são iguais ao diâmetro da esfera, determinar a distância daquele plano a que se lhe deve tirar um plano paralelo para que sejam iguais as secções determinadas por êste plano no cone e na esfera. R: *Seja* x *o raio das secções e* y *a distância do plano horizontal ao plano secante. Será* $x^2 = y(16-y)$ *(na esfera) e* $\frac{x}{8} = \frac{16-y}{16}$ *(no cone), donde se obtêm* $y = 16 - 2x = 16 - \frac{64}{5} = \frac{16}{5}$ cm.

Soluções dos n.os 1217 a 1222 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — 1.º exame de freqüência, 1941-1942

1223 — Efectuando duas transformações sucessivas escreva a equação cujas raízes estão relacionadas com as da equação $2x^6 - x^5 + 4x^2 - 3 = 0$ pela expressão $y = 3 + \frac{1}{x}$. R: *Efectuar primeiro a transformada em* $z = \frac{1}{x}$ *e em seguida aumentar de* 3 *unidades as raízes desta transformada. Vem* $3y^6 - 54y^5 + 401y^4 - 1572y^3 + 3429y^2 - 3941y + 1858 = 0$.

Solução do n.º 1223 de J. Pais Morais.

1224 — Determine as condições a que devem satisfazer os números reais a, b, c, para que os afixos dos imaginários $\frac{a+i\sqrt{3}}{a-i\sqrt{3}}$ $\frac{b+i\sqrt{3}}{b-i\sqrt{3}}$ $\frac{c+i\sqrt{3}}{c-i\sqrt{3}}$ sejam os vértices dum triângulo eqüilátero. Sendo $a=0$ calcule os valores de b e c. R: *Note-se que os três complexos têm módulos iguais a* 1 *e que os seus afixos serão vértices dum triângulo eqüilátero se os seus argumentos forem* $\alpha,\ \alpha + \frac{2\pi}{3},\ \alpha + \frac{4\pi}{3}$. *Da introdução desta condição resultam as duas condições* $b - a = ab + 3$ *e* $c - b = bc + 3$.

Solução do n.º 1224 de A. Sá da Costa.

1225 — Calcule, usando a fórmula de Leibnitz, a derivada de 3.ª ordem da função $y = \operatorname{sen}\sqrt{x} . \sqrt{x}$.

1226 — Exprima em função de p real os números reais x e y de modo que $(3-4i)(x+yi) = p$ e X e Y reais em função de q real de modo que $\frac{3-4i}{X+Yi} = q$. Indique que condições devem dar-se para que seja $p=q$. Será possível determinar p e q de modo que haja um número $(a+bi)$ que satisfaça simultâneamente às duas condições?

R: $\begin{cases} x = 3p/25 \\ y = 4p/25 \end{cases}$ $\begin{cases} X = 3/q \\ Y = -4/q \end{cases}$ $\begin{cases} X_x = 8/25 \\ Y_y = -16/25 \end{cases}$. *Não existe o complexo* $a+bi$ *a que se refere o enunciado. A sua existência implicaria a verificação simultânea de* $pq = +25$ *e* $pq = -25$.

1227 — Deduza a condição que deve verificar-se para que o segundo e terceiro termos da equação $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ se possam anular por meio da mesma transformação. R: *A transformação a que se refere o enunciado só existe se fôr verificada uma das três condições* $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ *(com* $n \neq 0$*)*.

Soluções dos n.os 1226 e 1227 de J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — 1.ª CADEIRA — 1.º exame de freqüência, 27-2-42

1228 — Calcular o produto das determinações de $i^{1/n}$. Discussão. R: $i^{1/n} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{1/n} =$

$$= \left(\cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\pi/2+2k\pi}{n}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2n} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$[k = 0, 1, 2 \cdots (n-1)].$$

O produto será

$$P = \left(\cos\frac{\pi}{2n} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)[\cos(n-1)\pi + i\operatorname{sen}(n-1)\pi] =$$

