MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1942)

Faculdade de Ciências — Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 4

1195 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação $\frac{3}{11}x+\frac{2}{7}y=29$. R: *Da equação proposta tira-se* $x=106-y+(7-y):21$ *e se fizermos* $y=7$ *vem* $x=99$. *As soluções inteiras serão dadas por* $x=99+22n$ *e* $y=7-21n$; *e as soluções inteiras e positivas obtêm-se substituindo nas fórmulas anteriores* n *por qualquer dos valores inteiros que verifiquem a seguinte dupla desigualdade* $-\frac{9}{2}<n<\frac{7}{21}$.

1196 — Determine os valores de x qve satisfazem a desigualdade $-x^2-11x+12>0$. R: $-12<x<1$ *visto* 1 *e* -12 *serem as raízes do trinómio, primeiro membro da desigualdade.*

1197 — As raízes de uma equação biquadrada são duas reais, do mesmo valor absoluto e de sinal contrário e as outras duas imaginárias puras conjugadas. De que natureza são as raízes da equação resolvente? Justifique a resposta. R: *As raízes da biquadrada são as raízes quadradas das raízes da resolvente; por isso as raízes da resolvente têm que ser, no caso pôsto, ambas reais e uma positiva e outra negativa.*

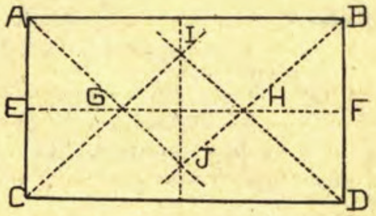
1198 — Verifique a identidade: $(\cos a-\cos b)^2+(\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} b)^2=4\operatorname{sen}^2 1/2(a-b)$. R: *Do 1.º membro da igualdade, depois de desenvolver os quadrados e simplificar, obtém-se* $2-2(\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b)=2[1-\cos(a-b)]$. *Por outro lado, se notarmos que* $\cos^2\frac{1}{2}A-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A=\cos A$ *e que, por isso, é* $1-2\operatorname{sen}^2 A/2=\cos A$ *ou* $2\operatorname{sen}^2 A/2=1-\cos A$, *o segundo membro torna-se em* $2[2\operatorname{sen}^2(a-b)/2]=2[1-\cos(a-b)]$, *o que verifica a identidade.*

1199 — Sendo $\operatorname{sen} a=4/5$, calcule $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$ e $\operatorname{tg} 2a$. R: *Como* $\operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen} a\cos a=\pm 2\operatorname{sen} a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$, *tem-se* $\operatorname{sen} 2a=\pm 2\cdot 4/5\cdot\sqrt{1-16/25}=\pm 24/25$; $\cos 2a=1-2\operatorname{sen}^2 a=1-2\cdot 16/25=-7/25$ *e* $\operatorname{tg} 2a=\pm\frac{24}{7}$.

1200 — Determine recorrendo ao cálculo logarítmico a expressão geral dos ângulos cujo coseno é $-0{,}3145$. R: $\log\cos\alpha=\log 0{,}3145=\bar{1}{,}49762$, *e* $\alpha=71^\circ 41' 9''$. *Como o coseno dado é negativo e como* $-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$ *um dos ângulos que satisfazem ao problema é* $108^\circ 18' 51''$ *e a expressão geral dos arcos cujo coseno é* $-0{,}3145$ *será dada por* $\alpha=n\cdot 360^\circ\pm 108^\circ 18' 51''$, *onde* n *é um inteiro qualquer.*

1201 — Reduza à dízima as fracções 3/5, 2/7 e 3/14. Classifique as dízimas obtidas. R: $3/5=0{,}6$; $2/7=0,(285714)$ *e* $3/14=0{,}2(142857)$ *e portanto a primeira é uma dízima exacta; a segunda periódica simples e a terceira periódica mixta.*

