sas caracterizações da continuïdade duma transformação dum espaço topológico noutro (fecho, conjuntos fechados, conjuntos abertos, vizinhanças, convergência) e discussão. Casos de espaços topológicos particulares, definição de Cauchy. Continuïdade uniforme. Transformações biunívocas e não bicontínuas. Exemplos. Homeomorfismo. Funções contínuas e discussão. Funcionais contínuas, discussão e exemplos. Conexão. Exemplos. Invariância topológica desta noção.

Axiomas de separação. Espaços acessíveis, de Hausdorff e normais. Discussão. Exemplos mostrando o fortalecimento efectivo e sucessivo destas condições de separação. Propriedades dos espaços normais utilizáveis no problema da metrização: Problema da existência de funções reais contínuas, discussão detalhada e resolução.

Axiomas de numerabilidade. 1.º axioma de numerabilidade, A_1, exemplos. Relação com os espaços métricos e a noção de convergência. Exemplo dum espaço de Hausdorff que não verifica o 1.º axioma de numerabilidade A_1. 2.º axioma de numerabilidade, A_2, e suas conseqüências (A_1, Teorema de Borel, separabilidade). Equivalência de A_2 e da separabilidade nos espaços métricos. Exemplo dum espaço verificando A_1 e não A_2. Análise do espaço de Hilbert e de espaços de funções quanto à numerabilidade e separabilidade. Exemplo dum espaço de funções ortogonais isométrico ao espaço de Hilbert. Exemplo dum espaço normal verificando A_1 separável e não verificando A_2.

Homeomorfismos de espaços topológicos a sub-conjuntos do espaço de Hilbert e um teorema de metrização. Qualquer espaço topológico normal e verificando A_2 é homeomorfo a um sub-conjunto do espaço de Hilbert.

(Continua no próximo número).

ANTOLOGIA

LA MATHÉMATIQUE — AVANT-PROPOS

por Paul Montel

(de Encyclopédie Française — Tome I — L'outillage mental)

Tôda a nossa vida moderna está como que impregnada de matemática. Os actos cotidianos e as construções do homem trazem a sua marca e não só as nossas alegrias artísticas e a nossa vida moral lhe sofrem a influência. Os próprios animais se lhe submetem, e o seu instinto, desenvolvido pelo lento trabalho da hereditariedade, conduzi-os à descoberta de leis matemáticas que só o homem soube formular e que parecem existir nêles como que ligados obscuramente à forma da sua consciência.

A matemática aparece a cada instante na vida corrente para as necessidades comuns à maior parte dos homens, mas muitas vezes cada um dêles tem além disso uma ferramenta a empregar uma máquina a utilizar, um aparelho a pôr em marcha, sem falar dos especialistas, construtores, arquitectos, engenheiros, marinheiros, etc., para os quais o uso profissional da matemática tem um carácter permanente; é uma direcção a definir, um diâmetro a medir, uma velocidade a avaliar, uma casa a construir de que é preciso estabelecer o plano, um corte, um alçado. A matemática intervém mesmo para apaziguar a dor humana: o médico emprega-a nas dosagens, o bacteriologista na contagem dos micróbios, e o cirurgião na forma das suas intervenções e na disposição dos pensos.

Tôdas estas operações aritméticas ou geométricas que o homem efectua como que brincando, necessitaram séculos para que a humanidade conseguisse precisá-las, isolá-las, estabelecer as suas técnicas. Pode-se medir o caminho percorrido observando a maneira de contar dos povos chamados primitivos: êles recorrem a uma mímica que utiliza os dedos das mãos e dos pés ou então aplicam sucessivamente os objectos a contar sôbre as diferentes partes do corpo: reconhece-se neste último processo o esbôço da noção de correspondência tão fértil nas matemáticas actuais.

Os primitivos não vão muito longe na sua maneira de contar; de resto, os grandes números só aparecem lentamente; a palavra milhão è do século XV, bilião do século XVI, e isto numa Europa Ocidental já avançada.

A ideia, tão simples para nós, que, depois de qualquer número inteiro existe outro, esta idéia a que se reduz em última análise a noção de infinito matemático, é relativamente recente. Escapou à Grécia antiga e o génio de Arquimedes não a exprimiu claramente. Tinha, no entanto, feito na sua *Da Areia* um esfôrço enorme para mostrar que se pode dar nome a um número muito grande ainda que êle ultrapasse o dos grãos de areia que enchessem a terra, ou mesmo o Universo.

Vinte séculos passaram depois da afirmação de Arquimedes; a humanidade, familiarizou-se com os grandes números e com os seus inversos, os números muito pequenos. O estudo do Universo e o do átomo introduziram expressões numéricas que já deixaram de nos espantar, se bem que o nosso espírito não possa evocar uma imagem das grandezas que êles representam. Semelhantes nisto aos primitivos que dizem «muito» para além de um certo número, não sabemos traduzir doutra maneira a idéia de que uma nebulosa, por exemplo, está a uma distância de nós que corresponde a várias centenas de milhões de anos de luz.

Um outro caminho pelo qual a matemática se introduz na vida dos indivíduos e dos povos é o da probabilidade. Um grande número das nossas decisões dizem respeito a acontecimentos dos quais aos nossos olhos certos elementos de incerteza estão submetidos às leis do acaso. Estas decisões são guiadas e muitas vezes determinadas pela noção de probabilidade, algumas vezes sob uma forma imprecisa ou apenas consciente.

É também o cálculo das probabilidades que regula diversas medidas de ordem colectiva respeitantes à vida económica e social; a vida de organismos como bancos ou companhias de seguros sôbre a vida, a doença, a invalidez, o incêndio, a saraiva ou o roubo, os dispositivos de certos aparelhos como o telefone, a regulação do tiro, etc.

Pela estatística, os matemáticos elucidam outras questões de ordem financeira, económica ou social. As matemáticas aplicam-se também à higiene social, à educação das crianças, à psicologia e à técnica.

