neq-1, 35/9$. *Indeterminado para* $m=-1$. *Incompatível para* $m=35/9$.

1282 — Determine a equação do lugar geométrico dos pontos cujas distâncias às duas rectas de equações $ay+bx+c=0$ e $a'y+b'x+c'=0$ estão numa relação k conhecida.

R: $\dfrac{ay+bx+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm k\dfrac{a'y+b'x+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$.

1283 — Deduza a equação dum plano que passe pela recta $x=3z+2$, $y=-z+3$ e diste $\sqrt{3}$ do ponto $(1,2,-3)$. R: $x+3{,}675y+0{,}675z-10{,}025=0$ *e* $x+0{,}925y-2{,}075z-4{,}775=0$.

1284 — Prove, sem desenvolver o determinante, que a equação $\begin{vmatrix} x & c & 1 \\ b & x & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}=0$ admite as raízes 1 e c.

R: *Para* $x=1$ *a* 1.ª *e a* 3.ª *linhas são iguais. Para* $x=c$ *a* 2.ª *e a* 3.ª *colunas são proporcionais.*

1285 — Dada a recta $r=Ax+By+C=0$ e um ponto $M(x_0y_0)$ efectue uma rotação dos eixos supostos rectangulares em tôrno da origem de modo que a recta fique paralela ao novo eixo dos XX. Deduza da operação a fórmula da distância dum ponto a uma recta. R: *Efectuar a rotação, calcular a distância nesse novo sistema e, em seguida, desfazer a rotação.*

1286 — Deduza a equação do plano que passa pelo ponto $M(2,-3,8)$ é paralelo à recta r_1 e perpendicular ao plano Π_1,

$$r_1\equiv x=\frac{y}{4}=\frac{z}{8} \quad e \quad \Pi_1\equiv x-2y+3z-8=0.$$

R: $28(x-2)+5(y+3)-6(z-8)=0$.

Soluções dos n.os 1282, 1284 e 1286 de A. Sá da Costa, e dos n.os 1281, 1283 e 1285 de J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — I.° exame de freqüência, 20-2-1942

1287 - Calcular $[1+i+i^2+\cdots+i^{n-1}]^n$. Discussão ($n$ inteiro e positivo). R: $S=\left[\dfrac{1-i^n}{1-i}\right]^n$. *Se* $n=4p$ *é* $i^n=1$ *e* $S=0$; *se* $n=4p+1$ *é* $i^n=i$ *e* $S=1^n=1$; *se* $n=4p+2$ *é* $i^n=-1$ *e* $S=\left(\dfrac{2}{1-i}\right)^n=2^{2p+1}\times\left[\cos\left(p\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(p\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=(-1)^p2^{2p+1}i$; *se* $n=4p+3$ *é* $i^n=-i$ *e* $S=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=\cos\left(2p\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(2p\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-i$.

1288 — Verificar que os três planos de eqs. $4x-y-z=0$, $2x-2y-3z=0$, $2x-3y+2z=1$ definem uma superfície prismática e determinar os parâmetros directores das arestas. Calcular o volume do prisma que se obtém cortando essa superfície prismática por dois planos perpendiculares às arestas, um passando pela origem e outro pelo ponto $(2,3,3)$. R: *Consideremos o sistema constituido pelas equações dos três planos. A caracteristica da matriz dos coeficientes das variáveis é* 2, *por ser nulo o único determinante de 3.ª ordem que nela pode formar-se e haver determinantes de 2.ª ordem não nulos. Notemos que não são nulos os determinantes* $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=10$, $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-10$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}=-10$ *e que, tomado para principal o sistema constituido por duas quaisquer das três equações e para incógnitas principais* x *e* y, *o caracteristico é, à parte o sinal, o determinante* $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=10$. *Por conseqüência, os três planos intersectam-se dois a dois e definem uma superfície prismática.*

Para determinar os parâmetros directores das arestas, consideremos, por exemplo, a aresta definida pelos dois primeiros planos $\begin{cases} 4x-y-z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$ *cujos parâmetros directores são* $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=5$, $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=10$, $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=10$ *ou* $(1,2,2)$.

O plano π *que passa por* O *e é perpendicular às arestas tem por equação* $x+2y+2z=0$ *e o plano* π' *que passa por* $(2,3,3)$ *e é perpendicular às arestas* $x+2y+2z=14$. *Os pontos de encontro de* π *com as as três arestas são dados por*

$$\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 4x-y-z=0 \\ 2x+2y-3z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 4x-y-z=0 \\ 2x-3y+2z=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \end{cases}$$

e são $(0,0,0)$ $(0,-1/5,1/5)$ $(2/9,-7/45,2/45)$ *e o ponto de encontro de* π' *com a aresta definida pelos dois primeiros planos é a solução do sistema*

$$\begin{cases} x+2y+2z=14 \\ 4x-y-z=0 \\ 2x+2y-3z=0 \end{cases}$$

isto é $(14/9, 28/9, 28/9)$. *O volume do prisma é igual a metade do volume do paralelipipedo cujas arestas concorrentes num vértice são determinadas pelos quatro pontos encontrados. Então, o volume do prisma tem por medida*

$$V=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/5 & 1/5 & 1 \\ 2/9 & -7/45 & 2/45 & 1 \\ 14/9 & 28/9 & 28/9 & 1 \end{vmatrix}=\frac{49}{405}.$$

