Uma função contínua sem derivada

por R. Tambs Lyche (Trondheim, Noruega)

(Publicado em *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 38 (1939-1941), págs. 208-211)

1. O exemplo dado por Weierstrass duma função contínua que não admite derivada para nenhum valor da variável é muito complicado para que se possa expor num curso elementar de Análise. Deve-se a M. B. L. van der Waerden (Math. Zeitschr. 32 Band, 1930, pag. 474) um exemplo de natureza bem simples. Apesar disso, para ser apresentado duma maneira inteligente aos principiantes, a demonstração exige considerações um pouco complicadas, se bem que sejam de natureza elementar. (Ver, por exemplo, E. Landau: Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, pag. 73, onde o autor examina um exemplo da mesma espécie).

Dada a importância duma concepção precisa da noção de derivada, parece-nos útil fornecer um exemplo em que a demonstração pode ser dada em poucas linhas. Aquêle que proponho não difere no fundo do de M. van der Waerden, a não ser na maneira de o definir.

2. Seja x uma quantidade real qualquer, e ponhamos

$$x=a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}+\cdots \tag{1}$$

onde a é um número inteiro e $\{\alpha_i\}$ uma sucessão de números naturais crescentes, em número ilimitado ou não. É sabido que esta representação de x é única, salvo no caso em que a sucessão $\{\alpha_i\}$ é limitada:

$$x=[a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots]+\frac{1}{2^{\alpha_k}} \tag{2}$$

Pois neste caso tem-se também a representação:

$$x=[a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots]+\frac{1}{2^{\alpha_k+1}}+\frac{1}{2^{\alpha_k+2}}+\cdots \tag{2a}$$

Ponhamos agora

$$f(x)=\frac{\alpha_1}{2^{\alpha_1}}+\frac{\alpha_2-2}{2^{\alpha_2}}+\frac{\alpha_3-4}{2^{\alpha_3}}+\cdots+\frac{\alpha_i-2(i-1)}{2^{\alpha_i}}+\cdots \tag{3}$$

Verifica-se fàcilmente que $f(x)$ é definida por esta fórmula para todo o valor real de x, pois que um cálculo fácil mostra que as duas definições possíveis, se x é da forma (2) ou (2a), coincidem.

Êste último facto assegura a continuïdade da função $f(x)$ em qualquer ponto. Com efeito, tomando $|h|<\frac{1}{2^n}$ as representações de x e de $x+h$ coincidem nos termos de expoentes $<n$. Isto é evidente no caso geral (1), e terá ainda lugar no caso (2 ou 2a) segundo $h>0$ ou $h<0$. Por conseqüência as expressões para $f(x)$ e $f(x+h)$ coincidirão também nos termos de expoentes $<n$. A continuïdade é por isso manifesta.

3. Demonstremos agora que $f(x)$ não admite derivada em nenhum ponto x. Consideremos primeiro o caso em que x é da forma (2). Tomemos $h=\frac{1}{2^{\alpha_k+r}}$. Segue-se que $f(x+h)-f(x)=\frac{\alpha_k+r-2k}{2^{\alpha_k+r}}$ donde $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\alpha_k+r-2k$ quantidade que tende para infinito com r.

Tomemos o caso geral, em que x é da forma (1). Ponhamos

$$x_1=a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i}}$$

$$x_2=a+\frac{1}{2^{\alpha_1}}+\frac{1}{2^{\alpha_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{\alpha_i-1}}.$$

Acha-se neste caso

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{\tau_i}{\rho_i},\quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=\frac{\alpha_i-2i-\tau_i}{1-\rho_i}$$

pondo para abreviar

$$\rho_i=2^{\alpha_i}\left[\frac{1}{2^{\alpha_{i+1}}}+\frac{1}{2^{\alpha_{i+2}}}+\cdots\right] \tag{4}$$

$$\tau_i=2^{\alpha_i}\left[\frac{\alpha_{i+1}-2i}{2^{\alpha_{i+1}}}+\frac{\alpha_{i+2}-2(i+1)}{2^{\alpha_{i+2}}}+\cdots\right] \tag{5}$$

Suponhamos agora que $f(x)$ tem uma derivada $f'(x)=\lambda$ no ponto x. Então ter-se-á, por um lado

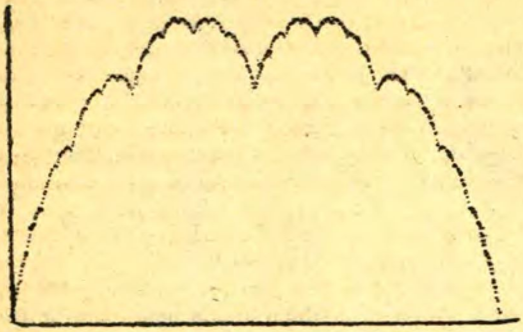
$$\lim_{i\to\infty}\frac{\tau_i}{\rho_i}=\lambda \tag{6}$$