As matemáticas aparecem igualmente nos fenómenos respeitantes ao gôsto, à sensibilidade e à vida moral. Todos sabem o seu papel na arte, e, em particular, na arquitectura. A beleza das formas, está ligada à existência de relações simples e o número de ouro dos gregos aí intervem freqüentemente.

Começaram-se recentemente trabalhos destinados a caracterizar a beleza de certos vasos por expressões matemáticas. As notas e os acordes musicais correspondem, também, a relações numéricas simples e a poesia está estritamente ligado ao número

«A pintura e a poesia são matemáticas veladas», disse Forains. Existe além disso na própria matemática uma beleza intrínseca, dum carácter necessàriamente um pouco esotérico, que reside na harmonia das relações que formulam as suas leis.

A matemática exerce a sua influência mesmo sôbre a vida moral quer duma maneira directa, como no estudo dos jogos de azar, por exemplo, quer duma maneira indirecta, obrigando o espírito a hábitos de precisão e ordem que são transferidos naturalmente para o mundo moral. A imprecisão e a confusão do pensamento facilitam a certos homens a realização de actos que a nossa ética reprova.

As ciências, em geral, e por isso as matemáticas, exigem uma sinceridade e uma probidade em todos os instantes cujo efeito é contagioso. Assim as matemáticas pouco a pouco penetraram em todos os domínios da actividade humana, algumas vezes invisíveis mas sempre presentes. Para o homem civilizado de hoje o «saber contar» não é menos indispensável do que o «saber ler e escrever». A ciência do número e da extensão é pois útil em cada instante e a todos, e é uma verdadeira doença ignorar os seus rudimentos. De resto, como escreveram os Goncourt: «de duas inteligências iguais, colocadas em condições idênticas, a prioridade pertence àquela que conhecer geometria».

Se as matemáticas estão estritamente ligadas a tôdas as formas da vida individual ou colectiva, é na elaboração da própria ciência que o seu papel é fundamental. A matemática é a linguagem da ciência e uma disciplina não merece verdadeiramente o nome de ciência senão a partir do momento em que as matemáticas aí penetram. Elas fornecem-lhe a expressão das suas leis, quer resultem dum estudo atento das ligações que unem os diferentes elementos variáveis de um fenómeno, quer resultem de valores médios de acções em número bastante grande das quais certas condições nos escapam.

Destas leis, as transformações de cálculo tiram conseqüências variadas que deverão ser submetidas ao contrôle experimental.

Uma das mais potentes tentativas de explicação dos fenómenos naturais que nos oferece a história das ciências, a teoria da relatividade, tem por fim dar uma imagem do Universo por meio de uma geometria a quatro dimensões.

As necessidades das ciências da natureza, das ciências humanas e das suas aplicações criam novas correntes para a investigação matemática e fazem desabrochar novos métodos. Mas a maior parte das vezes, o matemático vai ao sabor da sua fantasia. Plutarco diz que Arquimedes desdenhava da ciência de inventar máquinas e que empregava os seus melhores esforços «a escrever sòmente das coisas cuja beleza e subtileza não estivessem ligadas à necessidade».

Os matemáticos estudam cada vez mais as leis que regem as relações entre os números; criam os métodos que servem para êste estudo e outros problemas se levantam sob os seus passos à medida que avançam na resolução dos precedentes; como sempre numa região vivamente iluminada aparecem de novo cantos de sombra. As suas descobertas ficam, por vezes, sem aplicação durante séculos: são ferramentas esperando a mão do operário que delas saberá tirar partido. Tem-se dito muitas vezes: quando os gregos estudavam as secções cônicas, não previam o papel que elas desempenhariam um dia na astronomia e na navegação. Pode-se acrescentar: na balística, para a localização dos canhões por meio do som.

A ciência matemática tem o privilégio de crescer por justaposição de novas doutrinas às antigas, as ciências da natureza e as ciências humanas, pelo contrário, desenvolvem-se freqüentemente substituindo as antigas por teorias novas que se edificam sôbre ou ao lado das ruínas daquelas. Na cidade da matemática limitam-se a abrir novas avenidas, conservando os velhos bairros por meio de simples arranjos interiores. A alegria estética que traz ao matemático a contemplação desta cidade é a sua verdadeira recompensa. A beleza das suas construções abstratas oferece-lhe, por vezes, a mesma harmonia que as linhas de arquitectura ou os acordes da música.

A sua solidez desafia os séculos. Como escre-Vito Volterra: «a morte pode fazer desaparecer os impérios; a geometria de Euclides está de acôrdo com a geometria de hoje». Um teorema de Newton de Gauss ou de Poincaré guardará a sua verdade enquanto a razão humana permanecerá inalterável. No renovamento contínuo das doutrinas e das Escolas que governam as ciências da natureza e as ciências humanas, sòmente a matemática e a arte possuem perenidade.

Tradução de J. DA SILVA PAULO

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 4

1195 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação $\frac{3}{11}x+\frac{2}{7}y=29$. R: *Da equação proposta tira-se* $x=106-y+(7-y):21$ *e se fizermos* $y=7$ *vem* $x=99$. *As soluções inteiras serão dadas por* $x=99+22n$ *e* $y=7-21n$; *e as soluções inteiras e positivas obtêm-se substituindo nas fórmulas anteriores* n *por qualquer dos valores inteiros que verifiquem a seguinte dupla desigualdade* $-\frac{9}{2}<n<\frac{7}{21}$.