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 2.º exame de freqüência, 16-6-1942

1289 — Cálcular os três primeiros termos do desenvolvimento em série da função $y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$. R: *Notemos que* $\cos^3 x=\cos x\cdot\cos^2 x=\frac{1}{2}\cos x\cdot(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}(\cos x+\cos x\cdot\cos 2x)=\frac{1}{2}(\cos x+\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x)=\frac{3}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 3x$.

Então, $y=\dfrac{1}{\cos^3 x}=\dfrac{4}{3\cos x+\cos 3x}$. *E, porque*

$$3\cos x=3\left(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)$$ *e*

$$\cos 3x=1-\frac{3^2 x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{3^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$ *será*

$$y=\frac{4}{(3-3x^2/2!+3x^4/4!+\cdots)+(1-3^2x^2/2!+3^4x^4/4!+\cdots)}=$$
$$=\frac{4}{4-6x^2+7x^4/2+\cdots}=1+3x^2/2+11x^4/8+\cdots.$$

1290 — Determinar um polinómio do 4.º grau que tome os mesmos valores que a função $y=x^x$ para $x=-2,-1,0,1,2$. R: *Tem-se o seguinte quadro de valores:*

x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{2}$	−1	1	1	4.

Note-se que $y(0)=\lim\limits_{x\to 0} x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0} x\log x}=e^0=1$. *Seja* $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ *o polinómio pedido. Deverá ser*

$$\begin{cases} 16a-8b+4c-2d+e=\frac{1}{2} \\ a-b+c-d+e=-1 \\ e=1 \\ a+b+c+d+e=1 \\ 16a+8b+4c+2d+e=4 \end{cases}$$

a resolução dêste sistema de equações lineares conduz a $7x^4/16-x^3/24-23x^2/16+25x/24+1$.

1291 — Resolver a equação $2x^4-2x^3-5=0$. A primeira aproximação das raízes irracionais será determinada gràficamente; pedem-se essas raízes aproximadas às décimas. R: *A aplicação do teorema de Descartes à equação e à sua transformada em* $y=-x$, $2y^4+2y^3-5=0$, *mostra-nos que a equação proposta tem apenas duas raizes reais, uma positiva e outra negativa. As outras duas são complexas conjugadas. A raiz positiva é inferior a* 4 *e a negativa é superior a* -4 *(método de Mac-Laurin). A equação não admite raizes inteiras porque o seu 1.º membro toma os valores* $-5,-5,1$ *para* $x=0,1,-1$, *dos quais nenhum é divisível por* 3. *A transformada da equação em* $z=2x$ *é* $z^4-2z^3-40=0$ *que não admite raizes inteiras, visto que o seu 1.º membro, para* $z=0,1,-1$, *toma os valores* $-40,-41,-37$ *nenhum dêles divisível por* 3. *A equação proposta não admite, portanto, raizes racionais. As suas duas raizes reais são irracionais.*

Notemos que a equação proposta pode escrever-se sob a forma $2x^4=2x^3+5$ *e que, portanto, as suas raízes reais serão as abscissas dos pontos de intersecção das curvas de equações* $y=2x^3+5$ *e* $y=2x^4$.

O gráfico destas curvas mostrar-nos-ia que a raiz negativa pertence ao intervalo $(-2,-1)$ *e a positiva ao intervalo* $(1,2)$.

Com o auxilio duma tábua de potências e duma máquina de calcular, constroem-se fàcilmente as linhas preenchidas dos quadros seguintes pela ordem indicada à esquerda:

	x	x^4	x^3	$2x^4-2x^3-5$
1)	−2	16	−8	43
	−1,9			
	−1,8			
	−1,7			
	−1,6			
3)	−1,5	5,0625	−3,375	11,875
	−1,4			
	−1,3			
4)	−1,2	2,0736	−1,728	2,6032
5)	−1,1	1,4641	−1,331	0,5902
2)	−1,	1	−1	−1

donde $-1,1<x_1<-1$

	x	x^4	x^3	$2x^4-2x^3-5$
1)	1	1	1	-5
	1,1			
	1,2			
	1,3			
	1,4			
3)	1,5	5,0625	3,375	$-1,625$
5)	1,6	6,5536	4,096	$-0,0848$

	x	x^4	x^3	$2x^4-2x^3-5$
4)	1,7	8,3521	4,913	1,8782
	1,8			
	1,9			
2)	2	16	8	11

donde $1,6 < x_2 < 1,7$.

