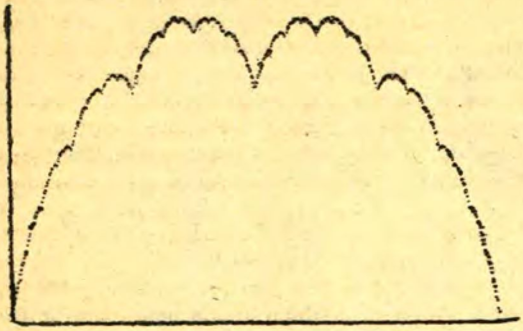
4. Notemos finalmente que a função $f(x)$ se poderia definir do seguinte modo: designando por $g(x)$ o afastamento de x do número inteiro mais próximo, tem-se:



$$f(x)=g(x)+\frac{1}{2}g(2x)+\frac{1}{2^2}g(2^2x)+\cdots+\frac{1}{2^n}g(2^nx)+\cdots$$

que é por isso uma função da mesma espécie da de M. van der Waerden. A representação gráfica de $f(x)$ é dada na figura junta, fazendo uso dos pontos correspondentes aos valores de x da forma (2) com $a=0$ e $k \lesseqgtr q$. Se bem que todos estes pontos sejam uma pequena parte dos pontos da curva, dão uma idéia completa da curva em questão, pois que os pontos intermidários têm ordenadas que diferem pouco das ordenadas dos pontos da figura.

Tradução de J. DA SILVA PAULO

PEDAGOGIA

Secção a cargo de Bento Caraça

SÔBRE O ENSINO DA GEOMETRIA NOS LICEUS

por JOSÉ CARDOSO GUERRA

Êste simples e despretencioso relatório sôbre o ensino da Geometria no 1.º ciclo, foi-me amàvelmente solicitado pela Comissão Pedagógica da S. P. M. e a sua publicação na «Gazeta» não tem outro objectivo senão o de poder chamar a atenção dos interessados no assunto, que poderão fornecer contribuïções muito mais valiosas tiradas da sua própria experiência e cuja divulgação seria convenientíssima para a pedagogia.

Nos dois últimos períodos do ano passado o acaso forneceu-me uma bela oportunidade para completar com a experiência pessoal o meu trabalho sôbre «O ensino da geometria no 1.º ciclo» de que constou a minha dissertação de exame de estado.

Afirmava eu então que, provàvelmente, o facto de se não fazer o ensino experimental da geometria no 1.º ciclo, seria devido certamente à falta de tempo, reduzido apenas às três horas semanais. Porém agora posso afirmar francamente o contrário.

O programa da geometria é tão pequeno relativamente, que levou um antigo professor a confessar-me que dava o programa vagarosamente em dois dias e que depois se via em apuros para preencher o resto do tempo...

Para mostrar que há realmente tempo para se fazer um ensino experimental vou expôr resumidamente o que fiz nos 2.º e 3.º anos que me foram entregues. Claro que se mais tempo houvesse melhor se faria.

2.º ano

Determinação aproximada do perímetro de uma linha curva com o emprêgo de um cordel; em particular, avaliação do perímetro de uma circunferência para a determinação experimental de um valor aproximado de π pelo cociente da divisão do perímetro pelo diâmetro. Equivalência de algumas figuras planas pelo emprêgo da balança.

Teorema de Pitágoras pelos pesos. Avaliação de áreas pelos pesos com escôlha prévia de uma unidade. Emprêgo do papel milimétrico. Nova determinação de π pelo cociente da divisão da área do círculo obtida experimentalmente pelo quadrado do raio.

3.º ano

Repetição de alguns trabalhos do ano anterior como avaliação de áreas, equivalências e determinação de π. Equivalência de alguns volumes e sua determinação por deslocamento de água. Para êste trabalho de belo efeito, utilizei uma proveta graduada em centímetros cúbicos, correspondendo cada divisão a 10 centímetros cúbicos. Todos os alunos verificaram a leitura inicial e final. Da comparação do valor obtido assim como o obtido pela aplicação das fórmulas verificou-se uma diferença no máximo de 2 centímetros cúbicos o que é muito pouco, como fàcilmente verifiquei por pequenas variações das medidas feitas.

Tive o cuidado de chamar sempre a atenção para o rigor necessário nos trabalhos executados e para as aproximações que racionalmente se podem exigir dêstes métodos.

A execução de parte de alguns trabalhos foi forçadamente voluntária por não haver tempo de os fazer completamente na aula. Limitei-me portanto a aconselhar e a mostrar as vantagens da manufactura dos mesmos.

As conclusões foram tiradas na aula com a máxima eficiência porque as atenções estavam completamente absorvidas na execução das experiências. Mais uma vez me foi dado verificar que a aula de trabalhos manuais pode prestar uma colaboração preciosa na rigorosa execução dos modelos necessários.

