1331 — Dum ângulo α obtiveram-se as seguintes determinações:

$30^{o}\,20' \pm 0{,}2'$, $30^{o}\,22' \pm 0{,}4'$, $30^{o}\,19' \pm 0{,}2'$.

Calcule o valor mais provável e um aferidor.

F. C. P. — Cálculo das Probabilidades — 2.º exame de freqüência, 1942

1332 — Três séries de medições de uma grandeza conduziram aos seguintes resultados (l_i): $120{,}43 \pm 0{,}15$, $120{,}38 \pm 0{,}20$ e $120{,}50 \pm 0{,}20$. Calcular a média pesada e o seu êrro mediano.

R: *Pondo* $l_i = 120{,}30 + \frac{z_i}{100}$ *teremos* $z_1 = 13$, $z_2 = 8$ *e* $z_3 = 20$. *Tomando iguais à unidade os pesos das duas últimas determinações* $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, *virá* $p_1 = \frac{0{,}20^2}{0{,}15^2} = 1{,}8$.

1333 — Medições de dois lados e do ângulo compreendido dum triângulo plano conduziram às médias $a = 3{,}000 \pm 0{,}004$, $b = 4{,}000 \pm 0{,}005$ *e* $C = 90^{o} \pm 10''$. Calcular o valor mais provável do lado c e o seu êrro. R: *De* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ *resulta para valor mais aproximado* $c_0 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. *O desenvolvimento linear aproximado* $c - c_0 = \left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)_0 (a - a_0) + \left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)_0 (b - b_0) + \left(\frac{\partial c}{\partial C}\right) (C - C_0) = \frac{3}{5}(a - a_0) + \frac{4}{5}(b - b_0) + \frac{12}{5}(C - C_0)$ *conduz ao êrro mediano (medições independentes de* a, b *e* C)

$$m_c^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 m_b^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 m_C^2,$$ *sendo* $m_a = 0{,}004$, $m_b = 0{,}005$ *e* $m_C \approx \operatorname{sen} 10''$.

1334 — Medições das distâncias de três pontos colineares A, B e C conduziram aos valores $\overline{AB} = 1504{,}12$, $\overline{BC} = 948{,}15$ e $\overline{AC} = 2452{,}20$. Determinar os valores mais prováveis dessas distâncias e os seus erros, *a)* supondo igualmente precisos os valores dados; *b)* atribuindo às três medições de distâncias pesos a elas inversamente proporcionais. R: *Pondo*

$$\overline{AB} = 1504{,}12 + \frac{l_1}{100}, \quad \overline{BC} = 948{,}15 + \frac{l_2}{100} \quad e$$

$$\overline{AC} = 2452{,}20 - \frac{l_3}{100},$$

os resultados das medições são $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ *e a equação de condição* $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ *escreve-se* $l_1 + l_2 + l_3 + 7 = 0$. *O problema poderá ser resolvido por compensação.*

Soluções dos n.os 1332 a 1334 de Gonçalves Miranda.

PROBLEMAS

Secção a cargo de A. Ferreira de Macedo e Mário de Alenquer

As resoluções de problemas propostos devem ser-nos remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da Gazeta.

Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de tôdas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Matemáticas Elementares

1335 — Seja $\overline{OA_0}$ um segmento rectilíneo de comprimento igual ao dôbro do diâmetro de uma circunferência dada. Marque-se, a partir de $\overline{OA_0}$, o ângulo $A_0\hat{O}A_1 = 45^{o}$, e outro $O\hat{A}_0A_1 = 90^{o}$; a partir de $\overline{OA_1}$, o ângulo $A_1\hat{O}A_2 = \frac{1}{2}\cdot 45^{o}$, e outro $O\hat{A}_1A_2 = 90^{o}$; a partir de $\overline{OA_2}$, o ângulo $A_2\hat{O}A_3 = \frac{1}{2^2}\cdot 45^{o}$, e outro $O\hat{A}_2A_3 = 90^{o}$; e assim sucessivamente, de modo que seja sempre $A_{n-1}\hat{O}A_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot 45^{o}$ e $O\hat{A}_{n-1}A_n = 90^{o}$. Calcular $\lim_{n\to\infty} \overline{OA_n}$.

e verificar que é perpendicular a $\overline{OA_0}$ e igual ao perímetro da circunferência dada.

