

tituindo em  $R_c^2 = 6R^2$  vem, finalmente,  $r^2 + (4Rr - r^2 + R^2)^2 / 16Rr = 6Rr$ .

Solução de Álvaro Simões (Sangalhos).

Enviou também solução exacta: José Morgado.

**1186** — Num quadrilátero  $ABCD$  inscrito numa circunferência de raio  $r=5$  os lados medem respectivamente  $\overline{AB}=5\sqrt{3}$ ,  $\overline{BC}=5$  e  $\overline{CD}=8$ . Qual é o comprimento da diagonal  $\overline{BD}$ ? R: Se fôr  $O$  o centro da circunferência, tem-se

$$\text{sen } \frac{\widehat{BOC}}{2} = \frac{\overline{BC}}{2r} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen } \frac{\widehat{COD}}{2} = \frac{\overline{CD}}{2r} = \frac{4}{5} \quad \text{donde}$$

$$\overline{BD} = 2r \left| \text{sen } \frac{\widehat{BOD}}{2} \right| = 10 \left| \text{sen } \left( \frac{\widehat{BOC}}{2} + \frac{\widehat{COD}}{2} \right) \right| =$$

$$= 10 \left| \text{sen } \frac{\widehat{BOC}}{2} \cos \frac{\widehat{COD}}{2} + \cos \frac{\widehat{BOC}}{2} \text{sen } \frac{\widehat{COD}}{2} \right| =$$

$$= 10 (3/10 + 2\sqrt{3}/5) = 3 + 4\sqrt{3}.$$

Solução de A. Reis (Lisboa).

Enviaram também soluções exactas: A. da Fonseca Faia (Lisboa), José Morgado, Rui Verdial (Pórtó), Álvaro Simões (Sangalhos), J. S. Faria Abreu (Penafiel).

**1187** — Consideremos num bilhar circular uma bola num ponto  $A$ . Em que direcção se deve lançar a bola para que torne a passar pelo ponto  $A$  após duas reflexões sucessivas? R: Como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão e

as normais a circunferência passam pelo centro, a bola no seu movimento descreve um triângulo isósceles de vértice  $A$ . Designando por  $d$  a distância de  $A$  ao centro, por  $\alpha$  o ângulo da direcção pedida com o diâmetro que passa por  $A$  e por  $\beta$  o ângulo de incidência, tem-se  $\frac{R}{d} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{1-2\text{sen}^2 \beta}{\text{sen } \beta}$  por ser  $\alpha + 2\beta = \pi/2$ . Portanto é

$$\text{sen } \beta = (-R \pm \sqrt{R^2 + 8d^2})/4d$$

$$\text{e} \quad \alpha = \pi/2 - 2 \text{arc sen } (-R \pm \sqrt{R^2 + 8d^2})/4d.$$

Solução de José Morgado.

**1248** — Determinar o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos que têm um lado dado e o vértice oposto sobre uma recta dada. R: Seja  $M$  o ponto médio do lado dado e  $P$  um ponto da recta dada. Marque-se sobre  $MP$  o ponto  $Q$  tal que  $\overline{MQ}/\overline{MP} = 1/3$ . O lugar procurado é a recta  $s \parallel r$  e passando por  $Q$ . Demonstração:  $Q$  é o centro de gravidade do triângulo com a base dada e o vértice em  $P$ . Por outro lado, seja  $C$  um ponto qualquer de  $r$ , distinto de  $P$ . Designe-se por  $G$  a intersecção de  $s$  com  $CM$ . De  $\widehat{MPC} \propto \widehat{MQG}$ , resulta  $\overline{MG}/\overline{MC} = \overline{MQ}/\overline{MP} = 1/3$ . Logo,  $G$  é o c. de g. do triângulo com a base dada e o vértice em  $C$ .

Solução de PEME.

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Secção a cargo de J. da Silva Paulo

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

**12**—LEROY, E. — Cours d'Algèbre et d'Analyse. Mathématiques Spéciales. Élèves ingénieurs. Étudiants des Facultés. Agrégation. Essai d'enseignement concret et intuitif. Tome II, Analyse. 1 vol. in-8.º de X-352 pags. preço 70 frs.; Vuibert, Paris, 1940.

O Tomo I, (Álgebra) desta obra apareceu em 1935. No presente tomo (Análise) a maneira concreta e intuitiva do autor parece ter-se complicado. As fórmulas carregadas de índices são muito numerosas. Pelo contrário os gráficos continuam a ser excelentes.