1202 — Traçam-se as bissectrizes dos quatro ângulos de um rectângulo. Demonstre que: 1.º, essas bissectrizes formam um quadrado; 2.º, as diagonais do quadrado são paralelas aos lados do rectângulo; 3.º, o comprimento comum dessas diagonais é a diferença dos comprimentos dos lados do rectângulo. R: *Seja* ABCD *o rectângulo e* AJ, CG, BH *e* DI *as bissectrizes que se encontram nos pontos* G, I, H, J. *Os triângulos* AGC *e* BHD *são rectângulos isósceles por os ângulos em* $\hat{A}$, $\hat{C}$, $\hat{B}$ *e* $\hat{D}$ *medirem cada um* 45º, *e como aquêles dois triângulos têm as hipotenusas iguais terão os catetos iguais e será* AG=CG=BH=HD. *Por outro lado os triângulos* CID *e* AJB *são também rectângulos isósceles e daí resulta* BJ=AJ=CI=DI *e portanto* GI=IH=HJ=JG *donde se conclue que o quadrilátero* GIHJ *é um quadrado, visto os ângulos em* G, J, I *e* H *serem rectos e os lados iguais.* 2.º *As diagonais* IJ *e* GH, *como formam ângulos de* 45º *com as bissectrizes* CI, AJ, BJ *e* DI *são paralelas aos lados do rectângulo.* 3.º FH=BF=EG=EA=1/2 AC *logo* EF−GH=HF+GE=AC *donde* GH=EF−AC=AB−AC c. q. d.



Soluções dos n.os 1195 a 1202 de J. Silva Paulo.

Instituto Superior de Agronomia

Ponto n.º 2

1203 — Um agricultor dispendeu a quantia de 155 esc. diários para pagar o trabalho das suas vindimas a um grupo de homens e mulheres. Cada homem recebeu 13$ diários e cada mulher 7$. Quantos eram os homens e quantas as mulheres. R: *Sejam* x *e* y *respectivamente o número de homens e mulheres. Ter-se-á* $13x+7y=155$, *equação que admite a única solução inteira e positiva* $x=6$ esc. $y=11$ esc.

1204 — Que valores se deverão atribuir ao coeficiente m da equação $x^2+mx+8=0$ para que uma das raízes seja dupla da outra? R: *Sejam* x_1 *e* $2x_1$ *as raízes da equação. Ter-se-á* $3x_1=-m$ *e* $2x_1^2=8$ *ou seja* $m=\pm 6$.

1205 — Dada a função $y=\log_2 x$ faça o estudo da sua variação quando x percorre o intervalo $(0, +\infty)$. Diga quais as propriedades mais importantes desta função e faça a sua representação gráfica referente ao intervalo $(0, 16)$ da variável independente.

1206 — Numa circunferência de raio r traçou-se uma corda de 127,68 metros, que subtende um arco cuja amplitude é igual a $50^\circ\, 32'\, 15''$. Calcule o comprimento do raio, expresso em centímetros. Utilize logaritmos. R: *Será* $r=\dfrac{6384}{\operatorname{sen} 25^\circ\, 16'\, 7'',5}$ *e, por isso,* $\log r=3{,}80509+0{,}36971=4{,}17480$ *donde* $r=14956$ cm.

1207 — Supondo que α é o ângulo do 2.º quadrante que satisfaz a igualdade $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{2}$ calcule $\operatorname{cosec}\alpha$. R $\operatorname{cosec}\alpha=+\sqrt{3/2}$.

1208 — Quais são os ângulos compreendidos entre 4π e 6π radianos e cuja tangente é $-1{,}351$. Utilize tábuas naturais. R: *São os ângulos* $\alpha=5\pi-0{,}933$ *radianos e* $\alpha=6\pi-0{,}933$ *radianos.*

1209 — Demonstre que se num triângulo rectângulo um dos ângulos agudos é duplo do outro, um dos catetos é metade da hipotenusa. R: *Seja* [ABC] *o triângulo rectângulo e* $\hat{A}=2\hat{C}$. *Tracemos a circunferência circunscrita ao triângulo. É óbvio que* $\overline{AC}$ *é diâmetro da circunferência. Por outro lado fàcilmente se deduz ser* $\hat{A}=60^\circ$ *e* $\hat{C}=30^\circ$ *o que prova ser* $\overline{AB}$ *o lado do hexágono inscrito e portanto igual ao raio, metade do diâmetro que é a hipotenusa.*

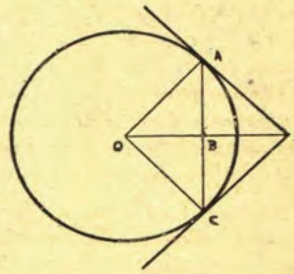
1210 — Uma esfera de área igual a $4\pi\,\text{cm}^2$ é circunscrita a um cubo. Calcule a área do cubo. R: *Como a esfera é circunscrita ao cubo, o seu diâmetro é diagonal do cubo. Ora o lado do cubo* l *está relacionado com a diagonal* d *pela relação* $d^2=3l^2$ *donde* $l^2=4/3\,\text{cm}^2$ *e portanto a área* $A=6l^2=8\,\text{cm}^2$.