O ter sido estudante e o contacto íntimo com os estudantes levaram-me à conclusão firme de que as únicas entidades capazes de avaliarem justamente as qualidades pedagógicas do ensino que o professor está ministrando, são os próprios alunos a quem êle se dirige. Por outro lado o professor que o deseja ser na realidade, por estar convencido da importante contribuïção que pode dar para o aperfeiçoamento do ensino, deve interessar-se por saber o mais honesta e sinceramente possível qual a verdadeira impressão que causa nos seus alunos, quais os seus principais defeitos a abolir. Ora parece-me que a única forma de conseguir isto consiste na elaboração anual de uns inquéritos por escrito, em que os alunos expuzessem as suas francas impressões. A maneira de executar êsse inquérito seria caso a estudar.

A propósito da remodelação do programa do ensino das matemáticas nos liceus, de tão urgente necessidade, segundo parece a tantos, sinto-me com a coragem, também ditada pela experiência, de fazer a seguinte observação: O início do estudo da matemática nos liceus é feito pelas operações da aritmética com muitas das suas «maçadoras» propriedades. Que mau comêço para as crianças! Que dificuldades e que repugnâncias naturalmente manifestadas! Que interesse têm para êles as propriedades associativas, distributivas e até modulares? Que tempo perdido e que tão bem podia ser empregado no melhor estudo de outros assuntos, fracções, por exemplo, principal deficiência da maioria dos estudantes liceais.

ACÊRCA DO ENSINO DOS LOGARITMOS

por J. SEBASTIÃO E SILVA

A Matemática constitue o instrumento que convém especialmente para tratar as noções abstractas de tôda a natureza e, neste domínio, o seu poder não tem limites. É por isso que um livro sôbre Física moderna, se não é puramente a descrição de trabalhos de experiência, deve ser essencialmente matemático.

(P. Dirac, *Quantum Mechanics*, 1930).

Todo o novo corpo de descoberta se apresenta com aspecto matemático, porque não existe outro guia que pudéssemos utilizar.

(C. G. Darwin, 1920).

I. A intervenção crescente da Matemática na vida moderna e a sua influência decisiva no progresso dos povos constituem realidades a que não podem manter-se estranhos os regimes de ensino. «*Se o Mundo não precisa dum número muito grande de professores de Matemática, precisa no entanto de muitíssimas pessoas que possam fazer uso inteligentemente da Matemática*». [1] Sim, é cada vez maior o número de profissões que, em países civilizados, requerem uma sólida cultura matemática, e a capacidade de aplicar *inteligentemente* a Matemática. Mas tal cultura e tal capacidade não se adquirem fàcilmente — é esta a verdade — sem uma preparação liceal, em que seja banida tôda a estreiteza de vistas tendente a formar *indivíduos automatizados na aplicação de receitas*.

A Matemática representa uma forma de linguagem que, dia a dia, se torna mais necessário aprender, no mundo em que vivemos. Essa linguagem não se limita já a modalidades particulares do pensamento abstracto: a sua universalidade tornou-se patente, desde a criação da Álgebra da Lógica. Vemos hoje a antiga ciência da «quantidade» invadir os mais distantes domínios da Ciência: a Biologia, as Ciências sociais, a Psicologia, etc. reclamam os serviços da Matemática — e novos ramos desta ciência têm de ser criados [2], outros

[1] Do artigo «Como estudar Matemática», publicado na revista *The American Mathematical Monthly*, e traduzido no n.º 12 da «G. M.».

[2] Um exemplo: a Álgebra da Genética. Como observa Ernst Mach, «o poder das matemáticas consiste em se absterem de todo o pensamento inútil, economizando admiràvelmente as operações mentais».

têm de ser desenvolvidos, para atender a múltiplas solicitações que partem do exterior.

Saber pensar e saber exprimir-se, matemàticamente, é uma necessidade que se vai alargando a um número crescente de pessoas, desde que a Ciência e Técnica passaram a condicionar a Vida e o curso dos acontecimentos, sôbre a face da Terra [3].

Todavia, estes factos não me cegam a ponto de não me deixarem ver que, entre os rapazes e as raparigas que freqüentam os liceus, há, relativamente, um grande número, que não virá a fazer uso efectivo de Matemática, exceptuadas aquelas rudimentares noções aritméticas de aplicação quotidiana. É verdade que, mesmo para êsses, o ensino da Matemática oferece vantagens indiscutíveis, não pelos conhecimentos que faculta, mas pelos serviços que presta na formação da inteligência. Mas também é manifesto que, para êsses alunos, a preparação matemática não exige tantos cuidados como para os outros — os que se destinam a determinados cursos científicos. Como proceder então, desde que o ensino tenha de ser feito em comum? A questão é delicada, sem dúvida. Mas o que desde logo se apresenta como um êrro e uma injustiça é que, para atender *exclusivamente* à primeira categoria de alunos fôssem privados os outros e, em especial, os bem dotados para a Matemática, de receber uma *sensata* preparação nessa disciplina, em anos preciosos da vida, quando geralmente se decide do seu futuro. Não estimular, *na medida do possível*, as aptidões particulares do aluno, parece-me longe de corresponder ao objectivo da Educação. Que vitalidade se deve esperar dum ensino, cujo nível seja regulado pelo que possa existir de comum às aptidões de *todos* os alunos? Não será êsse o modo mais eficaz e directo de contribuir para o triunfo da mediocridade? Sim, as escolas não têm por missão fabricar génios: mas também não se fizeram para matar vocações! [4] Que não seja igual o aproveitamento de todos os alunos em relação a uma dada disciplina, isso é apenas um facto minuciosamente previsto: na escala das classificações há lugar para vinte hipóteses... O que será então preciso, é estabelecer, com nitidez e justiça, o *mínimo* a exigir de cada aluno para a sua aprovação.