1196 — Determine os valores de x qve satisfazem a desigualdade $-x^2-11x+12>0$. R: $-12<x<1$ *visto* 1 *e* -12 *serem as raizes do trinómio, primeiro membro da desigualdade.*

1197 — As raízes de uma equação biquadrada são duas reais, do mesmo valor absoluto e de sinal contrário e as outras duas imaginárias puras conjugadas. De que natureza são as raízes da equação resolvente? Justifique a resposta. R: *As raizes da biquadrada são as raizes quadradas das raizes da resolvente; por isso as raizes da resolvente têm que ser, no caso pôsto, ambas reais e uma positiva e outra negativa.*

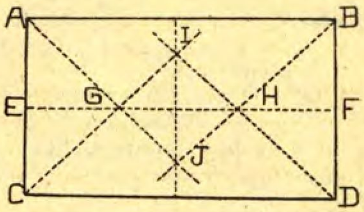
1198 — Verifique a identidade: $(\cos a-\cos b)^2+(\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b)^2=4\operatorname{sen}^2 1/2(a-b)$. R: *Do 1.º membro da igualdade, depois de desenvolver os quadrados e simplificar, obtém-se* $2-2(\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b)=2[1-\cos(a-b)]$. *Por outro lado, se notarmos que* $\cos^2\frac{1}{2}A-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A=\cos A$ *e que, por isso, é* $1-2\operatorname{sen}^2 A/2=\cos A$ *ou* $2\operatorname{sen}^2 A/2=1-\cos A$, *o segundo membro torna-se em* $2[2\operatorname{sen}^2(a-b)/2]=2[1-\cos(a-b)]$, *o que verifica a identidade.*

1199 — Sendo $\operatorname{sen} a=4/5$, calcule $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$ e $\operatorname{tg} 2a$. R: *Como* $\operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen} a\cos a=\pm 2\operatorname{sen} a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$, *tem-se* $\operatorname{sen} 2a=\pm 2\cdot 4/5\cdot\sqrt{1-16/25}=\pm 24/25$; $\cos 2a=1-2\operatorname{sen}^2 a=1-2\cdot 16/25=-7/25$ *e* $\operatorname{tg} 2a=\pm\frac{24}{7}$.

1200 — Determine recorrendo ao cálculo logarítmico a expressão geral dos ângulos cujo coseno é $-0{,}3145$. R: $\log\cos\alpha=\log 0{,}3145=\bar{1}{,}49762$, *e* $\alpha=71^\circ 41' 9''$. *Como o coseno dado é negativo e como* $-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$ *um dos ângulos que satisfazem ao problema é* $108^\circ 18' 51''$ *e a expressão geral dos arcos cujo coseno é* $-0{,}3145$ *será dada por* $\alpha=n\cdot 360^\circ\pm 108^\circ 18' 51''$, *onde* n *é um inteiro qualquer.*

1201 — Reduza à dízima as fracções 3/5, 2/7 e 3/14. Classifique as dízimas obtidas. R: $3/5=0{,}6$; $2/7=0,(285714)$ *e* $3/14=0{,}2(142857)$ *e portanto a primeira é uma dízima exacta; a segunda periódica simples e a terceira periódica mixta.*

1202 — Traçam-se as bissectrizes dos quatro ângulos de um rectângulo. Demonstre que: 1.º, essas bissectrizes formam um quadrado; 2.º, as diagonais do quadrado são paralelas aos lados do rectângulo; 3.º, o comprimento comum dessas diagonais é a diferença dos comprimentos dos lados do rectângulo. R: *Seja* ABCD *o rectângulo e* AJ, CG, BH *e* DI *as bissectrizes que se encontram nos pontos* G, I, H, J. *Os triângulos* AGC *e* BHD *são rectângulos isósceles por os ângulos em* Â, Ĉ, B̂ *e* D̂ *medirem cada um* 45º, *e como aquêles dois triângulos têm as hipotenusas iguais terão os catetos iguais e será* AG=CG=BH=HD. *Por outro lado os triângulos* CID *e* AJB *são também rectângulos isósceles e dai resulta* BJ=AJ=CI=DI *e portanto* GI=IH=HJ=JG *donde se conclue que o quadrilátero* GIHJ *é um quadrado, visto os ângulos em* G, J, I *e* H *serem rectos e os lados iguais.* 2.º *As diagonais* IJ *e* GH, *como formam ângulos de* 45º *com as bissectrizes* CI, AJ, BJ *e* DI *são paralelas aos lados do rectângulo.* 3.º FH=BF=EG=EA=1/2 AC *logo* EF−GH=HF+GE=AC *donde* GH=EF−AC=AB−AC c. q. d.



Soluções dos n.ºs 1195 a 1202 de J. Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 2

1203 — Um agricultor dispendeu a quantia de 155 esc. diários para pagar o trabalho das suas vindimas a um grupo de homens e mulheres. Cada homem recebeu 13$ diários e cada mulher 7$. Quantos eram os homens e quantas as mulheres. R: *Sejam* x *e* y *respectivamente o número de homens e mulheres. Ter-se-á* $13x+7y=155$, *equação que admite a única solução inteira e positiva* $x=6$ esc. $y=11$ esc.

1204 — Que valores se deverão atribuir ao coeficiente m da equação $x^2+mx+8=0$ para que uma das raízes seja dupla da outra? R: *Sejam* x_1 *e* $2x_1$ *as raízes da equação. Ter-se-á* $3x_1=-m$ *e* $2x_1^2=8$ *ou seja* $m=\pm 6$.

1205 — Dada a função $y=\log_2 x$ faça o estudo da sua variação quando x percorre o intervalo $(0, +\infty)$. Diga quais as propriedades mais importantes desta função e faça a sua representação gráfica referente ao intervalo $(0, 16)$ da variável independente.

1206 — Numa circunferência de raio r traçou-se uma corda de 127,68 metros, que subtende um arco cuja amplitude é igual a $50^{\circ}\,32'\,15''$. Calcule o comprimento do raio, expresso em centímetros. Utilize logaritmos. R: *Será* $r=\dfrac{6384}{\operatorname{sen} 25^{\circ}\,16'\,7'',5}$ *e, por isso,* $\log r=3{,}80509+0{,}36971=4{,}17480$ *donde* $r=14956$ cm.