Soluções dos 1205 a 1210 de J. Calado.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, 13-10-1942

1211 — *a)* Defina superfície cónica e superfície cilíndrica, cone e cilindro; dê algumas propriedades importantes referentes a áreas e volumes de cones e cilindros. *b)* É dada uma esfera de raio r e um ponto P exterior, à distância $2r/\sqrt{3}$ do centro; de P tira-se a superfície cónica tangente à esfera e considera-se o cone que tem P como vértice e cuja base é limitada pelo círculo de tangência. Exprima o volume dêsse cone em função do volume V da esfera. R: *De* OAP ~ OAB →

$$\rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \quad ou \quad \overline{OB}=r\sqrt{3}/2.$$



Do triângulo rectângulo OAB *vem* $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=$ $=r^2-\dfrac{3r^2}{4}=\dfrac{r^2}{4}$. *Representando por* V *o volume da esfera e por* V' *o do cone, tem-se*

$$V'=\frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2\cdot\overline{BP}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2(\overline{OP}-\overline{OB})=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{4}\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}-\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi r^3}{24\sqrt{3}}=\frac{1}{32\sqrt{3}}V.$$

1212 — Dada a equação $x^2+px+q=0$, de raízes α e β, determine a equação do 2.º grau que tem como raízes $\alpha_1=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$, $\beta_1=\beta+\dfrac{1}{\beta}$. R: *Sabe-se que* $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$. *Tem-se*

$$\alpha_1+\beta_1=\alpha+\frac{1}{\alpha}+\beta+\frac{1}{\beta}=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\left(p+\frac{p}{q}\right),$$

$$\alpha_1\cdot\beta_1=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+$$

$$+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-2=q+\frac{1}{q}+\frac{p^2}{q}-2.$$

A equação pedida é

$$x^2+\left(p+\frac{p}{q}\right)x+q+\frac{1}{q}+\frac{p^2}{q}-2=0.$$

1213 — Calcule o valor numérico da expressão

$$\left(\sqrt{1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \text{ para } x=0{,}04712.$$

R: *A expressão dada é igual a*

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x}.$$

Para $x=0{,}04712$ *vem* $\sqrt{0{,}95288}=N$

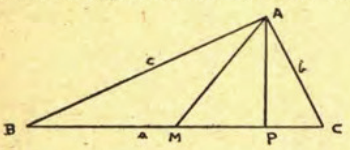
$$\log N=\frac{1}{2}\log 0{,}95288=\frac{1}{2}\cdot\bar{1}{,}97904=\bar{1}{,}98952$$

$N=0{,}97616$.

1214 — *a)* Defina polígono regular e dê as propriedades que conhece referentes à medida dos seus ângulos. ¿ Que polígonos regulares convexos podem figurar como faces dum poliedro regular convexo? Porquê? *b)* Calcule o raio de um círculo conhecendo a diferença D entre a área dêsse círculo e a do hexágono regular inscrito. R: b) *A área do circulo é* $S=\pi r^2$ *e a área do hexágono* $S_6=\frac{3\sqrt{3}\,r^2}{2}$.

Logo $D=\pi r^2-3\sqrt{3}\,r^2/2=r^2(\pi-3\sqrt{3}/2)$ *donde* $r^2=\frac{2D}{2\pi-3\sqrt{3}}$.

1215 — Dado um triângulo rectângulo de catetos b e c e hipotenusa a, resolva o triângulo determinado pela altura e pela mediana correspondente à hipotenusa. R: $\overline{AM}=a/2$. *Dos triângulos semelhantes* ABC ~ APC *resulta* $\overline{AP}=bc/a$. *Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo* APM *vem, por fim,* $\overline{PM}^2=\overline{AM}^2-\overline{AP}^2=a^2/4-b^2c^2/a^2$.



1216 — ¿ Quantos números inteiros há de quatro algarismos que sejam divisíveis por todos os números dígitos? R: *O m. m. c. de todos os números digitos é* $N=2^3\times3^2\times5\times7=2.520$. *Logo há três números que satisfazem ao enunciado:* 2.520, 5.040 *e* 7560.