Ensino idêntico para todos, é um princípio talvez muito cómodo para o professor; mas, *para bem de todos*, há que substituí-lo por êste outro: *ensino que favoreça, tanto quanto possível, as aptidões de cada um.*

De resto, a especialização devia começar, a meu ver, já nos dois últimos anos do liceu, como se fazia antes de 1936; conviria mesmo ir mais longe do que então, estabelecendo maior número de ramificações. Êsses dois últimos anos teriam portanto um carácter pre-universitário.

Não quere isto dizer que se deva desprezar a cultura geral. Convém estimular, em certa medida, o interêsse por questões de ordem geral, e, sobretudo, favorecer hábitos de leitura. Mas não exageremos! Subsiste entre nós um culto perigoso do enciclopedismo, e da multiplicidade de aptidões — como se fôssemos felizes contemporâneos de Descartes ou de Leonardo de Vinci. Será preciso lembrar que não é êsse culto a maneira mais adequada de evitar o acréscimo de incompetência?

Eis como penso a respeito do problema do ensino liceal, e da posição que nêle deve atribuir-se à Matemática. E é pensando assim que julgo ser *homem do meu tempo, virado para os problemas do meu tempo e do meio em que vivo.*

II. Já muitas pessoas devem ter notado que, no programa dos nossos liceus, a Análise Matemática [5] ocupa um lugar modestíssimo, comparado com o que se concede à Álgebra e à Geometria. Tenha-se em vista, por exemplo, a extensão do programa de geometria do 4.º ano, e a imensa variedade de questões subtis a que dá origem, no 7º. ano, o trinómio do 2.º grau. E, contudo, é precisamente a Análise o ramo da Matemática que mais útil e fecundo se tem revelado; o que mais brilhante êxito alcançou até hoje na inter-

(3) Não é sòmente em nossos dias que se atribue à Matemática um papel central no ensino das ciências. Vejamos como, sôbre êste assunto, se pronuncia Michel Chasles: «*Mostra a História que os imperadores que encorajaram a cultura das matemáticas — fonte comum de tôdas as ciências exactas — são também aquêles cujos reinos foram os mais brilhantes e cuja glória foi a mais duradoura*».

(4) Tenha-se em vista o caso de Evaristo Galois. Trata-se, evidentemente, dum caso único na História. Mas a verdade é que êste exemplo veio lançar uma luz intensa e trágica sôbre os vícios dum sistema de ensino.

(5) Chamamos aqui Análise ao ramo de Matemática em que intervêm o conceito geral de função e o conceito de limite. Assiste-se, a cada momento, a rectificações de fronteira entre os diversos domínios da Matemática; assim, até há pouco, foi considerado como teorema fundamental da Álgebra uma proposição que pertence pròpriamente à Análise. Na Álgebra moderna, êsse teorema passou a um plano secundário.

pretação do universo físico.[6] Verifica-se, por outro lado, que, no sentido duma introdução à Análise, os radicais, os logaritmos e as funções circulares constituem uma rica provisão de material exemplificativo, direi mesmo, laboratorial, em que o aluno pode adquirir uma experiência preciosa no manejo da ferramenta matemática, e familiarizar-se com o ponto de vista da teoría das funções, muito diferente do ponto de vista algébrico. Històricamente, foi êsse estudo que levou os investigadores a «uma teoria dos limites, dos exponenciais, dos indivisíveis, que vieram a ser os preliminares essenciais da criação da Análise». Parece-me portanto um êrro lamentável que não se procure obter o máximo rendimento na utilização dêsses recursos; que não se passe a adoptar um critério mais *racional, mais desempoeirado,* no ensino dessas matérias.

Já em números anteriores da «Gazeta de Matemática», me referi à necessidade de introduzir, no programa dos liceus, o ensino de processos de cálculo aproximado. A técnica das aproximações, aliada ao uso de tabelas, gráficos e máquinas, representa o aspecto prático da Análise. É essa técnica que torna possíveis os serviços prestados pela Matemática às ciências de observação e de experimentação. Vem a propósito recordar um espectáculo que se repete com freqüência confrangedora nos nossos liceus (e até nas nossas universidades!): um aluno, chegado ao têrmo duma embrulhada de cálculos que para êle pouco significam, vem comunicar, cheio de mágua e confusão, que não obteve «resultado certo». Êste exemplo dá uma idéia de como, no nosso ensino, andam desligadas a teoria e a prática; não sòmente se dá um predomínio, que julgo excessivo, à parte especulativa, como ainda se estabelece uma classificação lamentável das matérias em «*conhecimentos teóricos* (coisas bonitas que não servem para nada)» e «*noçõezinhas práticas, úteis para a vida*».