Mas por outro a expressão

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}-\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{\alpha_i-2i-\frac{\tau_i}{\rho_i}}{1-\rho_i}$$

deveria tender para zero quando i aumenta. Ora isso exige que $\lim_{i\to\infty}(\alpha_i-2i)=\lambda$, e sendo α_i e $2i$ inteiros, ter-se-ia, a partir de um certo valor de i, $\alpha_i-2i=\lambda$. Mas se pusermos em (4) e (5) $\alpha_i=2i+\lambda$ ter-se-á $\rho_i=\frac{1}{3}$ $\tau_i=\frac{\lambda+2}{3}$ e por isso $\frac{\tau_i}{\rho_i}=\lambda+2$ o que é impossível em virtude de (6).

4. Notemos finalmente que a função $f(x)$ se poderia definir do seguinte modo: designando por $g(x)$ o afastamento de x do número inteiro mais próximo, tem-se:



$$f(x)=g(x)+\frac{1}{2}g(2x)+\frac{1}{2^2}g(2^2x)+\cdots+\frac{1}{2^n}g(2^nx)+\cdots$$

que é por isso uma função da mesma espécie da de M. van der Waerden. A representação gráfica de $f(x)$ é dada na figura junta, fazendo uso dos pontos correspondentes aos valores de x da forma (2) com $a=0$ e $k \leqq q$. Se bem que todos estes pontos sejam uma pequena parte dos pontos da curva, dão uma idéia completa da curva em questão, pois que os pontos intermidários têm ordenadas que diferem pouco das ordenadas dos pontos da figura.

Tradução de J. DA SILVA PAULO

PEDAGOGIA

Secção a cargo de Bento Caraça

SÔBRE O ENSINO DA GEOMETRIA NOS LICEUS

por JOSÉ CARDOSO GUERRA

Êste simples e despretencioso relatório sôbre o ensino da Geometria no 1.º ciclo, foi-me amàvelmente solicitado pela Comissão Pedagógica da S. P. M. e a sua publicação na «Gazeta» não tem outro objectivo senão o de poder chamar a atenção dos interessados no assunto, que poderão fornecer contribuïções muito mais valiosas tiradas da sua própria experiência e cuja divulgação seria convenientíssima para a pedagogia.

Nos dois últimos períodos do ano passado o acaso forneceu-me uma bela oportunidade para completar com a experiência pessoal o meu trabalho sôbre «O ensino da geometria no 1.º ciclo» de que constou a minha dissertação de exame de estado.

Afirmava eu então que, provàvelmente, o facto de se não fazer o ensino experimental da geometria no 1.º ciclo, seria devido certamente à falta de tempo, reduzido apenas às três horas semanais. Porém agora posso afirmar francamente o contrário.

O programa da geometria é tão pequeno relativamente, que levou um antigo professor a confessar-me que dava o programa vagarosamente em dois dias e que depois se via em apuros para preencher o resto do tempo...

Para mostrar que há realmente tempo para se fazer um ensino experimental vou expôr resumidamente o que fiz nos 2.º e 3.º anos que me foram entregues. Claro que se mais tempo houvesse melhor se faria.

2.º ano

Determinação aproximada do perímetro de uma linha curva com o emprêgo de um cordel; em particular, avaliação do perímetro de uma circunferência para a determinação experimental de um valor aproximado de π pelo cociente da divisão do perímetro pelo diâmetro. Equivalência de algumas figuras planas pelo emprêgo da balança.

Teorema de Pitágoras pelos pesos. Avaliação de áreas pelos pesos com escôlha prévia de uma unidade. Emprêgo do papel milimétrico. Nova determinação de π pelo cociente da divisão da área do círculo obtida experimentalmente pelo quadrado do raio.

3.º ano

Repetição de alguns trabalhos do ano anterior como avaliação de áreas, equivalências e determinação de π. Equivalência de alguns volumes e sua determinação por deslocamento de água. Para êste trabalho de belo efeito, utilizei uma proveta graduada em centímetros cúbicos, correspondendo cada divisão a 10 centímetros cúbicos. Todos os alunos verificaram a leitura inicial e final. Da comparação do valor obtido assim como o obtido pela aplicação das fórmulas verificou-se uma diferença no máximo de 2 centímetros cúbicos