1207 — Supondo que α é o ângulo do 2.º quadrante que satisfaz a igualdade $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{2}$ calcule $\operatorname{cosec}\alpha$. R $\operatorname{cosec}\alpha=+\sqrt{3/2}$.

1208 — Quais são os ângulos compreendidos entre 4π e 6π radianos e cuja tangente é $-1{,}351$. Utilize tábuas naturais. R: *São os ângulos* $\alpha=5\pi-0{,}933$ *radianos e* $\alpha=6\pi-0{,}933$ *radianos.*

1209 — Demonstre que se num triângulo rectângulo um dos ângulos agudos é duplo do outro, um dos catetos é metade da hipotenusa. R: *Seja* [ABC] *o triângulo rectângulo e* $\hat{A}=2\hat{C}$. *Tracemos a circunferência circunscrita ao triângulo. É óbvio que* $\overline{AC}$ *é diâmetro da circunferência. Por outro lado fàcilmente se deduz ser* $\hat{A}=60^{\circ}$ *e* $\hat{C}=30^{\circ}$ *o que prova ser* $\overline{AB}$ *o lado do hexágono inscrito e portanto igual ao raio, metade do diâmetro que é a hipotenusa.*

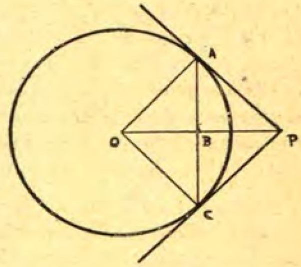
1210 — Uma esfera de área igual a $4\pi\,\text{cm}^2$ é circunscrita a um cubo. Calcule a área do cubo. R: *Como a esfera é circunscrita ao cubo, o seu diâmetro é diagonal do cubo. Ora o lado do cubo* l *está relacionado com a diagonal* d *pela relação* $d^2=3l^2$ *donde* $l^2=4/3\,\text{cm}^2$ *e portanto a área* $A=6l^2=8\,\text{cm}^2$.

Soluções dos 1205 a 1210 de J. Calado.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, 13-10-1942

1211 — *a)* Defina superfície cónica e superfície cilíndrica, cone e cilindro; dê algumas propriedades importantes referentes a áreas e volumes de cones e cilindros. *b)* É dada uma esfera de raio r e um ponto P exterior, à distância $2r/\sqrt{3}$ do centro; de P tira-se a superfície cónica tangente à esfera e considera-se o cone que tem P como vértice e cuja base é limitada pelo círculo de tangência. Exprima o volume dêsse cone em função do volume V da esfera. R: *De* $OAP \sim OAB \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \quad ou \quad \overline{OB}=r\sqrt{3}/2 .$$



Do triângulo rectângulo OAB *vem* $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=$ $=r^2-\dfrac{3r^2}{4}=\dfrac{r^2}{4}\cdot$ *Representando por* V *o volume da esfera e por* V′ *o do cone, tem-se*

$$V'=\frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2\cdot\overline{BP}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2(\overline{OP}-\overline{OB})=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{4}\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}-\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi r^3}{24\sqrt{3}}=\frac{1}{32\sqrt{3}}V.$$

1212 — Dada a equação $x^2+px+q=0$, de raízes α e β, determine a equação do 2.º grau que tem como raízes $\alpha_1=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$, $\beta_1=\beta+\dfrac{1}{\beta}\cdot$ R: *Sabe-se que* $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$. *Tem-se*

$$\alpha_1+\beta_1=\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\left(p+\frac{p}{q}\right),$$

$$\alpha_1\cdot\beta_1=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+$$

$$+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-2=q+\frac{1}{q}+\frac{p^2}{q}-2.$$

A equação pedida é

$$x^2+\left(p+\frac{p}{q}\right)x+q+\frac{1}{q}+\frac{p^2}{q}-2=0.$$

1213 — Calcule o valor numérico da expressão

$$\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \text{ para } x=0{,}04712 .$$

R: *A expressão dada é igual a*

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x}.$$

Para $x=0{,}04712$ *vem* $\sqrt{0{,}95288}=N$

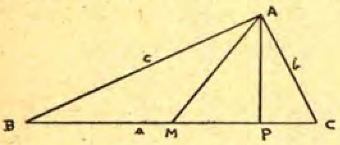
$$\log N=\frac{1}{2}\log 0{,}95288=\frac{1}{2}\cdot\bar{1}{,}97904=\bar{1}{,}98952$$

$N=0{,}97616$.

1214 — *a)* Defina polígono regular e dê as propriedades que conhece referentes à medida dos seus ângulos. ¿ Que polígonos regulares convexos podem figurar como faces dum poliedro regular convexo? Porquê? *b)* Calcule o raio de um círculo conhecendo a diferença D entre a área dêsse círculo e a do hexágono regular inscrito. R: b) *A área do circulo é* $S = \pi r^2$ *e a área do hexágono* $S_6 = \frac{3\sqrt{3}\,r^2}{2}$.

Logo $D = \pi r^2 - 3\sqrt{3}\,r^2/2 = r^2(\pi - 3\sqrt{3}/2)$ *donde* $r^2 = \frac{2D}{2\pi - 3\sqrt{3}}$.

1215 — Dado um triângulo rectângulo de catetos b e c e hipotenusa a, resolva o triângulo determinado pela altura e pela mediana correspondente à hipotenusa. R: $\overline{AM} = a/2$. *Dos triângulos semelhantes* ABC ~ APC *resulta* $\overline{AP} = bc/a$. *Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo* APM *vem, por fim,* $\overline{PM}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = a^2/4 - b^2c^2/a^2$.



1216 — ¿ Quantos números inteiros há de quatro algarismos que sejam divisíveis por todos os números dígitos? R: *O m. m. c. de todos os números dígitos é* $N = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2.520$. *Logo há três números que satisfazem ao enunciado:* 2.520, 5.040 *e* 7560.