III. ¿Será ou não possível dar a alunos do liceu, em condições de ser ùtilmente apreendida, uma noção intuïtiva de número irracional? Eu estou plenamente convencido de que tal é possível. Já no 1.º ano os alunos (normalmente crianças de 10 ou 11 anos) aprendem a desenvolver quebrados em dízima e observam que, em certos casos, a dízima gerada é infinita periódica; já no 2.º ano aprendem a calcular raízes quadradas a menos duma décima, duma centésima, etc., e podem saber que, no caso de o radicando não ser quadrado perfeito, a dízima gerada é ainda infinita, mas não periódica.[7] — ¿E, não será possível, depois disto, dar a alunos do 4.º ou 5.º ano uma idéia satisfatória de número irracional, mediante a consideração das dízimas infinitas aperiódicas?

Não esqueçamos, por outro lado, o partido que se pode tirar do apêlo à intuïção geométrica. Já se não trata, manifestamente, da *intuïção sensível.* Exige-se agora um pequeno esfôrço de idealização. Mas todo o indivíduo *normal* de 14 anos será capaz de realizar êsse esfôrço, na mesma medida em que é capaz de conceber a sucessão natural dos números inteiros. É preciso não perder de vista que, durante séculos, e ainda no tempo de Cauchy, os matemáticos se conformaram com uma teoria «sintética» dos números reais, inspirada na medição das grandezas contínuas, de que è protótipo o segmento de recta. Recordemos, por último, que foi o teorema de Pitágoras que proporcionou o primeiro contacto com a questão da irracionalidade.

De resto, tão difícil será fazer compreender, intuïtivamente, a um aluno do liceu, o que seja número irracional, como fazer-lhe compreender, pelo mesmo processo, o que seja limite duma sucessão convergente, no caso simples em que a sucessão é crescente ou decrescente (no sentido lato)[8] — e, contudo, ainda se não deixou de

---

[6] Deve registar-se que, sendo a mais útil, esta é também a parte da Matemática que maior interêsse filosófico apresenta. Nos seus alicerces, levantam-se curiosas dificuldades, que já divertiram os eleatas, e que reaparecem hoje, com um carácter mais agudo, nas rijas discussões provocadas pelo cantorismo.

[7] A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ (o caso mais simples, entre os radicais) parece-me acessível a alunos do 4.º ou 5.º ano. Essa demonstração, apresentada a título de exemplo, constituirá um factor decisivo na preparação psicológica do aluno para o estudo da irracionalidade.

Por outro lado, também não será difícil imaginar uma demonstração, acessível a alunos dêsses anos, do teorema segundo o qual são aperiódicas as dízimas representativas dos números irracionais. Basta para isso recorrer à série geométrica (que era apresentada no 5.º ano, antes de 1936) e mostrar que tôda a dízima periódica se pode escrever sob a forma duma série geométrica. Não é portanto necessário transferir o assunto para a aritmética do 7.º ano. Um bom exemplo de aplicação da série geométrica é ainda fornecido pelo problema de Aquiles e a tartaruga.

[8] Neste caso será mesmo acessível uma definição rigorosa: «Consideremos uma sucessão de números (reais) $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tais que $a_1 \leq a_2 < \dots \leq a_n \leq \dots$. Então, se existir um número λ que verifique as condições: 1) λ é superior a todos os termos da sucessão; 2) nenhum número menor que λ é superior a todos os termos da sucessão — diremos que λ é o «limite da sucessão» e escreveremos $\lambda = \lim a_n$. Análoga definição para o caso em que

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots .$$

apresentar, com êxito, nos liceus, uma noção intuïtiva de limite, nem se desistiu de aplicar intuïtivamente essa noção ao estabelecimento de fórmulas de áreas e volumes, e até, por vezes, ao cálculo do número *irracional* π (definido por uma sucessão convergente, de que é deduzida a expressão do têrmo geral).

Não venho aqui defender a idéia de apresentar nos liceus uma teoria geral dos números irracionais, à Dedekind — porque, felizmente, ainda não perdi o sentido das realidades. Trata-se apenas (e já não é pouco) de levar o aluno a aperfeiçoar a sua intuïção e a enriquecer a sua experiência, na resolução de *problemas escolhidos*, relativos a classes *particulares* de irracionais. Êsses problemas (que devem com freqüência referir-se a questões concretas) podem agrupar-se em duas categorias:

1) *Problemas de comparação.* Exemplos: Indicar que relação de grandeza se verifica entre $\frac{5}{3}$ e $\sqrt[3]{10}$; entre $1+\sqrt{3}$ e $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; entre 1,2 e $\log_5 7$, etc.

2) *Problemas de aproximação.* Exemplos: Calcular, com n decimais exactas, o valor numérico das expressões: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $2\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$, $5-\log_2 3$, $2^{\sqrt{3}}$, etc.