Soluções dos n.os 1287 a 1291 de A. Sá da Costa.

GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. P. — Geometria Projectiva — **Exame de freqüência, 1942-43**

Introdução :

1292 — Considerar um triângulo ABC. Dizendo-se interior qualquer ponto I que pertença a um segmento que tenha para extremos o vértice A e um ponto do lado BC. *a*) Demonstrar que a recta BI intersecta o lado AC num ponto X e, depois, que o ponto I está entre B e X. *b*) Demonstrar, também, que o segmento que une dois pontos interiores não intersecta nem o lado BC nem o lado AB.

1293 — Sejam A, B, X e Y quatro pontos duma recta. Se B estiver entre A e X e A entre Y e X, demonstrar que A está entre Y e B.

1294 — Demonstrar que as diagonais dum losango são perpendiculares.

1295 — Poder-se-á afirmar ou negar, sem que seja feita qualquer hipótese sôbre paralelismo, que, num triângulo rectângulo, a recta que une o ponto médio da hipotenusa ao ponto médio dum dos catetos seja perpendicular a êste cateto? ¿ Poder-se-á, igualmente, afirmar ou negar que a mesma recta intersectará o outro cateto?

Geometria Projectiva :

1296 — Seja: ABC, um triângulo; l, uma recta; A_1, B_1 e C_1, os pontos de intersecção da recta l com os lados BC, CA e AB; A'_1, o conjugado harmónico de A_1, relativamente aos vértices B e C; B'_1, o conjugado harmónico de B_1, relativamente aos vértices C e A; C'_1, o conjugado harmónico de C_1, relativamente aos vértices A e B. Demonstrar que as três rectas AA'_1, BB'_1 e CC'_1 concorrem num mesmo ponto.

1297 — Demonstrar que se C separa harmònicamente o ponto D dos pontos A e B, também A separa harmònicamente o ponto B dos pontos C e D.

1298 — Determinar, analìticamente, evidentemente, as abscissas dos pontos que separam harmònicamente tanto os pontos de abscissas -1 e 1, comos os pontos de abscissas $a-1$ e $a+1$.

Construções :

1299 — Desenhar um triângulo equilátero XYZ inscrito numa circunferência de 3 cm de diâmetro. Designar por A o ponto da circunferência dimaetralmente oposto ao vértice Z. Determinar os vértices B, C e D do quadrângulo com o 4.º vértice em A e que tenha, para triângulo diagonal, o triângulo XYZ.

1300 — Desenhar um rectângulo $ABCD$, sendo $AB=5$ cm e $BC=3$ cm. Marcar sôbre AB e para o lado de B o ponto X tal que $BX=3$ cm. Unir X com D. Tirar, só com a régua, pelo ponto C a paralela a XD.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — Cálculo — **2.º exame de freqüência, 1941-42**

1301 — Integrar a equação

$$z'+\frac{z}{\operatorname{sen} 2x}+\frac{1}{2}z^3\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 2x=0\,.$$

R: *Tem-se* $z^{-3}z'+\dfrac{z^{-2}}{\operatorname{sen} 2x}=-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x$ *e fazendo* $z^{-2}=y$ *vem* $\dfrac{y'}{2}-\dfrac{y}{\operatorname{sen} 2x}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x$. *O integral geral da equação sem 2.º membro é* $y=C\operatorname{tg} x$. *Variando constantes vem* $C=\int\operatorname{tg} 2x\,dx$, *logo* $z^{-2}=$ $=C_1\operatorname{tg} x\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x\log\cos 2x$.

1302 — Calcular $\displaystyle\iint_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{x}}$. O domínio D é limitado pelas linhas $y^2=4x$ e $x=1$.

R: $$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^{2\sqrt{x}} dy = 4\,.$$

1303 — Determinar o raio de curvatura da linha $x^2-2xy+2y^2-1=0$ no ponto $(1,1)$.

1304 – Determinar o sentido da concavidade da linha $\rho=\pi/4\theta$ no ponto $(1,\pi/4)$.

1305 — Determinar as assíntotas da linha
$$x=\frac{t}{t^2-1}\,;\ y=\frac{t^3}{t^2-1}\,.$$

1306 — Determinar uma relação entre a e b de modo que a envolvente das rectas $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ seja a hipérbole $xy=1$.

1307 — Determinar os novos limites dos integrais $\int_0^1 dx \int_0^x dy$ quando se inverte a ordem de integração.

1308 — Determinar um integral particular de $y''-y=xe^x$.

Soluções dos n.os 1301 e 1302 de J. Rios de Sousa.