1336 — Mostrar que, sendo $2^x \cdot 3^y = 3^x \cdot 4^y = 6$, é também $x^2 - 2y^2 = 2x - 3y$.

1337 — Demonstrar a identidade
$8 \operatorname{sen} 10^\circ \cdot \operatorname{sen} 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 70^\circ = 1$.

1338 — Resolver a equação
$\operatorname{sen} 5x \cdot \cos 3x = \operatorname{sen} 9x \cdot \cos 7x$.

1339 — Três números x, y e z estão em progressão aritmética, estando $x+y$, y e $y+z$ em progressão geométrica. Calcular êsses números sabendo ainda que a soma dos quadrados dos extremos x e z é 8. Calcular as razões das duas progressões.

Problemas propostos por A. A. Ferreira de Macedo.

1340 — São dadas as circunferências $C_1, C_2 \cdots C_n$ tais que: *a)* os centros estão alinhados; *b)* a circunferência C_i $(i=2, \cdots, n-1)$ é tangente à circunferência C_{i-1} e à circunferência C_{i+1}; *c)* as circunferências são tangentes às rectas a e b. Conhecendo o ângulo 2α das rectas a e b e o raio R_1 de C_1, calcular a soma dos raios das n circunferências. [Considerar os dois casos: $R_j < R_{j+1}$ e $R_j > R_{j+1}$, $(j=1, \cdots, n-1)$].

1341 — Calcular o valor da soma
$S = 1/1 + 2/2 + \cdots + n!n$.

1342 — Desenhar três circunferências de raios proporcionais a h, k e l, de modo que cada circunferência seja tangente às outras duas e a dois lados de um triângulo de que é dada a área, S.

Problemas n.os 1340 a 1342 propostos por José Morgado (Pôrto).

1343 — Consideremos um diedro de rectilíneo 2α e um plano que secciona o diedro perpendicularmente ao plano bissector. Sendo β o ângulo formado pela aresta e por aquêle plano, determinar, em função de α e β, o ângulo de secção do diedro.

Problema proposto por Álvaro Simões (Sangalhos).

SOLUÇÕES RECEBIDAS

Matemáticas Elementares

1082 — Mostrar que $1000!$, escrito no sistema decimal, termina em 249 zeros. R: *O número de zeros dum factorial é determinado pelo número de factores* 2 *e* 5 *que a sua decomposição comporta; mas como o factor* 2 *entra em* $1000!$ *mais vezes que o factor* 5, *basta ver o número de vezes que êste último factor entra para se saber o número de zeros com que termina; e assim em* $1000!$ *há:*

$$\begin{array}{r l} 200 & \text{——} \dot{5} \\ 40 & \text{——} \dot{5}^2 \\ 8 & \text{——} \dot{5}^3 \\ 1 & \text{——} \dot{5}^4 = 625 \\ \hline 249 & \end{array}$$

$\therefore$ *O factorial* 1000 *termina em* 249 *zeros.*

Solução de J. S. Faria de Abreu (Penafiel).

1180 — Calcular os coeficientes a, b e c, na identidade: $a + b \cos 2x + c \cos 4x = \operatorname{sen}^4 x$. R: *Tratando-se duma identidade, basta atribuir a* x *três valores distintos que não difiram de* $2k\pi$ (k *inteiro*), *por exemplo* $x=0$, $\pi/4$, $\pi/2$, *para obter um sistema, neste caso* $a+b+c=0$, $a-c=1/4$, $a-b+c=1$, *que determina os coeficientes* $a=3/8$, $b=-1/2$, $c=1/8$.