A resolução dos problemas de qualquer destas classes depende, muitas vezes, da resolução de problemas da outra classe. Por exemplo, a comparação dos valores de $\sqrt[3]{5}$ e $1+\log_7 3$ depende do cálculo aproximado dêsses valores; e, por sua vez, êste cálculo exige a comparação de $\sqrt[3]{5}$ e de $\log_7 3$ com números racionais, nomeadamente com fracções decimais. É contudo evidente que, no caso da igualdade, o cálculo aproximado não mais nos levaria a uma conclusão. Assim, por exemplo, não é por cálculo aproximado que podemos saber se a igualdade $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}=1+\sqrt{2}$ é ou não verdadeira.

Em casos simples, o critério de comparação reveste-se de carácter algébrico, e é fixado pelo *princípio da conservação das leis formais* (9). Por exemplo, a introdução das irracionalidades do tipo $\log_k a$ (a e k racionais; $k \neq 1$) deve fazer-se, tendo em vista a conservação duma das conhecidas propriedades de monotonia das potências, e, dêste modo, a relação de grandeza entre $\log_k a$ e um número racional r deverá ser idêntica ou contrária à que se verifica entre k^r e $k^{\log_k a}=a$, conforme se tiver $k>1$ ou $k<1$.

De resto, já os processos de cálculo da soma e do produto de dois números reais são determinados pelas respectivas propriedades de monotonia. O mesmo, exactamente, cabe dizer a respeito da potência de expoente irracional, cuja noção *intuïtiva* pode sem dificuldade ser apresentada no liceu, mediante problemas adequados de aproximação — *e, do ponto de vista lógico, será igualmente possível apresentar essa noção antes ou depois dos logaritmos, por muito que êste facto perturbe o senso-comum.*

Quanto aos problemas de aproximação, desde logo se descobre neles o inconveniente de conduzirem, geralmente, a cálculos muito laboriosos, sobretudo nesta fase em que, relativamente a operações irracionais, o aluno só conhece um processo particular de cálculo: o da extracção da raiz quadrada (10). Está então indicado o uso de tábuas numéricas (11), entre as quais não deveria figurar a de logaritmos, enquanto não tivesse sido exposta a respectiva teoria — para não inverter a ordem didàcticamente admissível (12).

Resumindo: deve conduzir-se gradualmente o aluno do campo algébrico para o campo topológico, procurando sempre colocá-lo numa situação análoga à do investigador. «*Os matemáticos não começaram por definir os números: trabalharam com êles*». (F. Osgood, *Functions of a complex variable*).

---

(9) Convém recordar que a aplicação dêste princípio compreende duas fases: 1) verificar que só *um* critério é possível, desde que se pretenda conservar uma dada propriedade; 2) averiguar quais das propriedades do anterior domínio subsistem no domínio ampliado e, portanto, quais as condições em que é legítimo operar sôbre os novos números. É manifesto que a segunda parte não pode ser executada no ensino liceal, porque tal exigiria uma análise lógica delicada e muito abstracta dos fundamentos da Álgebra. Temos portanto de nos conformar com algumas verificações e, em tudo o mais, seguir os ensinamentos da evolução histórica.

(10) É preciso destruir entre os alunos a idéia preconcebida de que, sem o auxílio duma tábua de logaritmos, estão impossibilitados de fazer o cálculo de raízes de índice superior a 2; e também a idéia de que certos métodos são inadmissíveis em Matemática, só porque recorrem a tentativas. Convém lembrar-lhes que, até no processo usual da divisão, se empregam tentativas, e que, para efectuar uma simples operação racional, se faz uso de tábuas numéricas — que foram decoradas no ensino primário...

(11) Já no número anterior indiquei como se pode tirar partido das tábuas de quadrados.

(12) O que me parece em particular indispensável é o ensino (que não se faz nos nossos liceus) de processos para a cotação dos erros que se cometem nos cálculos numéricos, quando efectuados com o auxílio da tábua de logaritmos.

Particularmente importante me parece chamar a atenção do aluno para o facto de que a noção de «irracional», a noção de «contínuo», a noção de «infinito» são desprovidas de significado experimental. O que não impede que tais noções tenham proporcionado à Matemática a maneira mais cómoda e mais fecunda de ser útil às ciências experimentais [13].

III. A «resposta» do Sr. Prof. Bento Caraça às minhas considerações, publicadas no precedente número da «Gazeta de Matemática», parece-me insistir demasiado em aspectos puramente secundários do problema discutido. Não obstante, a leitura da referida «resposta» (secção V) levou-me à conclusão de que o autor não está longe de concordar comigo: — o método que preconizo para apresentar nos liceus a noção de logaritmo, parece não lhe repugnar, desde que seja exibido com a indumentária, *mais económica,* das progressões aritmética e geométrica. Sim, porque se trata apenas duma diferença de *forma!* E quer por uma forma quer pela outra, o resultado é o mesmo, inevitávelmente o mesmo: — *desde que tenha compreendido realmente a definição, o aluno fica «ipso facto» habilitado a construir uma tábua de logaritmos!* Não será então o mesmo saber o que é logaritmo, e saber construir uma tábua de logaritmos?! Pois eu tenho de confessar que só muito dificilmente consigo distinguir as duas coisas. Bem sei que se consegue muitas vezes, em Análise, demonstrar a existência duma função, definida num certo intervalo, sem que tal demonstração forneça qualquer meio de *construir* a função — mas tal não é o caso da função logarítmica. E, ainda que se tenha imaginado, (embora eu não a conheça) uma definição de logaritmo, puramente existencial, idealista, à Zermelo, estou convencido de que *ninguém, com o sentido das realidades, hesitaria* em substituí-la por uma *definição construtiva,* no puro sentido da escola intuïcionista [14].