I. S. C. E. F. — 2.ª CADEIRA **— 2.º exame de freqüência — 17-6-1942**

1309 — Determine os pontos múltiplos da curva $y^3-x^3=x^2y^2$ e as tangentes na origem dos eixos coordenados. R: *Os pontos múltiplos da curva dada são as soluções reais do sistema*
$$\begin{cases} f \equiv y^3-x^3-x^2y^2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv -3x^2-2xy^2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 3y^2-2x^2y=0\,. \end{cases}$$
Êste admite a solução única $x=y=0$. *Para* $x=y=0$ *tem-se* $r=s=t=0$ *e* $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=-6\,,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=0$ *e* $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=6$. *A origem é portanto um ponto triplo. A equação complexiva das tangentes é* $-6X^3+6Y^3=0$ *ou* $(X-Y)(X^2+XY+Y^2)=0$ *e só uma é real* $X=Y$.

1310 — Mudar as variáveis independentes na equação $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0$ fazendo
$$\begin{cases} 2x=uv \\ y=2/v\,. \end{cases}$$

1311 — Calcular a área da superfície cilíndrica $y^2=3x$ limitada pelos planos $z=0$, $z=3$, $x=0$, $x=4$. R: *A área da superficie cilindrica* $y=f(x)$ *limitada pelos planos* $x=x_0$, $x=x_1$, $z=z_0$, $z=z_1$ *é* $A=\left|(z_1-z_0)\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx\right|$. *Portanto, para o nosso caso, tem-se sucessivamente*
$$A=3\left|\int_0^4\sqrt{1+3/4x}\,dx\right|=3\left|\int_\infty^{\sqrt{19}/4}\frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^2}\right|=3\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2-1}+\right.$$
$$\left.+\log\sqrt[4]{\frac{t+1}{t-1}}\right]_\infty^{\frac{\sqrt{19}}{4}}=\frac{2\sqrt{19}}{3}+\frac{1}{4}\log\frac{35+8\sqrt{19}}{3}\,.$$

1312 — Integrar a equação $y(2px+y)=\sqrt{x}$. R: *Resolvendo a equação em ordem a* p *vem* $p=-\frac{y}{2x}+\frac{6}{2y\sqrt{x}}$ *que se reconhece como uma equação de Bernoulli. Multiplicando ambos os membros por* $2y$ *obtém-se* $2yp=-\frac{y^2}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ *e substituindo* y^2 *por* z *e, portanto,* $2yp$ *por* z' *encontra-se a equação linear* $z'=-\frac{z}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ *cujo integral geral é*
$$z=e^{\int\frac{dx}{x}}\left[\int\frac{e^{-\int\frac{dx}{x}}}{\sqrt{x}}\,dx+c\right]=x\left[\int\frac{dx}{x\sqrt{x}}+c\right]=$$
$$=x\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}+c\right]=-2\sqrt{x}+cx\,.$$
O integral geral da equação proposta é $y^2=-2\sqrt{x}+cx$.

Soluções dos n.os 1309 a 1312 de A. Sá da Costa.

I. S. T. — CÁLCULO — **2.º Exame de freqüência, 1942**

1313 — Determinar a envolvente duma família de rectas tal que é constante e igual a 3 o comprimento do segmento em cada uma delas intersectado pelos eixos coordenados (rectangulares) R: *A equação da envolvente obtém-se eliminando* p *entre as equações*
$$\begin{cases} \dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{\sqrt{9-p^2}}-1=0 \\ \dfrac{x}{p^2}-\dfrac{py}{(9-p^2)^{3/2}}=0\,. \end{cases}$$
A primeira é a equação geral das rectas nas condições do enunciado e a segunda obteve-se igualando a zero a derivada parcial em ordem a p *do primeiro membro da equação anterior.*

1314 — Calcular o volume limitado pelo plano xy, pelo paraboloide $xy=2z$ e pela superfície cilíndrica $(x^2+y^2)^2=2xy$.

1315 — Integrar a equação

$$(x-x^2)\,y''+\frac{1}{2}(3-4x)\,y'=y/4$$

sabendo que $y_1=x^n$ é integral particular. Determinar n. R: *A transformação* $y=y_1t$ *permite baixar duma unidade a ordem da equação proposta, mantendo-a homogénea. Assim, vem* $u'(2x-2x^2)=u(2x-1)$ *que se integra por separação das variáveis, sendo* $u=t'$ *e* $y_1=x^{-1/2}$.

1316 — Determinar uma curva tal que a sua ordenada, em cada ponto, é metade da ordenada da sua evoluta, no respectivo centro de curvatura. R: *Tudo se reduz à integração da equação diferencial* $yy''=1+y'^2$ *incompleta em* x *e convertível, mediante a mudança* $y'=z$, *na equação de 1.ª ordem* $yz'=1+z^2$ *de variáveis separáveis.*

Soluções dos n.os 1315 a 1316 de A. Sá da Costa.