A obra completa é comparável a um Curso de Matemáticas Gerais, e que tem esta espécie de rigor intuitivo de M. Leroy mas sente-se ainda a influência dos programas, mais que o espírito liberal de um Paul Appell.

(De A. Buhl (Toulouse) em «L'Enseignement Mathématique», vol. 38 — Trad. J. S. P.)

**13** — AGOSTINI, AMEDO — Lezioni di Analisi Matematica — R. Accademia Navale, 1936, 8+336 págs.

Este livro representa um excelente curso de introdução à análise, que tem sido dado desde há alguns anos na Academia Naval Italiana. É seu fim, em primeiro lugar, preparar os estudantes para as matemáticas aplicadas. O modo de tratar as questões é claro e rigoroso, como é para desejar dum livro de tal carácter, sendo os exemplos bem escolhidos e os problemas instrutivos. As referências históricas neste trabalho, são, contudo, frequentemente desvirtuadas. Assim, na pág. 323, ao tratar da história da resolução algébrica das equações, o autor fala de Dal Ferro, Ferrari, Ruffini, mas não se refere a Abel e Galois. Além disso, os nomes de Newton e Leibniz aparecem ligados com vários pormenores, mas o seu papel

geral no desenvolvimento do cálculo não é indicado, enquanto Cavalieri e Torricelli recebem bastos elogios a êsse respeito.

(De W. Seidel, em «The American Mathematical Monthly», vol. 45 — Trad. J. S. P.)

14 — PLUMMER, H. C. — *Probability and Frequency* — Vol. de 277 págs. — Macmillan and Co. Limited, Londres.

O livro «Probabilidade e Freqüência», do professor H. C. Plummer é uma exposição clara e elegante de alguns dos mais importantes capítulos das Probabilidades e da Estatística. Os conceitos apresentados são introduzidos de maneira simples, mas sob forma rigorosa, e esclarecidos por meio de problemas, alguns dos quais clássicos mas que ao aluno importa conhecer.

Supõe o autor que o leitor possui conhecimentos de análise combinatória e infinitesimal que são completados no livro (fórmula de Stirling, funções de Euler, etc.). Os assuntos tratados são os seguintes: probabilidades descontínuas e finitas; princípios e teoremas fundamentais da teoria; problema das provas repetidas e probabilidades *à posteriori*; probabilidades contínuas, aplicações à geometria; lei normal duma distribuição linear; teoria dos erros e mínimos quadrados; distribuições estatísticas; estudo das leis mais gerais que a lei normal imposta pela estatística; método dos momentos; correlação, breve resumo. O volume termina com algumas tábuas numéricas.

Os que se dedicarem ao estudo da estatística e os alunos dos cursos superiores que estudam a física e a biologia lerão êste livro com proveito.

Manuel Zaluar

15 — FERIGNAC, P. ET MORICE, E. — *Pour comprendre le Calcul des Probabilités* — (Bibliothèque d'Education Scientifique) — Préface de l'Abbé Moreux — 1 vol. in-16, 258 pág. — Librairie Octave Doin, Paris, 1936.

O livrinho de Ferignac e Morice, de agradável leitura, e utilizando conhecimentos elementares de matemática, está ao alcance de todo o aluno que fez o curso liceal. É uma iniciação às leis principais do cálculo das probabilidades. Os autores tiveram o cuidado de apresentar com muita clareza os diferentes assuntos, tornando-os ainda mais acessíveis por meio de bastantes exercícios de aplicação, gráficos e tábuas numéricas. Só é tratada a teoria clássica. Consagra duas lições à importante lei de Laplace-Gauss. As oito últimas informam das aplicações aos jogos de azar, a alguns problemas financeiros, aos seguros de vida, ao

tiro de artilharia e à teoria dos erros. Conseguiram os autores dar uma vista de conjunto sobre a grande importância que o cálculo das probabilidades tomou, hoje, em todos os domínios da ciência. Na conclusão, não se esqueceram de citar muito rapidamente as principais teorias físicas que, nos nossos dias, tiveram novo desenvolvimento graças à aplicação das leis estatísticas.

Manuel Zaluar

16 — SAN GIL, RAMON DE PEDRO Y — *Resumen de Matemáticas Elementales* — 460 págs., 24 pesetas. Libreria General, Zaragoza, 1942.

Êste livro, destinado aos que conhecem já as matemáticas elementares, está escrito com um carácter essencialmente prático, pelo que é de extraordinário valor como guia para o professor e como obra de estudo e aperfeiçoamento para o aluno.

.....