Soluções dos n.os 1211 a 1216 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico

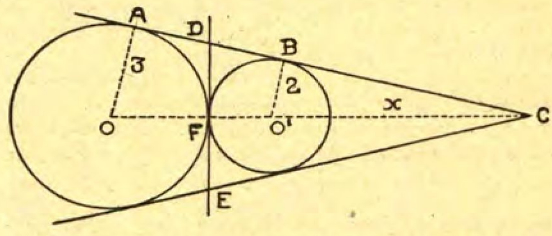
Ponto n. 2

1217 — Uma liga de ouro e cobre contém 20 % de cobre. Juntando-lhe 500 gramas de ouro, a percentagem do metal nobre passa a ser de 85 por cento. Calcular a quantidade de ouro existente naquela liga e o pêso da mesma liga. R: *Se forem* x *e* y *os pesos de cobre e ouro existentes na liga, as equações que resolvem o problema são* $x = \frac{20}{100}(x+y)$ *e* $x = \frac{15}{100}(x+y+500)$, *donde o pêso de ouro* $y = 1200$ gr *e o pêso da liga* $x+y = 1500$ gr.

1218 — Determinar os valores inteiros e positivos de a e b para os quais a função de x definida pela equação $\frac{x-a+1}{x^2+x-1} = \frac{y+b-1}{y^2-y+1}$ se anula para $x=2$. R: *Será então* $\frac{2-a+1}{4+2-1} = \frac{b-1}{1}$ *donde* $5b+a=8$ *cujas soluções em números inteiros são dadas por* $b = 1+m$ *e* $a = 3-5m$; *donde a única solução inteira e positiva* $b=1$, $a=3$.

1219 — Sendo $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$ as raízes da equação $(x-1)(k^2x+1) = 2k$, exprimir $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ em função de k e determinar k para que α e β sejam complementares. R: *A soma das raízes da equação é* $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{k^2-1}{k^2}$ *e o produto* $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{-(2k+1)}{k^2}$; *logo será* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{(k^2-1):k^2}{1+\frac{2k+1}{k^2}} = \frac{k-1}{k+1}$ *e se* α *e* β *forem complementares será* $k = -1$.

1220 — Dadas duas circunferências de raios 2 e 3 centímetros, tangentes exteriormente, determinar a área do triângulo formado pelas tangentes comuns às mesmas circunferências. R: *O triângulo pedido é o triângulo* CDE. *Dos triângulos semelhantes* AOC *e* BO'C *tira-se* $\frac{3}{2} = \frac{5+x}{x}$ *ou seja*



$x = 10$; *e dos triângulos semelhantes* DFC *e* BO'C *tira-se* $\frac{x+2}{DF} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ *logo* $DF = \sqrt{6}$. *Finalmente a área pedida é* $12\sqrt{6}\ \text{cm}^2$.

1221 — Dado um rectângulo de lados a e b, tirar, pelo meio do lado a, uma recta que divida o rectângulo em duas partes cujas áreas estejam na razão $m:n$. R: *Seja* x *um dos segmentos que a recta que passa pelo meio do lado* a *determina no lado oposto. As áreas dos trapézios formados são dadas pelas expressões:* $\frac{\frac{a}{2}+x}{2}\times b$ *e* $\frac{\frac{a}{2}+(a-x)}{2}\times b$ *donde* $\frac{a+2x}{3a-2x} = \frac{m}{n}$ *e finalmente* $x = \frac{a(3m-n)}{2(n+m)}$.

1222 — Um cone de revolução e uma esfera estão assentes sôbre um plano horizontal. Sabendo que o raio da esfera é igual a 8 centímetros e que, no cone, a altura e o diâmetro da base são iguais ao diâmetro da esfera, determinar a distância daquele plano a que se lhe deve tirar um plano paralelo para que sejam iguais as secções determinadas por êste plano no cone e na esfera. R: *Seja* x *o raio das secções e* y *a distância do plano horizontal ao plano secante. Será* $x^2 = y(16-y)$ *(na esfera) e* $\frac{x}{8}=\frac{16-y}{16}$ *(no cone), donde se obtêm* $y=16-2x=16-\frac{64}{5}=\frac{16}{5}$ cm.

Soluções dos n.os 1217 a 1222 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **1.º exame de freqüência, 1941-1942**

1223 — Efectuando duas transformações sucessivas escreva a equação cujas raízes estão relacionadas com as da equação $2x^6-x^5+4x^2-3=0$ pela expressão $y=3+\frac{1}{x}$. R: *Efectuar primeiro a transformada em* $z=\frac{1}{x}$ *e em seguida aumentar de* 3 *unidades as raízes desta transformada. Vem* $3y^6-54y^5+401y^4-1572y^3+3429y^2-3941y+1858=0$.

Solução do n.º 1223 de J. Pais Morais.

1224 — Determine as condições a que devem satisfazer os números reais a, b, c, para que os afixos dos imaginários $\frac{a+i\sqrt{3}}{a-i\sqrt{3}}$ $\frac{b+i\sqrt{3}}{b-i\sqrt{3}}$ $\frac{c+i\sqrt{3}}{c-i\sqrt{3}}$ sejam os vértices dum triângulo eqüilátero. Sendo $a=0$ calcule os valores de b e c. R: *Note-se que os três complexos têm módulos iguais a* 1 *e que os seus afixos serão vértices dum triângulo eqüilátero se os seus argumentos forem* $\alpha, \alpha+\frac{2\pi}{3}, \alpha+\frac{4\pi}{3}$. *Da introdução desta condição resultam as duas condições* $b-a=ab+3$ *e* $c-b=bc+3$.

Solução do n.º 1224 de A. Sá da Costa.