F. C. P. — Análise Superior — 1.º Exercício de revisão, 1942-43

1317 — Integrar a equação $2zq-pq^2-4p=0$ e determinar a superfície integral que contém a linha: $y=0$ e $z=x^2/2$. R: *Vamos usar o método de Lagrange-Charpit. Do sistema tiramos:* $\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}$ *ou* $p=cq$, *donde* $q=\sqrt{\frac{2z-4c}{c}}$ *e* $p=\sqrt{c(2z-4c)}$. *Temos:* $dz=\sqrt{c(2z-4c)}\,dx+\sqrt{\frac{2z-4c}{c}}\,dy$. *Integrando vem o integral completo:* $c(2z-4c)=(cx+y+kc)^2$. *As superfícies integrais pedidas são:* a) $y=0$ *e* b) *a que se obtém eliminando* c *entre:* $c(2z-4c)=(cx+y+2c\sqrt{c-1})^2$ *e*

$$2z-8c=2(cx+y+2c\sqrt{c-1})\left(x+2\sqrt{c-1}+\frac{c}{\sqrt{c-1}}\right).$$

1318 — Integrar a equação $p^2+q=z$ pelo método de Cauchy, determinando a superfície integral que contém a linha $\begin{cases} y=1 \\ z=x^2. \end{cases}$ R: *Temos:* $\frac{dx}{2p}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2p^2+q}=\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}=\frac{du}{u}$. *Façamos* $u_0=1$. *Temos:* $q=q_0u$, $p=p_0u$; $y=y_0+\log u$, $x=x_0+2p(u-1)$ *e* $z=z_0+p_0^2(u^2-1)+q_0(u-1)$. *Fazendo* $y=u$ *vem* $y_0=1$, $x_0=v$ *e* $z_0=v^2$. $H_0:\ \frac{\partial z_0}{\partial v}-p_0\frac{\partial x_0}{\partial v}-q_0\frac{\partial y_0}{\partial v}=0$ *ou* $2v-p_0=0$; $p_0=2v$ *e* $q_0=-3v^2$. *Portanto:* $x=v(4u-3)$, $y=1+\log u$, $z=v^2u(4u-3)$ *ou* $x^2=z(4-3e^{1-y})$.

1319 — O plano tangente em M duma superfície corta o eixo dos zz num ponto P. $\overline{PM}$ corta o plano xOy em Q. Determinar as superfícies S tais que Q tenha de abscissa a. Determinar a superfície que contém a circunferencia $x^2+y^2=ax$ e $z=a$. R: *Plano tangente:* $Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$. *Equações de* PM: $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z-z+px+qy}{px+qy}$.

Coordenadas de Q: $\begin{cases} X=a=\dfrac{-z+px+qy}{px+qy}\,x \\ Y=y_2=\dfrac{-z+px+qy}{px+qy}\,y. \end{cases}$

Donde a equação $px+qy=-\frac{zx}{a-x}$. *Integrando vem:* $z=(x-a)\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ *e a superfície pedida é:*

$$z=-(x-a)\,\frac{x^2+y^2}{y^2}.$$

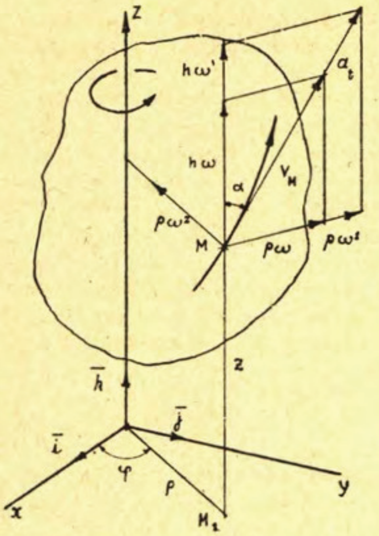
Soluções dos n.os 1317 a 1319 de Jaime Rios de Sousa.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — Mecânica Racional — Exame de freqüência, 2.º sem., 1.ª ch., 1941-42

1320 — Um sólido está animado dum movimento helicoidal dextrorsum uniformemente variado em volta dum eixo fixo com respeito ao referencial do movimento. Sabe-se que um dos seus pontos M, à distância de 60 cm do eixo, possue uma velocidade igual a 2 m/s no instante definido por $t=10$ s e que o vector velocidade de M faz com o eixo do movimento um ângulo de 30°. A aceleração de M vale 2 m/s². Determinar no instante considerado: *a)* a velocidade angular do movimento (em voltas p/min.); *b)* a velocidade de escorregamento do sólido ao longo do eixo (em dm/min.); *c)* o passo do movimento (em metros); *d)* o valor da aceleração angular do movimento; *e)* calcular o valor da velocidade dum ponto à distância de 1 metro do eixo no instante definido por $t=20$ s. R: a), b) e c) $\rho=0{,}60$ m, $v^1_M=2$ m/s *e* $t_1=10$ s; $\alpha=30°$; $h\omega_1=v^1_M\cdot\cos 30°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=1{,}73$ m/s, $\rho\omega_1=v^1_M\cdot \text{sen}\,30°=2\cdot\frac{1}{2}=1$ m/s *e* $\omega_1=\frac{1}{0{,}6}$ rad./s, *donde: velocidade de escorregamento:* 1038 dm/min; *velo-*

cidade angular: $\frac{50}{\pi} \approx 15{,}9$ v/min.; *passo do movimento:* 6,5 m; d) $a_M^2 = \rho^2\omega^4 + h^2\omega'^2 + \rho^2\omega'^2 \rightarrow 4 = \frac{1}{0{,}6^2} +$



