A GEOMETRIA DA DISTÂNCIA

por **Karl Menger**

(Introdução a «Distance Geometries — A study of the development of abstract metrics», de L. Blumenthal, publicada em *The University of Missouri Studies*, Vol. 13, n.º 2 — Abril 1938)

O icosaedro é um dos cinco sólidos regulares conhecidos dos gregos. Pode ser transformado em si próprio por meio de sessenta rotações. Estas rotações formam um grupo, isomorfo com o grupo de Galois da equação geral do 5.º grau que não é resoluvel por meio de radicais, mas que pode ser resolvida por meio das funções elípticas modulares. Reflectindo sôbre estas relações entre o icosaedro e outros campos da matemática, Felix Klein foi levado a notar que êste sólido regular «relaciona de uma maneira admirável a geometria, a teoria dos grupos, a algebra, e a teoria das funções — indicando assim o caminho para futuras investigações».

Há porém, uma figura geométrica mais simples do que o icosaedro, e que é conhecida desde o início da investigação matemática — o triângulo. Uma das suas mais importantes propriedades, o facto de que um dos seus lados não excede em comprimento a soma dos outros dois lados, relaciona os fundamentos de muitos ramos da matemática. Juntamente com as suas generalizações e especializações, a chamada *desigualdade triangular* parece-me formar, na verdade, o ponto central duma grande parte de tôda a matemática.

Além disso, esta opinião não é influenciada pelo facto de a desigualdade $|a+b| \leq |a|+|b|$ (que é um caso especial da desigualdade triangular) ser verificada para cada par de números reais ou complexos a, b. Já por aí se compreende que a desigualdade triangular desempenhe um papel central em tôda a teoria das funções, e em certos capítulos da teoria dos números. Mas a base da opinião anterior é fornecida pelos aspectos puramente geométricos desta desigualdade fundamental. O papel indiscutível que ela desempenha numa grande parte das matemáticas elementares; a sua conexão com a fórmula de Herão para a área do triângulo (cujas várias formas conduzem às generalizações da desigualdade triangular que estão na base dos fundamentos do espaço euclideano, assim como de outros espaços); o seu importante papel no isolamento feito por Fréchet das propriedades métricas do espaço com o objectivo de construir uma teoria geral das funções reais (a desigualdade triangular assegura de uma maneira particularmente simples a continuïdade uniforme da métrica, pelo que tôdas as hipóteses que implicam uma métrica continua são, num certo sentido, generalizações da desigualdade triangular); a sua íntima relação com o desvio de três pontos em relação a uma linha recta, que conduz, em combinação com o processo usual de passagem ao limite, a uma definição de curvatura, e, por conseguinte, ao domínio da geometria diferencial (enquanto a consideração análoga dos quaternos de pontos conduz a um novo desenvolvimento da teoria da curvatura das superfícies); a sua relação com o conceito de linhas de comprimento mínimo, fundamental no cálculo das variações — tôdas estas considerações mostram claramente que a desigualdade triangular relaciona muitos capítulos da matemática e indica o caminho de novas investigações.

Os domínios da geometria em que intervem a desigualdade triangular, são, de facto, teorias quantitativas que se referem a distâncias, comprimentos, áreas, volumes, curvaturas, etc., em contraste com as propriedades qualitativas consideradas em topologia. Precisamente por existir esta diferença, parece-me muito notável que alguns teoremas, assim como algumas demonstrações, sejam muito semelhantes na geometria métrica e na topologia. A distribuïção dos pontos dum espaço com certas propriedades métricas satisfaz às mesmas leis que a distribuïção dos pontos dum espaço com certas propriedades topológicas, como, por exemplo, certos pontos de ramificação duma curva. A principal razão desta analogia reside certamente no facto de, para o estudo dos subconjuntos gerais dos espaços gerais, os conceitos de grupos de transformações e de invariantes serem bastante menos importantes do que na geometria elementar. Daqui a razão por que há laços comuns entre as propriedades que são invariantes por transformações topológicas e as que são invariantes em relação às transformações que conservam a distância.

Os métodos desta geometria métrica não se adaptam à clássica divisão das teorias geométricas em sintéticas e analíticas. A geometria sintética assenta especificadamente em alguns postulados geométricos dos quais deduz todos os seus teoremas. A geometria analítica opera com modelos aritméticos, associados com entidades geométricas, aos quais aplica a algebra e o cálculo. A geometria métrica combina as duas características: sintética e analítica: opera com um conjunto de elementos não especificados, a cada par dos quais se associa um número, de acôrdo com certas condições. Êste ponto de partida está intimamente relacionado com o da teoria dos grupos; porque na teoria dos grupos, a cada par de elementos de um conjunto faz-se corresponder um elemento do mesmo conjunto, que verifica certas condições particulares. A geometria métrica tem, além disso, em comum com a teoria dos grupos abstractos e dos corpos, a tendência para deduzir resultados tão gerais quanto possível de hipóteses tão fracas quanto possível, e obter demonstrações simplificadas, generalizando as proposições.

