ANO III - N.º 13 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO-1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Sobre una proyectividad compleja ligada a una conica dada

por **José Gallego Diaz** (Universidad de Madrid)

Establecemos en este trabajo una sencilla proyectividad compleja entre los puntos del plano de una conica, de tal forma que los puntos dobles de la misma sean los focos de la conica. Pudiendose determinar estos ultimos con la regla y el compas como raices de una ecuacion de segundo grado de coeficientes complejos, (Vease: J. Gallego Diaz: Resolucion grafica de la ecuacion de segundo grado, «Euclides», año segundo, nº 11) y se indica finalmente como puede aplicarse cuanto antecede al estudio de ciertos lugares geometricos.

1 — Supongamos dada una conica (C), con centro, de ecuacion:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0$$

y un punto $M(X_1, Y_1)$ de su plano. La polar de M corta a la conica en los puntos A y B. La circunferencia circunscrita al triangulo MAB vuelve a cortar a la conica en C y en D.

Sea $N(X_0, Y_0)$ el polo de la recta CD respecto a la conica (C). A un punto M le hemos hecho corresponder un solo punto N. Reciprocamente y como mas adelante demostraremos al punto N le hacemos corresponder el mismo punto M.

Veamos si existe una proyectividad compleja entre los afijos de los numeros complejos:

$$Z_1=X_1+Y_1 i \quad \text{y} \quad Z_0=X_0+Y_0 i.$$

La ecuacion de la polar de M respecto a la conica (C) es:

$$\text{(I)} \qquad a_{11}xx_1+a_{22}yy_1+a_{33}=0.$$

La ecuacion de la polar de N respecto a la misma conica es:

$$\text{(II)} \qquad a_{11}xx_0+a_{22}yy_0+a_{33}=0.$$

Las conicas que pasan por las intersecciones de (C) con (I) y (II) tienen por ecuacion:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}+\lambda(a_{11}xx_1+a_{22}yy_1+a_{33})(a_{11}xx_0+ \\ +a_{22}yy_0+a_{33})=0.$$

Y para que sean circunferencias se ha de verificar:

$$a_{11}+\lambda a_{11}^2 x_1x_0=a_{22}+\lambda a_{22}^2 y_1 y_0$$
$$\lambda a_{11}a_{22}(x_1y_0+y_1x_0)=0.$$

Es decir:

$$\text{(III)} \qquad x_1y_0+y_1x_0=0$$

$$\text{(IV)} \qquad a_{11}-a_{22}=\lambda(a_{22}^2 y_1 y_0-a_{11}^2 x_1 x_0).$$

La circunferencia pasará por M si se cumple:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}y_1^2+a_{33}+\lambda(a_{11}x_1^2+a_{22}y_1^2+a_{33})(a_{11}x_1x_0+ \\ +a_{22}y_1y_0+a_{33})=0.$$

Y suponiendo que N no pertenece a la conica (C):

$$a_{11}x_1^2+a_{22}y_1^2+a_{33}\neq 0,$$

resultando:

$$\text{(V)} \qquad 1+\lambda(a_{11}x_1x_0+a_{22}y_1y_0+a_{33})=0.$$

Eliminando λ entre (IV) y (V) se obtiene:

$$\text{(VI)} \qquad x_1x_0-y_1y_0=\frac{a_{33}}{a_{11}}-\frac{a_{33}}{a_{22}}=c^2.$$

Resolviendo el sistema (III) y (VI), resulta:

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} X_0=\dfrac{c^2x_1}{x_1^2+y_1^2} \\ Y_0=\dfrac{-c^2y_1}{x_1^2+y_1^2} \end{cases}.$$

Es decir, llamando W a $Z_0=X_0+Y_0 i$ y $Z=Z_1=X_1+Y_1 i$,

$$\text{(VIII)} \qquad W=\frac{c^2}{Z}.$$

Se obtiene igualmente la condicion (V) substituyendo las coordenadas del punto $N(X_0, Y_0)$ en la ecuacion de la conica, lo cual expresa que la circunferencia pasa tambien por N, lo cual puede verse, directamente, en (VIII) que nos representa, pues, la ecuacion de una involucion compleja. Sus puntos dobles son, evidentemente, los focos de la conica, como *a priori* podia verse.