Pode também acontecer que o processo de construção sugerido por uma demonstração de existência conduza a cálculos tão laboriosos que seja pràticamente impossível utilizá-lo. Mas tal não sucede ainda com o método elementar que sugeri (mas que não pretendo ter descoberto!) para o cálculo directo dos logaritmos, o qual se encontra implícito na própria definição de logaritmo, *qualquer que seja a forma de que esta se revista.* Êsse método não difere essencialmente (o que não admira) do que permitiu a Briggs construir as suas tábuas de 14 decimais [15], e que F. Klein considera mais potente do que o método usado pelo inventor dos logaritmos. Além disso, eu tive o cuidado de lembrar o recurso da tábua de quadrados, que reduz enormemente a dificuldade dos cálculos. E, depois, há um facto que não se pode negar, porque se impõe com tôda a fôrça da evidência: — é a simplicidade quási infantil do método que sugeri. [16] Até, para evitar dúvidas, o reduzi às linhas essenciais: «*Seja* a *o número dado. Calculemos a sua potência de expoente* p, *sendo* p *um inteiro qualquer. Se fôr* $10^n < a^p < 10^{n+1}$, *ter-se-á* $10^{\frac{n}{p}} < a < 10^{\frac{n+1}{p}}$, *e portanto* $\frac{n}{p} < \log a < \frac{n+1}{p}$». Dêste modo se consegue fazer o cálculo directo de $\log a$ com um êrro inferior a $\frac{1}{p}$.

Pois bem: foi o processo tão simples e inocente, condensado nas breves palavras anteriores, que me pôs em risco de ser apedrejado, como algoz das «pobres massas académicas»!...

Há um ponto que particularmente me interessa esclarecer. Não é verdade que eu tenha afirmado categòricamente: «Deve-se *obrigar* o aluno a construir uma tábua de logaritmos». Sôbre êste ponto a minha opinião ficou nìtidamente formulada: «*Mesmo que o aluno não chegue a construir uma*

---

[13] Até no Cálculo das Probabilidades, cujas aplicações se estendem hoje às ciências biológicas, sociais, económicas e psicológicas, se reconheceu a vantagem de substituir, em muitos casos, a variável discreta pela variável contínua.

[14] A função logarítmica pode também ser definida a partir da conhecida equação funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$, juntando-lhe a condição de continuïdade. (Em linguagem moderna: «Diz-se logarítmica tôda a função que estabelece um isomorfismo algébrico e topológico, entre o grupo multiplicativo dos números positivos e o grupo aditivo dos números reais»). Mas, ainda neste caso, é construtiva a correspondente demonstração de existência.

[15] Êste método pode apresentar se do seguinte modo: *Seja* a *um número compreendido entre* 1 *e* 10; *para saber se o seu logaritmo está compreendido entre* 0 *e* $\frac{1}{2}$ *ou entre* $\frac{1}{2}$ *e* 1, *basta comparar* a *com* $10^{\frac{1}{2}}$. *Suponhamos que* $\log a$ *se encontra no intervalo* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$: *para saber agora se está compreendido entre* $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{3}{4}$ *ou entre* $\frac{3}{4}$ *e* 1, *procede-se anàlogamente, comparando* a *com* $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{\sqrt{1000}}$; *e assim sucessivamente.* Não será difícil reconhecer que, no fundo, êste método não difere daquele que defendo.

[16] As minhas considerações não teriam sido tão longas se eu tivesse como propósito exclusivo expor secamente o método em questão.

dessas tábuas, ficará (e é isto o fundamental) a ter a legítima convicção de que seria capaz de construí-la se tanto quizesse».

E quando *sugeri, como exercício,* a construção duma tábua de logaritmos, de 3 ou 4 dècimais, *por uma «équipe» de alunos, com auxílio duma tábua de quadrados* (a que indiquei ocupa duas páginas dum pequeno livro), eu tinha reflectido sôbre o assunto: supondo que uma «équipe» de 30 alunos se propunha construir uma tábua de 3 dècimais (para números compreendidos entre 1 e 100), cada aluno teria de calcular directamente, quando muito, três logaritmos — o que, neste caso, pode fazer-se em menos de 30 minutos.