Soluções dos n.os 1211 a 1216 de A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico

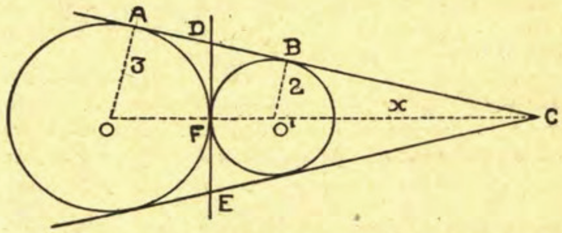
Ponto n. 2

1217 — Uma liga de ouro e cobre contém 20 % de cobre. Juntando-lhe 500 gramas de ouro, a percentagem do metal nobre passa a ser de 85 por cento. Calcular a quantidade de ouro existente naquela liga e o pêso da mesma liga. R: *Se forem* x *e* y *os pesos de cobre e ouro existentes na liga, as equações que resolvem o problema são* $x=\frac{20}{100}(x+y)$ *e* $x=\frac{15}{100}(x+y+500)$, *donde o pêso de ouro* $y=1200$ gr *e o pêso da liga* $x+y=1500$ gr.

1218 — Determinar os valores inteiros e positivos de a e b para os quais a função de x definida pela equação $\frac{x-a+1}{x^2+x-1}=\frac{y+b-1}{y^2-y+1}$ se anula para $x=2$. R: *Será então* $\frac{2-a+1}{4+2-1}=\frac{b-1}{1}$ *donde* $5b+a=8$ *cujas soluções em números inteiros são dadas por* $b=1+m$ *e* $a=3-5m$; *donde a única solução inteira e positiva* $b=1$, $a=3$.

1219 — Sendo $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$ as raízes da equação $(x-1)(k^2x+1)=2k$, exprimir $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ em função de k e determinar k para que α e β sejam complementares. R: *A soma das raizes da equação é* $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{k^2-1}{k^2}$ *e o produto* $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{-(2k+1)}{k^2}$; *logo será* $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{(k^2-1):k^2}{1+\frac{2k+1}{k^2}}=\frac{k-1}{k+1}$ *e se* α *e* β *forem complementares será* $k=-1$.

1220 — Dadas duas circunferências de raios 2 e 3 centímetros, tangentes exteriormente, determinar a área do triângulo formado pelas tangentes comuns às mesmas circunferências. R: *O triângulo pedido é o triângulo* CDE. *Dos triângulos semelhantes* AOC *e* BO'C *tira-se* $\frac{3}{2}=\frac{5+x}{x}$ *ou seja*



$x=10$; *e dos triângulos semelhantes* DFC *e* BO'C *tira-se* $\frac{x+2}{DF}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$ *logo* $DF=\sqrt{6}$. *Finalmente a área pedida é* $12\sqrt{6}$ cm².

1221 — Dado um rectângulo de lados a e b, tirar, pelo meio do lado a, uma recta que divida o rectângulo em duas partes cujas áreas estejam na razão $m:n$. R: *Seja* x *um dos segmentos que a recta que passa pelo meio do lado* a *determina no lado oposto. As áreas dos trapézios formados são dadas pelas expressões:* $\frac{\frac{a}{2}+x}{2}\times b$ *e* $\frac{\frac{a}{2}+(a-x)}{2}\times b$ *donde* $\frac{a+2x}{3a-2x}=\frac{m}{n}$ *e finalmente* $x=\frac{a(3m-n)}{2(n+m)}$.

1222 — Um cone de revolução e uma esfera estão assentes sôbre um plano horizontal. Sabendo que o raio da esfera é igual a 8 centímetros e que, no cone, a altura e o diâmetro da base são iguais ao diâmetro da esfera, determinar a distância daquele plano a que se lhe deve tirar um plano paralelo para que sejam iguais as secções determinadas por êste plano no cone e na esfera. R: *Seja* x *o raio das secções e* y *a distância do plano horizontal ao plano secante. Será* $x^2 = y(16-y)$ *(na esfera) e* $\frac{x}{8}=\frac{16-y}{16}$ *(no cone), donde se obtêm* $y=16-2x=16-\frac{64}{5}=\frac{16}{5}$ cm.