Solução de José Morgado.

Enviaram também soluções exactas: Álvaro Simões (Sangalhos), A. da Fonseca Faia (Lisboa), Rui Verdial (Pôrto) e J. S. Faria de Abreu (Penafiel).

1184 — Mostrar que, se a, b e c são as medidas dos 3 lados de um triângulo, por ordem crescente de grandeza, se verifica a desigualdade:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > (a^2 + bc)(a + b + c).$$

R: *A desigualdade pode apresentar-se da seguinte maneira:* $a(a^2+bc) + b(b^2+ac) + c(c^2+ab) > a(a^2+bc) + b(a^2+bc) + c(a^2+bc)$ *ou* $b(b^2+ac) + c(c^2+ab) > b(a^2+bc) + c(a^2+bc)$. *De* $a+b>c$, $a+c>b$, $b>a$ *e* $c>a$ *resulta que é* $b^2+ac > a^2+bc$ *e* $c^2+ab > a^2+bc$ *o que demonstra a desigualdade proposta.*

Solução de M. C. Guerra dos Santos (Lisboa).
Enviou também solução exacta: José Morgado.

1185 — Sendo a área da esfera circunscrita a um tronco de cone circular de bases paralelas seis vezes maior do que a área da esfera inscrita no mesmo tronco, calcular a relação entre os raios das bases do tronco. R: *Sejam* R_c *e* R_i *os raios das esferas circunscrita e inscrita,* R *e* r *os raios das bases maior e menor do tronco. Por hipótese é* $4\pi R_c^2 = 24\pi R_i^2$ *logo será* $R_c^2 = 6R_i^2$. *A geratriz do cone é* $R+r$ *e tem-se* $4R_i^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr$, *donde* $R_i^2 = Rr$. *Se fôr* d *a distância do centro da esfera circunscrita ao plano da base menor do tronco, tem-se* $d^2 + r^2 = R_c^2$ *e* $(2R_i - d)^2 + R^2 = R_c^2$ *donde* $d = (4R_i^2 - r^2 + R^2)/4R_i$ *ou* $d = (4Rr - r^2 + R^2)/4\sqrt{Rr}$ *e* $R_c^2 = r^2 + (4Rr - r^2 + R^2)^2/16Rr$. *Subs-*

tituindo em $R_c^2=6R_i^2$ *vem, finalmente,* $r^2+(4Rr-r^2+R^2)^2/16Rr=6Rr$.

Solução de Álvaro Simões (Sangalhos).
Enviou também solução exacta: José Morgado.

1186 — Num quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência de raio $r=5$ os lados medem respectivamente $\overline{AB}=5\sqrt{3}$, $\overline{BC}=5$ e $\overline{CD}=8$. ¿Qual é o comprimento da diagonal $\overline{BD}$? R: *Se fôr* O *o centro da circunferência, tem-se*

$$\operatorname{sen}\frac{B\hat{O}C}{2}=\frac{\overline{BC}}{2r}=\frac{1}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}\frac{C\hat{O}D}{2}=\frac{\overline{CD}}{2r}=\frac{4}{5} \quad donde$$

$$\overline{BD}=2r\left|\operatorname{sen}\frac{B\hat{O}D}{2}\right|=10\left|\operatorname{sen}\left(\frac{B\hat{O}C}{2}+\frac{C\hat{O}D}{2}\right)\right|=$$

$$=10\left|\operatorname{sen}\frac{B\hat{O}C}{2}\cos\frac{C\hat{O}D}{2}+\cos\frac{B\hat{O}C}{2}\operatorname{sen}\frac{C\hat{O}D}{2}\right|=$$

$$=10(3/10+2\sqrt{3}/5)=3+4\sqrt{3}.$$

Solução de A. Reis (Lisboa).
Enviaram também soluções exactas: A. da Fonseca Faia (Lisboa), José Morgado, Rui Verdial (Pôrto), Álvaro Simões (Sangalhos), J. S. Faria Abreu (Penafiel).