$+ 0{,}6^2 \cdot \omega'^2 \cdot 2^2$, *donde* $\omega' = \pm \frac{10}{36 \times 2}\sqrt{44} = \pm 0{,}92$ rad./s² *e êste valor de* ω' *é independente do tempo, visto o movimento ser uniformemente variado. Tomaremos* $\bar{\omega}' = 0{,}92 \cdot \bar{k}$; e) $\omega = \omega' t + \omega_0 = 0{,}92 \cdot t + \omega_0$. *Para* $t = 10$ s, $\omega_1 = 1{,}66$ rad./s, *logo* $1{,}66 = 0{,}92 \times 10 + \omega_0$, *donde* $\omega_0 = -7{,}54$ *e por conseguinte* $\omega = 0{,}92\, t - 7{,}54$. *Para* $t = 20$ *vem* $\omega_2 = 10{,}86$ *e* $v_M = \sqrt{\rho^2 + h^2} \cdot \omega = \sqrt{1 + 1{,}038^2} \times 10{,}86$, *donde* $v_M = 15{,}64$ m/s.

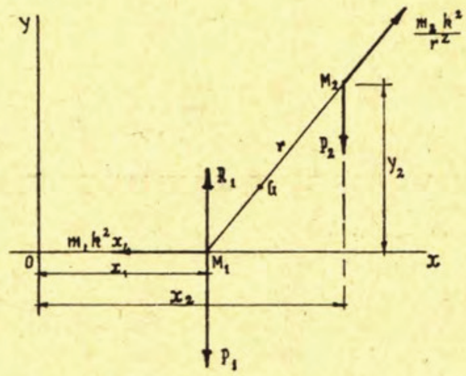
1321 — Um sistema é constituído por dois pontos materiais pesados M_1 e M_2 de massas respectivamente iguais a m_1 e m_2. O ponto M_1 é obrigado a uma horizontal Ox perfeitamente polida (O fixo) e o ponto M_2 move-se livremente no plano vertical que contém Ox. Além dos pesos, actuam sôbre os pontos mais as seguintes fôrças: sôbre M_1 uma atracção proporcional à sua distância x a O (factor de proporcionalidade $m_1 k^2$), sôbre M_2 uma fôrça repulsiva proveniente de M_1 inversamente proporcional ao quadrado da distância de M_1 a M_2 (factor de proporc. $m_2 k^2$). Notar que se supõe M_1 *não* actuado por M_2. *a)* parametrar o sistema e classificar as fôrças que intervêm no estudo do seu movimento de dois modos diferentes; *b)* exprimir em função dos parâmetros e das suas primeiras derivadas: a resultante cinética, a fôrça viva e o momento cinético do sistema em M_1 (no movim. absoluto); *c)* id., id., do momento cinético em O no movimento relativo em volta de G; *d)* escrever as equações independentes das reacções que permitem estudar o movimento do sistema; *e)* escrever as equações que completamente determinam as fôrças de ligação. R: a) *Parâmetros:* x_1, x_2, y_2. *Classificação das fôrças — Exteriores:* $p_1, p_2, m_1 k^2 x_1, \frac{m_2 k^2}{r^2}, R_1$; *Interiores: não há; Dadas:* $p_1, p_2, m_1 k^2 x_1^2, \frac{m_2 k^2}{r^2}$; *Ligação:* R_1; b) $\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2$ *donde* $\begin{cases} Q_x = m_1 x_1' + m_2 x_2' \\ Q_y = m_2 y_2', \end{cases}$

$2T = m_1 x_1'^2 + m_2 (x_2'^2 + y_2'^2)$,

$$\bar{K}_{M_1} = \overline{M_2 - M_1} \wedge \overline{m_2 v_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 & 0 \\ m_2 x_2' & m_2 y_2' & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= m_2 [(x_2 - x_1) y_2' - y_2 x_2'] \cdot \bar{k};$$

c) *No movimento relativo em volta de* G *o momento cinético é independente do polo (quantidade de movimento relativa nula) e portanto* $\bar{K}_O^r = \bar{K}_G^r = K_G$.