Soluções dos n.os 1217 a 1222 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **1.º exame de freqüência, 1941-1942**

1223 — Efectuando duas transformações sucessivas escreva a equação cujas raízes estão relacionadas com as da equação $2x^6-x^5+4x^2-3=0$ pela expressão $y=3+\frac{1}{x}$. R: *Efectuar primeiro a transformada em* $z=\frac{1}{x}$ *e em seguida aumentar de* 3 *unidades as raízes desta transformada. Vem* $3y^6-54y^5+401y^4-1572y^3+3429y^2-3941y+1858=0$.

Solução do n.º 1223 de J. Pais Morais.

1224 — Determine as condições a que devem satisfazer os números reais a, b, c, para que os afixos dos imaginários $\frac{a+i\sqrt{3}}{a-i\sqrt{3}}$ $\frac{b+i\sqrt{3}}{b-i\sqrt{3}}$ $\frac{c+i\sqrt{3}}{c-i\sqrt{3}}$ sejam os vértices dum triângulo eqüilátero. Sendo $a=0$ calcule os valores de b e c. R: *Note-se que os três complexos têm módulos iguais a* 1 *e que os seus afixos serão vértices dum triângulo eqüilátero se os seus argumentos forem* $\alpha,\ \alpha+\frac{2\pi}{3},\ \alpha+\frac{4\pi}{3}$. *Da introdução desta condição resultam as duas condições* $b-a=ab+3$ *e* $c-b=bc+3$.

Solução do n.º 1224 de A. Sá da Costa.

1225 — Calcule, usando a fórmula de Leibnitz, a derivada de 3.ª ordem da função $y=\operatorname{sen}\sqrt{x}\,.\sqrt{x}$.

1226—Exprima em função de p real os números reais x e y de modo que $(3-4i)(x+yi)=p$ e X e Y reais em função de q real de modo que $\frac{3-4i}{X+Yi}=q$. Indique que condições devem dar-se para que seja $p=q$. Será possível determinar p e q de modo que haja um número $(a+bi)$ que satisfaça simultâneamente às duas condições?

R: $\begin{cases} x=3p/25 \\ y=4p/25 \end{cases}$ $\begin{cases} X=3/q \\ Y=-4/q \end{cases}$ $\begin{cases} X_x=8/25 \\ Y_y=-16/25 \end{cases}$.

Não existe o complexo $a+bi$ *a que se refere o enunciado. A sua existência implicaria a verificação simultânea de* $pq=+25$ *e* $pq=-25$.

1227 —Deduza a condição que deve verificar-se para que o segundo e terceiro termos da equação $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ se possam anular por meio da mesma transformação. R: *A transformação a que se refere o enunciado só existe se fôr verificada uma das três condições* $a_1=0$, $a_2=0$ *(com* $n\neq 0$*)*.

Soluções dos n.os 1226 e 1227 de J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — 1.ª CADEIRA — **1.º exame de freqüência, 27-2-42**

1228 — Calcular o produto das determinações de $i^{1/n}$. Discussão. R: $i^{1/n}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{1/n}=$

$$=\left(\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi/2+2k\pi}{n}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$[k=0,1,2\cdots(n-1)]$.

O produto será

$$P=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)^n\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)[\cos(n-1)\pi+i\operatorname{sen}(n-1)\pi]=$$

$=\pm i$ *conforme fôr* n *impar ou par.*

1229 — Dadas as duas rectas $r_1\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $r_2\begin{cases} 2x-z-2=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ achar a sua distância, o seu ângulo e a direcção da perpendicular comum. R: 1.ª) *Como imediatamente se reconhece, a recta* r_1 *é perpendicular ao plano* Oxy, *encontrando êste no ponto* (1, 1, 0), *e a recta* r_2 *é perpendicular ao plano* Oxz, *no ponto* (2, 0, 2). *Por conseqüência, as rectas são ortogonais e o seu ângulo mede* 90º. *Em virtude do exposto a distância das duas rectas é a diferença das abscissas dos seus traços nos planos* Oxy *e* Oxz, *isto é,* $d=1$. *Por serem* r_1 *e* r_2 *perpendiculares, respectivamente, a* Oxy *e* Oxz, *elas são paralelas a* Oyz *e a direcção da perpendicular comum é a do eixo* Ox, *cujos parâmetros são* (1, 0, 0). 2.ª) *A distância de* r_1 *a* r_2 *é igual à distância dum ponto arbitrário de* r_1 *ao plano* π *que contêm* r_2 *e é paralelo a* r_1. *A equação geral*