A obra está dividida em duas partes principais. A primeira trata a Aritmética e a Geometria. Na aritmética estuda o autor, com uma clareza verdadeiramente notável o sistema métrico decimal, divisão da circunferência, cálculo de fracções concretas, teoria da divisibilidade, máximo divisor comum, menor múltiplo comum, números primos, etc. Na geometria expõe um resumo das propriedades mais importantes das figuras geométricas planas e áreas das figuras poligonais. Esta primeira parte termina com uma interessantíssima secção sobre problemas e exercícios. A segunda parte compõe-se de uma continuação da Aritmética e outra da Geometria, assim como do estudo da Álgebra, Geometria no espaço, Trigonometria e umas noções de Geometria Analítica. No fim desta segunda parte inclui-se outra colecção de exercícios e problemas escrupulosamente seleccionados.

.....

Dificilmente se encontram outras obras que, consagradas ao ensino da matemática elementar, reúnam as condições desta, que soube aliar a simplicidade da exposição ao mais puro rigor científico.

(De G. M. G., em «Euclides», n.º 21—Trad. J. S. P.)

17 — GALLEGU-DIAZ, JOSÉ — *Formulario de Matemáticas Generales*, Ediciones Rialto, Madrid, 1943 — 256 págs.

Acaba de aparecer em língua espanhola um útil formulário de Matemáticas Gerais, de que é

autor o Prof. J. Gallego-Díaz, e para que escreveu um pequeno prefácio o Prof. Barinaga, da Universidade Central de Madrid. Abre com um conjunto de tábuas numéricas usuais, quadrados, cubos, raízes quadradas e cúbicas, inversos, logaritmos vulgares, perímetros de circunferências e áreas de círculos; seguem-se tabelas (a 4 decimais) de valores das funções seno e coseno hiperbólicos e seus logaritmos na base 10 (mais adiante a pág. 110 e seguintes encontra-se fórmulas importantes relativas a estas mesmas funções), tábuas dos valores das funções circulares (em graus, valores equidistantes de  $10''$ ), uma pequena tabela de valores da função  $\Gamma$  de Euler, etc. Seguem-se detalhadas compilações de definições, fórmulas e regras de cálculo de Trigonometria Esférica e suas Aplicações (págs. 39 a 78), das principais propriedades das equações algébricas e métodos de cálculo das suas raízes. Mais adiante encontram-se tábuas de derivadas e diferenciais dos tipos usuais de funções, algumas fórmulas importantes e aplicações de Cálculo Diferencial das funções reais de variáveis reais, tábuas de primitivas, etc. Não é esquecido também o Cálculo das Probabilidades e a Teoria dos Erros que ocupa uma parte deste formulário, o que justifica bem a crescente utilização deste ramo da Matemática.

Vêm depois fórmulas de álgebra e análise vectoriais.

Termina pela Geometria Analítica e Infinitesimal com uma detalhada compilação de fórmulas e equações de lugares geométricos em vários sistemas de coordenadas.

Têm agora os nossos estudiosos e os alunos dos cursos superiores um auxiliar precioso em espanhol a juntar a alguns bons formulários que comumente utilizavam em línguas francesa e italiana.

Manuel Zaluar

**18 — COURANT, RICHARD AND ROBBINS, HERBERT. — What is Mathematics?, Oxford University Press, New-York, 1941-XIX+521 págs.**

Trata-se duma contribuição muito importante à literatura de educação matemática. Deve ser lida por todo o professor de matemática do ensino secundário que deseje ter uma base sólida para o seu trabalho pedagógico nas escolas.

Depois de uma interessante introdução, os autores apresentam 8 capítulos e um apêndice. Alguns dos capítulos têm suplementos e apêndices.

A ordem dos principais capítulos é a seguinte:

- 1 — Números naturais.
- 2 — O sistema de números.

- 3 — Construções geométricas. A Álgebra dos corpos de números.
- 4 — Geometria Projectiva. Axiomáticas, Geometrias não-euclidianas.
- 5 — Topologia.
- 6 — Funções e limites.
- 7 — Máximos e mínimos.
- 8 — O cálculo.

O livro é escrito duma forma atraente, bem ilustrado e contém bem escolhida matéria para os que desejam conhecer um pouco mais do que são obrigados a ensinar aos seus alunos. Escrita muito claramente a obra é de fácil leitura para os professores de matemática do ensino secundário.

(De W. D. R., em «The Mathematics Teacher», vol. XXV, n.º 4 — Trad. M. Z.).