$\bar{K}_G = m_2 [(x_2 - x_1) y_2' - y_2 x_2'] \cdot \bar{k} + Q_x \eta - Q_y (\xi - x_1)$ *onde* $\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$, $\eta = \frac{m_2 y_2}{m_1 + m_2}$; d) $m_1 x_1'' = -m_1 k^2 x_1$,

$$m_2 x_2'' = \frac{m_2 k^2}{r^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad m_2 y_2'' = -p_2 + \frac{m_2 k^2}{r^2} \cdot \frac{y_2}{r};$$

e) $m_1 y_1'' = 0 = R_1 - p_1 \rightarrow R_1 = p_1$.

Soluções dos n.os 1320 e 1321 de R. Sarmento de Beires.

I. S. T. — Mecânica Racional — 2.º exame de freqüência, 1942

1322 — Um ponto material P é obrigado a mover-se, sem atrito, sôbre um elipsoide de revolução, e atraído, pelos dois focos F e F', com fôrças respectivamente proporcionais a $\overline{PF}^2$ e $\overline{PF'}^3$. Achar as posições de equilíbrio.

1323 — Um ponto material livre descreve uma parábola, sob a acção duma fôrça central, sendo o centro de fôrças o ponto de intersecção da directriz com o eixo da parábola. Achar a lei de fôrças.

1324 — Um ponto move-se, com movimento uniforme, sôbre uma curva plana fixa. ¿Qual deve ser a curva para que a projecção da aceleração, sôbre uma recta fixa do plano da curva, seja constante?

1325 — Um fio pesado homogéneo está em equilíbrio, suspenso pelas suas extremidades em dois pontos A e B, situados à mesma altura. Conhecido o comprimento do fio, ¿qual deve ser a distância $\overline{AB}$ para que a tensão seja mínima em A e B?

F. C. P. — Física Matemática — Exame final, Julho de 1942

1326 — Seja $\cdots \lambda_{-n} < \cdots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 \cdots < \lambda_n \cdots$ uma sucessão tal que $R_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} I_n$, $I_n = [\lambda_n \leq \lambda \leq \lambda_{n+1}]$ e representemos por $E(\lambda)$ uma decomposição da unidade.

Qual é o domínio do operador $B = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda'_n E(I_n)$ em què $\{\lambda'_n\}$ é uma sucessão de números quaisquer, reais ou complexos? Será indiferente a ordem pela qual se escrevem os termos $\lambda'_n E(I_n)$?

Que operador se obtém no caso particular $\lambda'_n = 1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$?

Determinado êste operador, calcular os valores próprios e os espaços próprios de B.

Haverá uma base de vectores próprios?

B pode representar uma grandeza física?

Caracterizá-la, dando o espectro, a probabilidade de um valor do intervalo $J \quad \lambda' < \lambda \leq \lambda''$.

A circunstância de $\{\lambda'_n\}$ ser uma sucessão discreta ou não, terá alguma influência sôbre o conjunto dos resultados possíveis de uma medida de B (o espectro da grandeza B)?

1327 — Seja A uma grandeza física e $E(\lambda)$ o seu operador de projecção.

Se fizermos $U(I) = \| E(I)\varphi \|^2$, a cada conjunto $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}_1$ corresponde uma medida exterior $\overset{*}{U}(\mathfrak{M})$:

Nestas condições, discutir a seguinte definição.

$\overset{*}{U}(\mathfrak{M})$ é a probabilidade de que, ao medir A, no estado físico φ, se encontre como resultado um ponto do conjunto $\mathfrak{M}$ mensurável-$\overset{*}{U}$.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. L. — Cálculo das Probabilidades — 13-2-1942

1328 — Tiram-se 7 cartas de um baralho de 52. Calcular a probabilidade de saída de 4 figuras e do mesmo naipe (o ás é considerado figura).

1329 — São dadas 4 urnas com as composições seguintes: U_1, 2 esferas brancas e 3 esferas pretas; U_2, 2 esf. br. e 8 esf. pr.; U_3, 6 esf. br. e 4 esf. pr.; e U_4, 4 esf. br. e 1 esf. pr. Extraem-se 4 esferas, uma de cada urna. Pede-se a probabilidade de que pelo menos 2 das esferas extraídas sejam brancas. R: *Seja* p_i *a probabilidade de saída de uma esfera branca da urna* U_i *e* $q_i = 1 - p_i$ *a probabilidade relativa à esfera preta. Tem-se:* $p_1 = 2/5$, $p_2 = 1/5$, $p_3 = 3/5$ *e* $p_4 = 4/5$. *Designando por* P_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ *a probabilidade de saída de* k *esferas brancas na extracção indicada, a probabilidade pedida* P *é:* $P = P_2 + P_3 + P_4 = 1 - P_0 - P_1$, *atendendo a que* $\sum_{k=0}^{4} P_k = 1$. *Como é sabido,* P_k *é o coeficiente de* t^k *no produto* $\Pi(p_i t + q_i)$. *Temos pois:* $P_0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 = 24/5^4$, $P_1 = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 154/5^4$, *e portanto* $P = 447/625 \sim 0{,}715$.