1225 — Calcule, usando a fórmula de Leibnitz, a derivada de 3.ª ordem da função $y=\operatorname{sen}\sqrt{x}\,.\sqrt{x}$.

1226—Exprima em função de p real os números reais x e y de modo que $(3-4i)(x+yi)=p$ e X e Y reais em função de q real de modo que $\frac{3-4i}{X+Yi}=q$. Indique que condições devem dar-se para que seja $p=q$. Será possível determinar p e q de modo que haja um número $(a+bi)$ que satisfaça simultâneamente às duas condições?

R: $\begin{cases} x=3p/25 \\ y=4p/25 \end{cases}$ $\begin{cases} X=3/q \\ Y=-4/q \end{cases}$ $\begin{cases} X_x=8/25 \\ Y_y=-16/25. \end{cases}$

Não existe o complexo $a+bi$ *a que se refere o enunciado. A sua existência implicaria a verificação simultânea de* $pq=+25$ *e* $pq=-25$.

1227 —Deduza a condição que deve verificar-se para que o segundo e terceiro termos da equação

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

se possam anular por meio da mesma transformação. R: *A transformação a que se refere o enunciado só existe se fôr verificada uma das três condições* $a_1=0$, $a_2=0$ *(com* $n\neq 0$*)*.

Soluções dos n.os 1226 e 1227 de J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — 1.ª CADEIRA — **1.º exame de freqüência, 27-2-42**

1228 — Calcular o produto das determinações de $i^{1/n}$. Discussão. R: $i^{1/n}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{1/n}=$

$$=\left(\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi/2+2k\pi}{n}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$[k=0,1,2\ldots(n-1)].$$

O produto será

$$P=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)^n\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)[\cos(n-1)\pi+i\operatorname{sen}(n-1)\pi]=$$

$=\pm i$ *conforme fôr* n *ímpar ou par.*

1229 — Dadas as duas rectas $r_1\begin{cases}x+y-2=0\\x-y=0\end{cases}$ $r_2\begin{cases}2x-z-2=0\\x-z=0\end{cases}$ achar a sua distância, o seu ângulo e a direcção da perpendicular comum. R: 1.ª) *Como imediatamente se reconhece, a recta* r_1 *é perpendicular ao plano* Oxy, *encontrando êste no ponto* (1, 1, 0), *e a recta* r_2 *é perpendicular ao plano* Oxz, *no ponto* (2, 0, 2). *Por conseqüência, as rectas são ortogonais e o seu ângulo mede* 90°. *Em virtude do exposto a distância das duas rectas é a diferença das abscissas dos seus traços nos planos* Oxy *e* Oxz, *isto é,* $d=1$. *Por serem* r_1 *e* r_2 *perpendiculares, respectivamente, a* Oxy *e* Oxz, *elas são paralelas a* Oyz *e a direcção da perpendicular comum é a do eixo* Ox, *cujos parâmetros são* (1, 0, 0). 2.ª) *A distância de* r_1 *a* r_2 *é igual à distância dum ponto arbitrário de* r_1 *ao plano* π *que contém* r_2 *e é paralelo a* r_1. *A equação geral* *dos planos que contêm* r_2 *é* $2x-z-2+\lambda(x-z)=0$, *ou*, $(2+\lambda)x-(1+\lambda)z-2=0$. *A equação de* π *obtém-se desta escolhendo* λ *de modo tal que a direcção normal a* π *seja perpendicular à recta* $r_1 \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} \frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1} \end{cases}$. *Isto é* $1+\lambda=0$, *donde* $\lambda=-1$ *e* $\pi)\, x-2=0$. *A medida da distância do ponto* $(1,1,0)$ *da recta* r_1 *ao plano* π *é* $d=|1-2|=1$.

Por ser $r_1 \left\{ \frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1} \right.$ *e* $r_2 \left\{ \frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0} \right.$ *tem-se* $\cos(r_1 \hat{,} r_2)=\frac{0}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}}=0$ *e* $r_1 \hat{,} r_2=\frac{\pi}{2}$. *A direcção da perpendicular comum é definida pelo vector* $u\wedge v$ *onde* $u=K$ *e* $v=J$, *logo* $u\wedge v=-I$ *e os parâmetros directores são* $(1,0,0)$.

Soluções dos n.os 1228 e 1229 de A. Sá da Costa.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

I. S. C. E. F. — 2.ª CADEIRA — **1.º exame de freqüência, 21-2-1942**

1230 — Mostrar que o produto infinito $\prod_{k=0}^{\infty}\left[1-\left(\frac{n}{(n-1)z}\right)^n\right]$ $(z=x+iy)$ é absolutamente convergente fora do círculo de raio 1 e de centro na origem. R: *O carácter do produto infinito é o da série de têrmo geral* $u_n(z)=\left(\frac{n}{(n-1)z}\right)^n$. *A aplicação do critério de Cauchy* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n-1)z}\right|=\frac{1}{|z|}$ *mostra que a série é absolutamente convergente para* $|z|>1$, *isto é, em tôda a região do plano d'Argand exterior ao circulo de centro na origem e de raio* 1.

1231 — Estudar a convergência do integral $\int_0^{\infty}(\log t)^m \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$. R: *O integral é impróprio de 2.ª espécie e sê-lo-á de 1.ª se* $m>0$. *Como integral de 2.ª espécie êle será convergente se a função integranda fôr um infinitésimo no ponto impróprio de ordem igual à do infinitésimo* $t^{-1}(\log t)^{\alpha}$ *onde* $\alpha<-1$. *Portanto, se* $m<-1$ *a função integranda pode escrever-se sob a forma* $\frac{\operatorname{sen} t}{t(\log t)^{-m}}$ *cujo numerador é uma função limitada e o integral converge nessa hipótese. Por ser* $m<-1$ *o integral não é impróprio de 1.ª espécie, como já se dissera. Com efeito tem-se* $\lim_{t\to 0}(\log t)^m\frac{\operatorname{sen} t}{t}=0$ *se* $m<-1$.