IV. Resta-me agora analisar o seguinte aspecto da questão: Qual das *formas* indicadas deve preferir-se para a definição de logaritmo? Eu acho que se deve optar pela definição apresentada a partir da noção de potência, e vou dizer porquê. É que, para mim, essa forma é seguramente a menos artificiosa e a mais manuseável; a que mais visìvelmente se integra na linha mestra do desenvolvimento da Matemática, e a que mais còmodamente, e com mais naturalidade, permite demonstrar as proposições da teoria dos logaritmos [17]. Depois de familiarizado com as seis operações: adição, subtracção, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, o aluno será naturalmente conduzido a considerar a segunda operação inversa da potenciação: a logaritmação. Depois de tomar contacto com uma primeira classe de irracionais — os que se exprimem como raízes aritméticas de números racionais positivos — o aluno é levado ao conhecimento duma nova classe de irracionais: os que se exprimem como logaritmos de números racionais positivos (em sistemas de base racional) [18]. Cada uma destas classes gera um corpo. E nestas duas ampliações sucessivas do corpo racional — uma algébrica e a outra transcendente — não se chega a praticar nenhum atentado contra a lógica; pelo contrário, é êste um procedimento muito lógico e muito razoável, que deve mesmo satisfazer os exigentes espíritos à Kronecker e à Brouwer, e que está no espírito da Álgebra moderna. Não considero exacta a afirmação de que se faz aqui uso dum «instrumento analítico imperfeitamente definido»: o que se faz é uso duma função *perfeitamente definida* no corpo racional, mas ainda não definida (porque tal se pode por enquanto dispensar) no corpo dos números reais. Não raro se utiliza a mesma função definida no corpo real, antes de o ser no corpo complexo (ou no corpo complexo, antes de o ser num anel de matrizes), e não sei de ninguém que se tenha revoltado contra semelhante *crime*. E se amanhã um matemático fôr conduzido a novas generalizações dêste conceito?... De resto, um *crime* análogo se pode cometer na definição das raízes aritméticas dos numeros racionais: por exemplo, para definir $\sqrt{2}$, podemos partir da função x^2 definida sòmente no corpo racional. Vendo bem, pratica-se uma *monstruosidade* dêste género, tôdas as vezes que se inventa uma nova categoria de números. Assim, as equações: $ax=b$, com a e b inteiros positivos; $a+x=b$, com a e b racionais positivos, e $x^2+a^2=0$ com a racional, são o ponto de partida para a criação dos números fraccionários, dos números racionais negativos e dos números complexos racionais, respectivamente. Do mesmo modo, a impossibilidade de resolver em certos casos as equações $x^m=a$, com m inteiro e a racional positivo, e $a^x=b$ com a e b racionais positivos $(a\neq 1)$, podem tomar-se como ponto de partida para a introdução das duas mencionadas classes de irracionais.

É claro que, na aplicação desta doutrina, não se deve perder de vista a mentalidade do aluno. Em especial, convém dar ao ensino uma orientação de *redescoberta.* Assim, no caso de que nos estamos ocupando, mostra-se ao aluno como, em certos casos, é possível substituir multiplicações por adições, etc. O aluno verá nisso uma idéia muito engenhosa, mas logo se lhe depara uma dificuldade: «Será sempre possível determinar os expoentes que permitem fazer a substituïção?» É esta uma boa oportunidade para lhe demons-

[17] Em particular, o teorema fundamental (relativo ao logaritmo dum produto) aparece como a transformação muito feliz duma propriedade das potências, que os alunos conhecem desde o 1.º ano. Convêm notar que Neper foi levado à descoberta dos logaritmos por meio das progressões: mas era essa, com efeito, a maneira mais cómoda de chegar à noção de logaritmo neperiano — que não à de logaritmo decimal. O princípio da inércia passou depois a fazer sentir os seus efeitos...

Será no entanto de útil esclarecimento, depois de apresentada a definição de logaritmo a partir da noção de potência, mostrar como varia o logaritmo, quando o número cresce em progressão geométrica.

[18] Mais geralmente, o aluno virá a conhecer irracionalidades do tipo $\log_k a$ em que a e k pertencem a um domínio *já considerado*. Com efeito, há uma infinidade de combinações possíveis: $\sqrt[m]{\log_k a}$, $\log_k(\log_r a)$, etc. — o que mostra a comodidade do conceito genérico de irracional, a-pesar-das enormes dificuldades lógicas que tal generalização introduz.

trar que, se fôr N um número inteiro, que não seja potência de expoente inteiro de 10, não existe nenhum número racional r tal que $10^r = N$ [19]. Depois disto, a questão pode ser apresentada nos seguintes termos: «Se não existe em todos os casos um tal expoente, no campo racional, vamos introduzir números irracionais dum modo adequado para que o problema seja sempre possível, ou, o que é equivalente, vamos ladear a dificuldade de modo que o resultado seja pràticamente atingido». E tudo o que vier em seguida será a execução directa e sistemática dêste plano.