Solução de Manuel Zaluar

F. C. L. — Cálculo das Probabilidades — 2.º exame de freqüência, Maio, 1942

Enuncie o paradoxo de Bertrand e explique porque há várias soluções.

Noção de pêso das observações.

Explique como no problema de compensação de observações indirectas pode reduzir as equações de observações não lineares à forma linear.

1330 — Calcule o valor médio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sendo $\frac{dx\,dy}{k}$ a probabilidade elementar e sendo o domínio de definição de $f(x, y)$ limitado por $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 4$.

1331 — Dum ângulo α obtiveram-se as seguintes determinações:

$$30^o\,20' \pm 0{,}2'\,,\quad 30^o\,22' \pm 0{,}4'\,,\quad 30^o\,19' \pm 0{,}2'\,.$$

Calcule o valor mais provável e um aferidor.

F. C. P. — CÁLCULO DAS PROBABILIDADES — **2.° exame de freqüência, 1942**

1332 — Três séries de medições de uma grandeza conduziram aos seguintes resultados (l_i): $120{,}43 \pm 0{,}15$, $120{,}38 \pm 0{,}20$ e $120{,}50 \pm 0{,}20$. Calcular a média pesada e o seu êrro mediano. R: *Pondo* $l_i = 120{,}30 + \frac{z_i}{100}$ *teremos* $z_1 = 13$, $z_2 = 8$ *e* $z_3 = 20$. *Tomando iguais à unidade os pesos das duas últimas determinações* $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, *virá* $p_1 = \frac{0{,}20^2}{0{,}15^2} = 1{,}8$.

1333 — Medições de dois lados e do ângulo compreendido dum triângulo plano conduziram às médias $a = 3{,}000 \pm 0{,}004$, $b = 4{,}000 \pm 0{,}005$ *e* $C = 90^o \pm 10''$. Calcular o valor mais provável do lado c e o seu êrro. R: *De* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ *resulta para valor mais aproximado* $c_0 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. *O desenvolvimento linear aproximado* $c - c_0 = \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)_0 (a-a_0) + \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)_0 (b-b_0) + \left(\frac{\partial c}{\partial C}\right)(C-C_0) = \frac{3}{5}(a-a_0) + \frac{4}{5}(b-b_0) + \frac{12}{5}(C-C_0)$ *conduz ao êrro mediano* (*medições independentes de* a, b *e* C)

$$m_c^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 m_C^2\,,$$ *sendo* $m_a = 0{,}004$, $m_b = 0{,}005$ *e* $m_C \simeq \text{sen}\,10''$.

1334 — Medições das distâncias de três pontos colineares A, B e C conduziram aos valores $\overline{AB} = 1504{,}12$, $\overline{BC} = 948{,}15$ e $\overline{AC} = 2452{,}20$. Determinar os valores mais prováveis dessas distâncias e os seus erros, *a)* supondo igualmente precisos os valores dados; *b)* atribuindo às três medições de distâncias pesos a elas inversamente proporcionais. R: *Pondo*

$$\overline{AB} = 1504{,}12 + \frac{l_1}{100}\,,\quad \overline{BC} = 948{,}15 + \frac{l_2}{100} \quad e \quad \overline{AC} = 2452{,}20 - \frac{l_3}{100}\,,$$

os resultados das medições são $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ *e a equação de condição* $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ *escreve-se* $l_1 + l_2 + l_3 + 7 = 0$. *O problema poderá ser resolvido por compensação.*

Soluções dos n.os 1332 a 1334 de Gonçalves Miranda.

PROBLEMAS

Secção a cargo de A. Ferreira de Macedo e Mário de Alenquer

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Matemáticas Elementares

1335 — Seja $\overline{OA_0}$ um segmento rectilíneo de comprimento igual ao dôbro do diâmetro de uma circunferência dada. Marque-se, a partir de $\overline{OA_0}$, o ângulo $A_0\hat{O}A_1 = 45^o$, e outro $O\hat{A}_0A_1 = 90^o$; a partir de $\overline{OA_1}$, o ângulo $A_1\hat{O}A_2 = \frac{1}{2}\cdot 45^o$, e outro $O\hat{A}_1A_2 = 90^o$; a partir de $\overline{OA_2}$, o ângulo $A_2\hat{O}A_3 = \frac{1}{2^2}\cdot 45^o$, e outro $O\hat{A}_2A_3 = 90^o$; e assim sucessivamente, de modo que seja sempre $A_{n-1}\hat{O}A_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot 45^o$ e $O\hat{A}_{n-1}A_n = 90^o$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{OA_n}$.