ANO III - N.º 13 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO-1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Sobre una proyectividad compleja ligada a una conica dada

por **José Gallego Diaz** *(Universidad de Madrid)*

Establecemos en este trabajo una sencilla proyectividad compleja entre los puntos del plano de una conica, de tal forma que los puntos dobles de la misma sean los focos de la conica. Pudiendose determinar estos ultimos con la regla y el compas como raices de una ecuacion de segundo grado de coeficientes complejos, (Vease: J. Gallego Diaz: Resolucion grafica de la ecuacion de segundo grado, «Euclides», año segundo, nº 11) y se indica finalmente como puede aplicarse cuanto antecede al estudio de ciertos lugares geometricos.

1 — Supongamos dada una conica (C), con centro, de ecuacion:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}=0$$

y un punto $M(X_1, Y_1)$ de su plano. La polar de M corta a la conica en los puntos A y B. La circunferencia circunscrita al triangulo MAB vuelve a cortar a la conica en C y en D.

Sea $N(X_0, Y_0)$ el polo de la recta CD respecto a la conica (C). A un punto M le hemos hecho corresponder un solo punto N. Reciprocamente y como mas adelante demostraremos al punto N le hacemos corresponder el mismo punto M.

Veamos si existe una proyectividad compleja entre los afijos de los numeros complejos:

$$Z_1=X_1+Y_1 i \quad \text{y} \quad Z_0=X_0+Y_0 i .$$

La ecuacion de la polar de M respecto a la conica (C) es:

$$\text{(I)} \qquad a_{11}xx_1+a_{22}yy_1+a_{33}=0 .$$

La ecuacion de la polar de N respecto a la misma conica es:

$$\text{(II)} \qquad a_{11}xx_0+a_{22}yy_0+a_{33}=0 .$$

Las conicas que pasan por las intersecciones de (C) con (I) y (II) tienen por ecuacion:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}+\lambda(a_{11}xx_1+a_{22}yy_1+a_{33})(a_{11}xx_0+ \\ +a_{22}yy_0+a_{33})=0 .$$

Y para que sean circunferencias se ha de verificar:

$$a_{11}+\lambda a_{11}^2 x_1 x_0=a_{22}+\lambda a_{22}^2 y_1 y_0$$
$$\lambda a_{11}a_{22}(x_1y_0+y_1x_0)=0 .$$

Es decir:

$$\text{(III)} \qquad x_1y_0+y_1x_0=0$$

$$\text{(IV)} \qquad a_{11}-a_{22}=\lambda(a_{22}^2 y_1 y_0-a_{11}^2 x_1 x_0) .$$

La circunferencia pasará por M si se cumple:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}y_1^2+a_{33}+\lambda(a_{11}x_1^2+a_{22}y_1^2+a_{33})(a_{11}x_1x_0+ \\ +a_{22}y_1y_0+a_{33})=0 .$$

Y suponiendo que N no pertenece a la conica (C):

$$a_{11}x_1^2+a_{22}y_1^2+a_{33}\neq 0 ,$$

resultando:

$$\text{(V)} \qquad 1+\lambda(a_{11}x_1x_0+a_{22}y_1y_0+a_{33})=0 .$$

Eliminando λ entre (IV) y (V) se obtiene:

$$\text{(VI)} \qquad x_1x_0-y_1y_0=\frac{a_{33}}{a_{11}}-\frac{a_{33}}{a_{22}}=c^2 .$$

Resolviendo el sistema (III) y (VI), resulta:

$$\text{(VII)} \qquad \begin{cases} X_0=\dfrac{c^2x_1}{x_1^2+y_1^2} \\ Y_0=\dfrac{-c^2y_1}{x_1^2+y_1^2} \end{cases} .$$

Es decir, llamando W a $Z_0=X_0+Y_0 i$ y $Z=Z_1=X_1+Y_1 i$,

$$\text{(VIII)} \qquad W=\frac{c^2}{Z} .$$

Se obtiene igualmente la condicion (V) substituyendo las coordenadas del punto $N(X_0, Y_0)$ en la ecuacion de la conica, lo cual expresa que la circunferencia pasa tambien por N, lo cual puede verse, directamente, en (VIII) que nos representa, pues, la ecuacion de una involucion compleja. Sus puntos dobles son, evidentemente, los focos de la conica, como *a priori* podia verse.

Puede darse una sencilla demostracion geometrica de cuanto antecede. Basta observar para ello que, por pertenecer los puntos A, B, C y D, a una circunferencia las cuerdas AB y CD estan igualmente inclinadas sobre los ejes y, por lo tanto, siendo O el centro de la conica, las rectas OM y ON, diametros conjugados con las direcciones AB y CD respectivamente, tambien son simetricos respecto de los ejes de la conica. Por otro lado siendo F y F' los focos de la conica (C) dada, es fácil demostrar que el cuadrilátero $MFNF'$ es armonico y por tanto, se verificará : $OM \cdot ON = OF^2 = c^2$, quedando pues, geométricamente demostrado que la transformacion que hace corresponder el punto N al M es el producto de una inversion por una simetria, como indica la formula (VIII) analiticamente.