É evidente que aparecem novos problemas em conexão com a introdução dêstes conceitos abstractos. Por exemplo, quando uma classe geral de entidades é definida por extensão duma classe de objectos conhecidos, é natural preguntar quais as características especiais pelas quais os objectos conhecidos se podem distinguir dos elementos da classe geral. Mas servirão os métodos gerais para descobrir novos resultados aplicáveis aos objectos conhecidos? Auxiliam os métodos gerais a resolução de velhos problemas?

D'Alembert considerou como um dos grandes «escândalos» da geometria do seu tempo, o facto de não se conseguir dar uma definição da linha recta. Há uma definição de linha recta no comêço dos *Elementos* de Euclides mas é muito obscura, e não se presta a ser usada no próprio sistema dedutivo de Euclides. A geometria analítica define cada linha recta por uma equação linear em coordenadas cartesianas, mas esta definição presupõe a introdução dum sistema arbitrário de eixos e unidades. Uma das mais importantes tentativas da geometria da recta depois dos Enciclopedistas, é a formulação duma teoria axiomática que opera com um pequeno número de axiomas respeitantes a elementos indefinidos chamados «linhas rectas», e às suas relações com outras entidades indefinidas chamadas «pontos» e «planos». Tais teorias, ocupando-se do sistema de tôdas as linhas rectas, fornecem-nos critérios para distinguir êste sistema de outros, por exemplo, o de tôdas as circunferências. Mas estas teorias não estabelecem critério algum para decidir se um dado objecto individual é ou não uma linha recta. Uma segunda teoria define a linha recta como um eixo de rotação de todo o espaço, mas fazendo referência a pontos fora do objecto que está para ser definido. Uma terceira teoria principia com algumas hipóteses relativas a uma relação indefinida chamada «situado entre» e define o segmento de recta que une dois pontos como o conjunto de todos os pontos situados entre os dois pontos dados. Mas se aplicarmos esta definição ao plano ordinário, no qual há muitas relações satisfazendo aos axiomas da relação «situado entre», é difícil ver como se pode derivar um critério para a relação ordinária «situado entre» (e assim uma definição da vulgar linha recta) a não ser que se acrescente a teoria com idéias métricas.

A geometria da distância define simplesmente o segmento que une dois pontos como o conjunto daquêles pontos para os quais a soma das suas distâncias aos dois pontos dados é igual à distância dêstes dois pontos; por outras palavras, é o conjunto de todos os pontos que satisfazem a uma certa igualdade triangular. Esta definição não tem originalidade — porque se limita a utilizar o conceito de «situado entre» acima mencionado — mas é clara, simples, intrínseca e capaz de generalizações de muitas espécies em classes extensas de espaços gerais.

Consideremos questões menos triviais; por exemplo as propriedades locais métricas das figuras. Até há pouco, a curvatura das curvas e a curvatura das superfícies eram estudadas, quási inteiramente por meio de métodos analíticos. Definindo os pontos por sistemas de coordenadas, e as figuras por equações, estas propriedades estudavam-se aplicando o cálculo diferencial às equações. A geometria das propriedades métricas locais era pràticamente identificada com a geometria diferencial. A representação dos pontos por coordenadas, e das figuras por equações, é, na verdade, um método fecundo—um método que enriqueceu a geometria com problemas para alguns séculos. Mas é sòmente um dos muitos métodos possíveis, e não é, atrevo-me a dizer, o mais simples, nem o mais geral, nem o mais natural. Utilizando propriedades locais puramente métricas, obtêm-se resultados muito mais gerais — teoremas que se aplicam a espaços não descritíveis por coordenadas (ou, pelo menos, em que a distância de dois pontos não pode ser expressa em função das suas coordenadas, à maneira usual). E mesmo nos espaços ordinários, os resultados aplicam-se a figuras para as quais os métodos do cálculo não podem ser usados. A geometria diferencial, no estudo das propriedades métricas locais das figuras, faz hipóteses, a seu respeito, que não são impostas pela natureza geométrica das questões dadas, mas sim pelos métodos analíticos aplicados à sua resolução. A diferenciabilidade das equações que definem as figuras é apenas considerada porque, sem esta hipótese, não se pode aplicar o cálculo diferencial.