1187 — Consideremos num bilhar circular uma bola num ponto A. ¿Em que direcção se deve lançar a bola para que torne a passar pelo ponto A após duas reflexões sucessivas? R: *Como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão e as normais à circunferência passam pelo centro, a bola no seu movimento descreve um triângulo isósceles de vértice* A. *Designando por* d *a distância de* A *ao centro, por* α *o ângulo da direcção pedida com o diâmetro que passa por* A *e por* β *o ângulo de incidência, tem-se* $\frac{R}{d}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{1-2\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}\beta}$ *por ser* $\alpha+2\beta=\pi/2$. *Portanto é*

$$\operatorname{sen}\beta=(-R\pm\sqrt{R^2+8d^2})/4d$$

e $$\alpha=\pi/2-2\operatorname{arc\,sen}(-R\pm\sqrt{R^2+8d^2})/4d.$$

Solução de José Morgado.

1248 — Determinar o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos que têm um lado dado e o vértice oposto sôbre uma recta dada. R: *Seja* M *o ponto médio do lado dado e* P *um ponto da recta* r *dada. Marque-se sôbre* MP *o ponto* Q *tal que* $\overline{MQ}/\overline{MP}=1/3$. *O lugar procurado é a recta* s//r *e passando por* Q. *Demonstração:* Q *é o centro de gravidade do triângulo com a base dada e o vértice em* P. *Por outro lado, seja* C *um ponto qualquer de* r, *distinto de* P. *Designe-se por* G *a intersecção de* s *com* CM. *De* $\overset{\triangle}{MPC}\backsim\overset{\triangle}{MQG}$, *resulta* $\overline{MG}/\overline{MC}=\overline{MQ}/\overline{MP}=1/3$. *Logo,* G *é o c. de g. do triângulo com a base dada e o vértice em* C.

Solução de PEME.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Secção a cargo de J. da Silva Paulo

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

12—LEROY, E. — **Cours d'Algèbre et d'Analyse.** Mathématiques Spéciales. Élèves ingénieurs. Étudiants des Facultés. Agrégation. Essai d'enseignement concret et intuitif. Tome II, Analyse. 1 vol. in-8.º de X-352 pags. preço 70 frs.; Vuibert, Paris, 1940.

O Tomo I, (Álgebra) desta obra apareceu em 1935. No presente tomo (Análise) a maneira concreta e intuitiva do autor parece ter-se complicado. As fórmulas carregadas de índices são muito numerosas. Pelo contrário os gráficos continuam a ser excelentes.

A obra completa é comparável a um Curso de Matemáticas Gerais, e que tem esta espécie de rigor intuitivo de M. Leroy mas sente-se ainda a influência dos programas, mais que o espírito liberal de um Paul Appell.

(De A. Buhl (Toulouse) em «L'Enseignement Mathématique», vol. 38 — Trad. J. S. P.)

13 — AGOSTINI, Amedo — **Lezioni di Analisi Matematica** — R. Accademia Navale, 1936, 8+336 págs.

Êste livro representa um excelente curso de introdução à análise, que tem sido dado desde há alguns anos na Academia Naval Italiana. É seu fim, em primeiro lugar, preparar os estudantes para as matemáticas aplicadas. O modo de tratar as questões é claro e rigoroso, como é para desejar dum livro de tal carácter, sendo os exemplos bem escolhidos e os problemas instrutivos. As referências históricas neste trabalho, são, contudo, freqüentemente desvirtuadas. Assim, na pág. 323, ao tratar da história da resolução algébrica das equações, o autor fala de Dal Ferro, Ferrari, Rufini, mas não se refere a Abel e Galois. Além disso, os nomes de Newton e Leibniz aparecem ligados com vários pormenores, mas o seu papel