2 — Consideremos ahora la parábola : $Y^2 = 2pX$. Repitiendo lo que se ha efectuado en el parrafo (1) llegamos a : $y_0 = -y_1$, $x_0 = p - x_1$, es decir :

$$W + Z = p\,.$$

Cuyo punto doble es, asímismo, el foco de la parabola, pudiendose enunciar el siguiente

Teorema. La circunferencia circunscrita al triangulo MAB — M es un punto generico del plano de una parabola, y A y B los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde M a la parabola — pasa tambien por el punto simetrico de M respecto al foco de la parabola.

3 — Pasemos ahora a considerar el caso general en que la conica es dada por una ecuacion de la forma :

$$f(x, y, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}\,xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}\,t^2 = 0\,.$$

Así como la ecuacion (VIII) representaba geometricamente el producto de una inversion por una simetria, ahora debemos hallar otra que nos represente una traslacion, un giro, una inversion y una simetria.

Con la misma notacion que en (1) y por el mismo procedimiento obtenemos :

$$\text{(X)}\quad (a_{11}-a_{22})(f'_{x_1}f'_{y_0} + f'_{y_1}f'_{x_0}) = 2a_{12}\,(f'_{x_1}f'_{x_0} - f'_{y_1}f'_{y_0})\,.$$

$$\text{(XI)}\quad f'_{x_1}f'_{y_0} + f'_{y_1}f'_{x_0} - 2a_{12}\,(x_0 f'_{x_1} + y_0 f'_{y_1} + t_0 f'_{t_1}) = 0.$$

La condicion (X) es la analoga a la (III) y nos expresa que siendo I el centro de la conica, las rectas IM y IN estan igualmente inclinadas respecto de los ejes de la conica, y la condicion (XI) como la (VI), expresa, junto con la anterior, como es bien sencillo demostrar, que $IM \cdot IN = c^2$.

De la ecuacion (X) se puede deducir rapidamente la ecuacion que dá el conjunto de los ejes de la conica sin mas que hacer $X_1 = X_0$ y $Y_1 = Y_0$, resultando :

$$(a_{11}-a_{22})\,f'_x f'_y = a_{12}\,(f'^2_x - f'^2_y)\,.$$

De la misma ecuacion (X) se obtiene :

$$\frac{f'_{y_0}}{f'_{x_0}} = -\frac{(a_{11}-a_{22})f'_{y_1} - 2a_{12}f'_{x_1}}{(a_{11}-a_{22})f'_{x_1} + 2a_{12}f'_{y_1}}\,.$$

Y para que dicha proyectividad real sea degenerada sera preciso que :

$$\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} = -\frac{2a_{12}}{(a_{11}-a_{22})}\,, \quad a_{11} = a_{22} \;\;,,\;\; a_{12} = 0\,.$$

Es decir que la conica dada sea una circunferencia. El reciproco es de inmediata demostracion.

Las ecuaciones (X) y (XI) son lineales en X_0 y Y_0. Resolviendolas y haciendo como antes :

$$W = X_0 + Y_0 i \quad , \quad Z = X_1 + Y_1 i\,.$$

Resulta :

$$W = \frac{(A_{13}+iA_{23})\,Z - (A_{11}-A_{22}+2A_{12}i)}{A_{33}Z - (A_{13}+iA_{23})}\,.$$

Y, para determinar los puntos dobles, haremos : $W = Z$ resultando :

$$\text{(XII)}\quad A_{33}Z^2 - 2\,(A_{13}+iA_{23})\,Z + A_{11} - A_{22} + 2A_{12}i = 0$$

que es la ecuacion tal que los afijos de sus raices son los focos de la conica dada. En la parabola, como $A_{33} = 0$, queda :

$$\text{(XIII)}\quad Z = \frac{1}{2}\cdot\frac{A_{11}-A_{22}+2A_{12}i}{A_{13}+iA_{23}}\,.$$

4 — Entre las múltiples aplicaciones de las formulas antes establecidas al estudio de los lugares geometricos destacamos por su sencillez esta : «Lugar geometrico de los focos de las parabolas inscritas en un triangulo dado».

Como la ecuacion tangencial plückeriana de esas parabolas contendra un parametro lineal γ, la ecuacion (XIII) tambien lo contendrá, pero al variar γ de $-\infty$ a $+\infty$ el afijo de Z describe una circunferencia.