A Matemática não se constrói dum bloco... E é bom que o aluno se habitue a considerar esta ciência como um «evoluir» e não como qualquer coisa de acabado e perfeito; como «obra de homens e para homens», em que êle mesmo poderá vir a colaborar, e não como generosa dádiva de deuses. Só assim o «carácter convencional de tôda a definição» matemática deixará de repugnar ao espírito do principiante, porque foi preparado o terreno psicológico, favorável à aceitação de tais convenções, *adaptadas a um certo fim.* Só dêste modo se conseguirá pôr têrmo à lenda, que se criou, da aridez e do tecnicismo estreito da Matemática. Só então deixaremos de ouvir a pessoas *cultas* esta impertinente pregunta: «¿Pois ainda há que descobrir em Matemática? A Matemática não é então um assunto esgotado?» De semelhante estado de espírito é grandemente responsável a orientação que tem predominado no ensino desta disciplina. Só utilizando, como aconselha Klein, o método *intuïtivo* e *genético,* será possível evitar as tão freqüentes atitudes de incompreensão e, mesmo, de rebelião, a respeito da Matemática, e despertar no aluno o amor desta ciência. Tem-se afirmado que a aplicação *integral* dêsse método tornaria o ensino demasiado lento. Embora seja a experiência que, neste ponto, deva ditar a última palavra, eu creio que só de comêço haveria uma aparente perda de tempo — perda que seria depois amplamente compensada pelo *à vontade,* a consciência e o interêsse com que o aluno passaria a encarar os diferentes assuntos. E em tudo isto, a *intuïção,* que desempenha um papel dominante, como guia poderoso, na fase da redescoberta, cederia depois o lugar a uma *lógica rigorosa,* na consolidação dos resultados. É claro que tal aperfeiçoamento lógico não será sempre possível ou vantajoso, no liceu — mas acontece que muitas vezes é possível, e fácil, e proveitoso. Nos casos restantes, devemos conformar-nos com a base intuïtiva — que, no ensino da Matemática, é seguramente preferível a uma base autoritária e, ainda mais, a uma base de mistificação.

Eu sei o que muitas pessoas, com prática de ensino secundário (devo dizer que também tenho alguma) costumam responder a observações semelhantes às anteriores: «Fantasias! Tudo isso é muito bonito, mas a verdade é que os alunos são incapazes de acompanhar um ensino com êsse nível. A *pràticazinha* desfaz muitas ilusões!» Tese na verdade muito cómoda, mas tese desanimadora — tese perigosa! E pouco lisonjeira para os estudantes portugueses. (Mas serão incapazes *todos* os alunos? E, vendo bem, onde estará muitas vezes a incapacidade?) Fantasia, sonho, delírio — essas palavras não me assustam: já as conheço bem. São palavras que se fazem ouvir, tôdas as vezes que é preciso incomodar S. Ex.ª, a Rotina.

[19] Êste teorema pode ser demonstrado dum modo extraordinàriamente simples, desde que se admita intuïtivamente um facto elementar.

NOTAS:

1.ª Não foi inconsideradamente que, no precedente número da «G. M.», tomei como escudo a opinião de Klein. Ao leitor menos informado, direi que Felix Klein (1849-1925) é geralmente considerado como um modêlo de matemático ligado à realidade. Foi enérgico defensor do *fusionismo,* isto é, da solidariedade entre os diferentes ramos da Matemática, e mesmo entre os diferentes ramos da Ciência. Neste sentido, as suas idéias revestem-se dum carácter nitidamente revolucionário. A obra de F. Klein (na Matemática e na Pedagogia) distingue-se por um vigoroso cunho de originalidade e juventude.

2.ª Sôbre a construção de tábuas de logaritmos, recomendo vivamente a leitura do livro de L. Hogben, *Les Mathématiques pour tous* (1939), no capítulo: «Comment furent découverts les logarithmes». Êste livro de Matemática para *todos* apresenta ainda um processo de construção de tábuas trigonométricas e três processos para o cálculo de π. Pouco práticos, estes inglêses!... Quantos são os alunos que, na vida *real,* se ocuparão do cálculo de π?

3.ª O método que preconizo para a definição de logaritmo presta-se particularmente para uma demonstração *completa* do teorema relativo ao logaritmo dum produto, do qual se deduzem fàcilmente as restantes proposições da mesma teoria: *Sejam* a *e* b *números positivos dados. Se tivermos* $10^m \leq a^p \leq 10^{m+1}$ *e* $10^n \leq b^p \leq 10^{n+1}$, *sendo* p *um inteiro arbitrário, teremos também* $m/p \leq \log a \leq (m+1)\,p$, $n/p \leq \log b \leq (n+1)/p$, *donde* $(m+n)/p \leq \log a + \log b \leq (m+n+2)/p$. *Por outro lado, multiplicando ordenadamente as duas primeiras duplas desigualdades, temos* $10^{m+n} \leq (ab)^p \leq 10^{m+n+2}$, *donde* $(m+n)/p \leq \log(ab) \leq (m+n+2)/p$. *Assim, os valores de* $\log(ab)$ *e de* $\log a + \log b$ *pertencem ambos ao segmento* $[(m+n)/p,\ (m+n)/p + 2/p]$: *a sua diferença não pode exceder, em valor absoluto, o comprimento dêste segmento, ou seja,* $2/p$. *Teremos, pois:* $\log(ab) = \log a + \log b + \varepsilon$, *em que* $|\varepsilon| < 2/p$; *mas, como* p *é arbitràriamente grande, segue-se que* $\varepsilon = 0$ *e portanto* $\log(ab) = \log a + \log b$. Para maior generalidade, pode substituir-se 10 por k, designando por k a base do sistema.