Por outro lado, a geometria métrica estuda a curvatura duma curva, ou de uma superfície, considerando ternos e quaternos de pontos da figura, e as suas três ou seis distâncias, respectivamente. Êste estudo não presupõe que as figuras sejam dadas por meio de equações diferenciáveis. Na realidade êle nem sequer supõe que as figuras sejam dadas por equações, nem mesmo que os seus pontos sejam definidos por coordenadas. Êste método presupõe sòmente que uma distância é associada a cada par de pontos da figura. É verdade que, neste campo particular, os mais gerais argumentos da geometria métrica parecem à primeira vista, ser mais complicados do que as demonstrações clássicas da geometria diferencial. Mas isto é apenas devido ao facto da geometria diferencial operar com todo o simbolismo do cálculo, e poder assim fazer porque êste simbolismo é estudado por cada matemático logo no começo da sua aprendizagem tornando-se para êle uma espécie de A. B, C. Sòmente estas razões de ordem histórica e psicológica tornam possível que uma demonstração na qual figura um conceito como $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ pareça mais simples do que uma avaliação directa das propriedades dos quaternos de pontos.

Se certos conceitos métricos, não mais complicados do que uma derivada parcial de 2.ª ordem, fôssem condensados em símbolos unânimente adoptados, então o estudo métrico das propriedades locais seria ràpidamente reconhecido, não só como mais geral, mas também muito mais simples do que o processo da geometria diferencial clássica. Com o objectivo de generalizar factos conhecidos a espaços e figuras mais gerais, é conveniente estar-se na espectativa de que estas noções métricas conduzam imediatamente à descoberta de factos desconhecidos respeitantes aos objectos usuais da geometria diferencial.

Para justificar êste optimismo em relação ao efectivo poder criador da geometria métrica das propriedades locais, mencionaremos outro campo clássico no qual a geometria métrica obteve já novos resultados — o Cálculo das Variações. As curvas que tornam mínimo um integral de uma função dependente duma curva e das suas tangentes, foram inicialmente procuradas entre curvas diferenciáveis. A curva de Goldschmidt, constituída por três segmentos com dois ângulos, que minimiza a área da superfície de revolução, mostrou a necessidade de estender a classe das curvas admissíveis. Mais tarde, foram estudadas mais sistemàticamente soluções com ângulos. Hahn e Tonelli introduziram o integral de Lebesgue com o fim de tornar possível a admissão de tôdas as curvas rectificáveis.

Mas Hahn construíu um integral cujas curvas *minimizantes* são espirais de comprimento infinito. Carathéodory mostrou que esta circunstância pode dar-se com uma função integranda tão simples como a raíz quadrada de um polinómio do 8.º grau. A geometria métrica, considerando o integral ao longo duma curva como o seu comprimento, de harmonia com uma métrica apropriada, é capaz de operar num campo de curvas admissíveis que contém tôdas as curvas contínuas (rectificáveis ou não) e com classes extremamente gerais de funções integrandas e espaços correspondentes.

Desta maneira consegue-se provar a existência de soluções para problemas que doutra maneira as não teriam, entre êles o problema de minimizar integrais de funções algébricas simples.

É possível, por exemplo, dar demonstrações simples e curtas de teoremas de existência cuja generalidade excede, em três direcções, a dos teoremas mais gerais obtidos por Tonelli.

A geometria métrica foi também aplicada ao Cálculo das Variações por Marston Morse. A sua aplicação é feita numa direcção diferente, mas parece-me muito notável que, partindo de investigações puramente analíticas, êste eminente matemático fôsse levado a desenvolver e utilizar métodos métricos nos seus trabalhos fundamentais dos últimos anos. (Por «métodos métricos» entendo a associação de uma distância a cada par de elementos onde tal associação seja possível e útil, e a subordinação conseqüente de vários campos de investigação a uma idéia comum).

Tudo isto mostra que é certamente muito útil ter uma visão de conjunto dos resultados obtidos nêste domínio, descrita por um especialista como Leonard L. Blumenthal cuja contribuïção é assinalada em três direcções diferentes:

(1) por meio de resultados originais (em particular resultados relativos à caracterização dos espaços conhecidos entre espaços gerais e suas aplicações à teoria dos determinantes); (2) por uma cuidadosa correcção de erros encontrados em trabalhos anteriores; (3) esclarecendo muitos aspectos da história dêste assunto, pelo que muito aprendi com a leitura do seu trabalho. Por isso aceitei com prazer o convite que me fêz de escrever algumas páginas de introdução ao seu livro, que contribuirá, assim o espero e creio, para tornar mais conhecido êste vasto campo da matemática.

Tradução de C. VENTURA