1232 — Calcular o integral

$$I=\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+2)^2(x^2+3)^2}dx.$$

R: *Tem-se* $I=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x+2)(x^2+3)}+D\log(x+2)+E\log(x^2+3)+F\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c$. *A aplicação do método de Fubini conduz a*

$$\begin{cases} D+2E=0 \\ A-2D-4F-\sqrt{3}\,F=0 \\ 2B+6D-14E-2\sqrt{3}\,F=0 \\ 3A-2B-3C+12D+12E+7\sqrt{3}\,F=3 \\ 12A-4C+9D+24E+6\sqrt{3}\,F=2 \\ 6B-3C+18D+12\sqrt{3}\,F=1. \end{cases}$$

1233 — Supondo convergente o integral $\int_0^{\infty}\frac{e^{-az}z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}}=f(a,s,x)$ em certos domínios paramétricos, procurar as suas derivadas parciais em ordem a x, s e a. R: $\frac{\partial f}{\partial a}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-az}z^s\,dz}{e^{2\pi ix-z}-1}$,

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-az}z^{s-1}\log z}{1-e^{2\pi ix-z}}dz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\int_0^{\infty}\frac{e^{2\pi ix-(a+1)z}z^{s-1}\,2\pi i}{(1-e^{2\pi ix-z})^2}dz.$$

I. S. T. — CÁLCULO — **1.º exame de freqüência, 1942**

1234 — Estudar a convergência do integral $I=\int_a^{\infty}(e^{\operatorname{sen} x})'\frac{\operatorname{sen} x}{x^k}dx$. R: *Se* $a>0$ *o integral é impróprio de 2.ª espécie, diverge se* $k\leq 1$ *e converge se* $k>1$ *porque, neste caso, tem-se* $I=\int_a^{\infty}\frac{e^{\operatorname{sen} x}.\cos x.\operatorname{sen} x}{x^k}dx$ *e o numerador da função integranda é limitado. Se* $a<0$, *tem-se*

$$I=\int_a^{b^2}(e^{\operatorname{sen} x})'\frac{\operatorname{sen} x}{x^k}dx+\int_{b^2}^{\infty}(e^{\operatorname{sen} x})'\frac{\operatorname{sen} x}{x^k}dx=I_1+I_2.$$

Onde I_1 *é um integral riemanniano se* $k>0$, *e é impróprio de 1.ª espécie de* $k<0$, *sendo convergente para* $k<1$ *e divergente para* $k\geq 1$. *E* I_2 *é impróprio de 2.ª espécie, sendo divergente para* $k\leq 1$ *e convergente para* $k>1$. *Logo, no caso* $a<0$ *o integral* I *é sempre divergente.*

1235 — Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, onde $f_1(x)=x$ e $f_n(x)=x^{1/(2n-1)}-x^{1/(2n-3)}$, averiguar se será legítimo integrá-la têrmo a têrmo em qualquer intervalo do eixo real. R: *Note-se que* $S_1(x)=x$, $S_2(x)=x^{1/3}$, $S_3(x)=x^{1/5}, \dots S_n(x)=x^{1/(2n-1)}$ *e que* $S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=1$ *qualquer que seja* x *finito. Tem-se, portanto,* $\lim_{x\to 0} S(x)=1$. *Mas,* $S(0)=0$ *porque para* $x=0$ *se anulam todos os termos da série. A função* $S(x)$ *tem uma descontinuïdade na origem e, por conseqüência, a série dada não é uniformemente convergente; todavia, pode ser legítimo integrá-la têrmo a têrmo. Calculemos* $\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b dx=b-a$

e o $\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b x^{1/(2n-1)}\,dx=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}\left(b^{2n/(2n-1)}-a^{2n/(2n-1)}\right)=b-a\,.$$

Logo, é legítimo integrar a série dada têrmo a têrmo, embora ela não seja uniformemente convergente.

1236 — Calcular a segunda derivada $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ da função $y(x)$ definida pela equação $\dfrac{\sqrt{2ky-y^2}}{k}=\operatorname{sen}\dfrac{x+\sqrt{2ky-y^2}}{k}$, no ponto (x,y).

1237 — Escrever o desenvolvimento de Taylor da função $f(x,y)=(x\,.\,y)^a+\operatorname{sen} xy$, $a>0$, na vizinhança do ponto $(1,2)$.

Soluções dos n.os 1230 a 1235 de A. Sá da Costa.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — **1.º exame de freqüência, 1942**

1238 — Dado o vector $u(P)$, função do ponto variável P, e a homografia α_u, função do vector u, tal que

$\alpha_u I=\operatorname{grad}(u|I)$, $\alpha_u J=\operatorname{grad}(u|J)$, $\alpha_u K=\operatorname{grad}(u|K)$. 1.º Achar o vector e o primeiro invariante da homografia α_u; 2.º ¿Quando é que α_u é uma dilatação e quando é que é axial?; 3.º Mostrar que $\operatorname{grad}(u|v)=\alpha_u v+\alpha_v u$; 4.º Comparar α_u com a homografia $\dfrac{du}{dP}$. Podem ser iguais?

1239 — Determinar, entre dois pontos A e B do plano xy, a curva plana que torna mínimo o integral $\displaystyle\int_{AB} y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$. (Supõe-se que o coeficiente angular da tangente varia contìnuamente, entre os extremos A e B da curva).

1240 — Resolver a equação

$f(x)=\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy$ sendo $f(x)=3x^2+4$ e $K(x,y)=2xy^2+3x^2y^3$. [$D(\lambda)$ e $\Delta(x,y:\lambda)$ são quadráticas em λ].