**19 — Publicações do Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto.**

O Centro de Estudos de Matemática, criado pelo Instituto para a Alta Cultura, na Universidade do Pôrto e dirigido pelo Professor Ruy Luís Gomes está publicando parte dos cursos aí realizados. Trata-se de uma louvável iniciativa no nosso meio vindo beneficiar a massa dos estudiosos que não pode de perto seguir as actividades do Centro que mais lhe interessam.

Tinham já aparecido três números das Publicações da autoria de Almeida Costa sobre grupos, grupos abelianos, anéis e ideais. Pena é que o Centro não tivesse previsto o interesse do público por estes assuntos e que a tiragem dos «Elementos da Teoria dos Grupos» tivesse sido tão pequena que a edição já se encontre esgotada. Tratando-se justamente do mais acessível dos três trabalhos referidos, e do que prepara a leitura dos outros dois, esperamos que o C. E. M. P. tenha meios que lhe permitam uma rápida reedição. A Álgebra Moderna adquire dia a dia maior importância, que entre nós é já reconhecida, como o atestam as referidas publicações e a actividade, em parte noticiada pela «Gazeta de Matemática», do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa em anos anteriores. Em breve, estamos certos, elementos de Álgebra Moderna farão parte dos programas pelo menos das cadeiras especiais da licenciatura em Ciências Matemáticas.

Acaba de aparecer mais uma publicação. É autor Manuel Gonçalves Miranda e intitula-se Cálculo Tensorial. Trata-se de um pequeno livro de 54 páginas. Uma nota inicial esclarece: «Este trabalho constitui o que há de essencial num curso promovido pelo Centro de Estudos de Matemática

anexo à Faculdade de Ciências do Pôrto». Cremos que houve como propósito habilitar convenientemente o público interessado em seguir certos cursos que fazem parte do plano de trabalhos do Centro no corrente ano, como os dos Professores Guido Beck e A. de Mira Fernandes.

Não se trata, evidentemente, de uma obra de iniciação e a leitura é proveitosa sobretudo para os que já lidaram com este potente instrumento de cálculo ao estudarem alguns capítulos de Geometria Diferencial ou de Física Matemática.

Estão anunciados para breve mais dois números das publicações do C. E. M. P.:

«Sur la possibilité d'une Cinématique générale» de Guido Beck, e o curso que António Monteiro realizou no Centro em fins de 1942: «Introdução ao Estudo da Noção de Função Contínua», de que A. Pereira Gomes está fazendo a redacção e de que já informou os leitores da «Gazeta de Matemática», no primeiro número deste ano.

Manuel Zaluar

## PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

**Boletín Matemático** — (Buenos Aires). Revista argentina de Matemática. — Ano XV, n.ºs 8-10.

**Cálculo Tensorial** — Manuel Gonçalves Miranda — Publicação n.º 2 do Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto, 1943.

**Euclides** — (Madrid). Revista de Ciências Exatas, Físico-Químicas y Naturales. Ano III (1943), n.ºs 23 e 24.

**Formulario de Matemáticas Generales** — José Gallego-Díaz — Ediciones Rialto, Madrid, 1943.

**Gazeta de Filosofia** — Ano I, n.º 1, Janeiro, 1943.

**Portugaliae Mathematica** — Vol. 3 (1942), Fasc. 4 — J. Vicente Gonçalves. *Sur une formule de ré-*

*currence* — P. de Varennes e Mendonça. *Orthogonality and analysis of variance* — J. Vicente Gonçalves. *Contours de Jordan et intégrale de Cauchy* — J. Albuquerque. *La notion de mesure de carathéodory*.

**Sobre os Grupos Abelianos** — Almeida Costa — Publicação n.º 4 do Centro de Estudos de Matemática da Universidade do Pôrto, 1942.

**Seguros** — Ano V, n.º 26, Fevereiro de 1943, Lisboa e Pôrto.

**Técnica** — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T., n.º 134 (Janeiro, 1943), n.º 135 (Fevereiro, 1943).

## A situação financeira da «Gazeta de Matemática»

### CONTA DO N.º 13 DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

#### Receita

Receita da venda avulso e por assinatura de 800 números	3.150\$00
Existência de 288 números ao preço de custo	684\$40
27-II-1943, <i>Deficit</i>	521\$20
	<u>4.355\$60</u>

#### Despesa

Composição, impressão, papel e brochura	3.857\$00
Sua quota parte nas despesas gerais realizadas até 27 de Fevereiro de 1943	498\$60
	<u>4.355\$60</u>