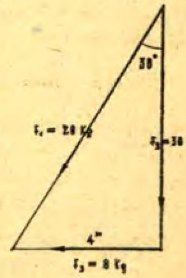
1241 — Supondo que a densidade é, em cada ponto, proporcional à soma das coordenadas cartesianas dêsse ponto, calcular o momento de inércia do rectângulo que tem por vértices os pontos $A(0,1)$, $B(4,1)$, $C(4,3)$, $D(0,3)$ em relação ao seu centro de gravidade, utitizando a fórmula $MI_g=\Sigma\Sigma\, m_i m_j r_{ij}^2$, devidamente modificada. (r_{ij} é a distância dos pontos m_i e m_j).

F. C. P. — MECÂNICA RACIONAL — **1.º exame de freqüência, Fevereiro, 1942**

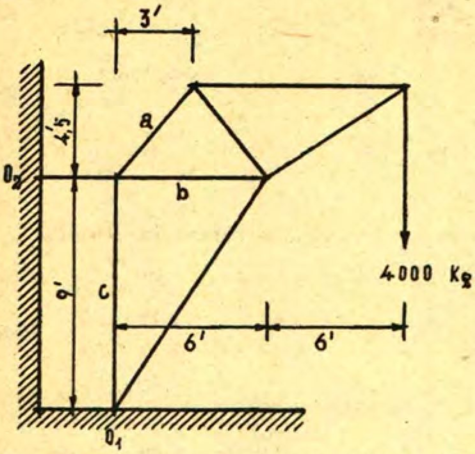
1242 — Verifique se o campo de vectores $W_p=(1-3z-y)\,.\,i+(x-2z)\,.\,j+(-1+2y+3x)\,.\,k$ é um campo de momentos e no caso afirmativo calcule o invariante escalar do campo.

1243 — Determine dois vectores, um dos quais localizado sôbre o eixo Ox, que constituam um sistema gerador do campo precedente no caso, subentende-se, de ser um campo de momentos.

1244 — Dadas as fôrças complanas F_1, F_2, F_3, indicadas na figura, localize no seu plano, usando das propriedades dos funiculares, uma quarta fôrça F_4 que torne o sistema equivalente a um binário B de momento dado (200 m.kg) (o sentido fica ao arbítrio do aluno).



1245 — Dado o sistema articulado representado na figura, calcular as tensões nas barras a, b e c

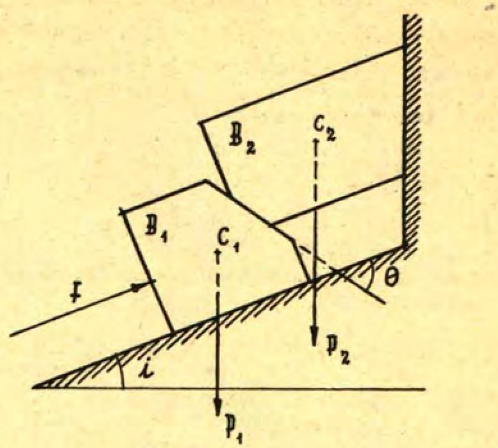


e indicar se são tensas ou comprimidas, (O_1, O_2 pontos fixos).

1246 — Dois blocos B_1 e B_2, de pesos p_1 e p_2, encontram-se em equilíbrio na posição indicada na figura, devido à acção da fôrça F paralela à linha de maior declive do plano que os suporta. Conhecidos p_1 e p_2, i e θ, calcular F pela aplicação do teorema do trabalho virtual, desprezando o atrito.

Dados numéricos:

$i=30^o$; $\theta=45^o$; $p_1=200$ kg.; $p_2=100$ kg).



1247 — Um ponto móvel P descreve a espiral de Arquimedes $r=4\theta/\pi$ (r expresso em decímetros e θ em radianos) de tal modo que a sua aceleração é central e dirigida para o polo da espiral. Sabendo que, para $\theta=\pi/2$, a velocidade de P é 20 cm/s e que o movimento se faz no sentido dos $\theta\theta$ decrescentes, calcular: *a)* a constante das áreas; *b)* a velocidade e a aceleração quando $\theta=20^o$.

PROBLEMAS

Secção a cargo de A. Ferreira de Macedo e Mário de Alenquer

PROBLEMAS PROPOSTOS

1248 — Determinar o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos que têm um lado dado e o vértice oposto sôbre uma recta dada.

1249 - Determinar a equação geral das superfícies S tais que, designando por $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ os pontos em que a normal num ponto M duma delas encontra respectivamente os planos YOZ, ZOX e XOY, a razão anarmónica $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, M)=k$.

Problemas n.^{os} 1248 e 1249 propostos por José Morgado (Pôrto).

1250 — Dado o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ substituí-lo por outro que tenha por limites dois números dados, A e B, por meio da substituïção $x=my+n$, sendo m e n dois números a determinar (Sturm).

Problema n.º 1250 proposto por Rui Verdial (Pôrto).

1251 — Dum barril cheio tira-se um litro de vinho, e substitui-se por água. Depois tira-se um litro da mistura e substitui-se por água. Efectuada esta operação 35 vezes, verifica-se que o barril contém quantidades iguais de água e vinho. Calcular a capacidade do barril.

1252 - Lugar do centro dum círculo que se desloca de tal forma que os seus eixos radicais com dois círculos fixos passam por dois pontos fixos.

1253 — Mostrar que o sistema é possível, e resolvê-lo

$$\begin{cases} (ad+be)\,x+(ae+bf)\,y+(af+bd)=0 \\ (bd+ce)\,x+(be+cf)\,y+(bf+cd)=0 \\ (cd+ae)\,x+(ce+af)\,y+(cf+ad)=0\,. \end{cases}$$

1254 — Prove que

$$\sum_{r=0}^{n-1} 2^r \operatorname{tg}(2^r x)=\operatorname{cotg} x-2^n \operatorname{cotg}(2^n x)\,.$$

Problemas n.^{os} 1251 a 1254 propostos por Mário de Alenquer.