$= \pm i$ *conforme fôr* n *impar ou par.*

1229 — Dadas as duas rectas $r_1 \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ $r_2 \begin{cases} 2x-z-2=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ achar a sua distância, o seu ângulo e a direcção da perpendicular comum. R: 1.ª) *Como imediatamente se reconhece, a recta* r_1 *é perpendicular ao plano* Oxy, *encontrando êste no ponto* (1, 1, 0), *e a recta* r_2 *é perpendicular ao plano* Oxz, *no ponto* (2, 0, 2). *Por conseqüência, as rectas são ortogonais e o seu ângulo mede* 90°. *Em virtude do exposto a distância das duas rectas é a diferença das abscissas dos seus traços nos planos* Oxy *e* Oxz, *isto é,* d = 1. *Por serem* r_1 *e* r_2 *perpendiculares, respectivamente, a* Oxy *e* Oxz, *elas são paralelas a* Oyz *e a direcção da perpendicular comum é a do eixo* Ox, *cujos parâmetros são* (1, 0, 0). 2.ª) *A distância de* r_1 *a* r_2 *é igual à distância dum ponto arbitrário de* r_1 *ao plano* π *que contêm* r_2 *e é paralelo a* r_1. *A equação geral* *dos planos que contêm* r_2 *é* $2x-z-2+\lambda(x-z)=0$, *ou*, $(2+\lambda)x-(1+\lambda)z-2=0$. *A equação de* π *obtém-se desta escolhendo* λ *de modo tal que a direcção normal a* π *seja perpendicular à recta* $r_1 \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} \frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}\end{cases}$. *Isto é* $1+\lambda=0$, *donde* $\lambda=-1$ *e* $\pi)\,x-2=0$. *A medida da distância do ponto* $(1,1,0)$ *da recta* r_1 *ao plano* π *é* $d=|1-2|=1$.

Por ser $r_1 \begin{cases}\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}\end{cases}$ *e* $r_2 \begin{cases}\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}\end{cases}$ *tem-se* $\cos(r_1 \hat{,} r_2)=\frac{0}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}}=0$ *e* $r_1 \hat{,} r_2=\frac{\pi}{2}$.

A direcção da perpendicular comum é definida pelo vector $u \wedge v$ *onde* $u=K$ *e* $v=J$, *logo* $u\wedge v=-I$ *e os parâmetros directores são* $(1,0,0)$.

Soluções dos n.os 1228 e 1229 de A. Sá da Costa.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

I. S. C. E. F. — 2.ª CADEIRA — **1.º exame de freqüência, 21-2-1942**

1230 — Mostrar que o produto infinito $\prod_{k=0}^{\infty}\left[1-\left(\frac{n}{(n-1)z}\right)^n\right]$ $(z=x+iy)$ é absolutamente convergente fora do círculo de raio 1 e de centro na origem. R: *O carácter do produto infinito é o da série de têrmo geral* $u_n(z)=\left(\frac{n}{(n-1)z}\right)^n$. *A aplicação do critério de Cauchy* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n-1)z}\right|=\frac{1}{|z|}$ *mostra que a série é absolutamente convergente para* $|z|>1$, *isto é, em tôda a região do plano d'Argand exterior ao círculo de centro na origem e de raio* 1.

1231 — Estudar a convergência do integral $\int_0^{\infty}(\log t)^m\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$. R: *O integral é impróprio de 2.ª espécie e sê-lo-á de 1.ª se* $m>0$. *Como integral de 2.ª espécie êle será convergente se a função integranda fôr um infinitésimo no ponto impróprio de ordem igual à do iufinitésimo* $t^{-1}(\log t)^{\alpha}$ *onde* $\alpha<-1$. *Portanto, se* $m<-1$ *a função integranda pode escrever-se sob a forma* $\frac{\operatorname{sen} t}{t(\log t)^{-m}}$ *cujo numerador é uma função limitada e o integral converge nessa hipótese. Por ser* $m<-1$ *o integral não é impróprio de* 1.ª *espécie, como já se dissera. Com efeito tem-se* $\lim_{t\to 0}(\log t)^m\frac{\operatorname{sen} t}{t}=0$ *se* $m<-1$.

1232 — Calcular o integral

$$I=\int\frac{3x^2+2x+1}{(x+2)^2\,(x^2+3)^2}dx.$$

R: *Tem-se* $I=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x+2)\,(x^2+3)}+D\log(x+2)+E\log(x^2+3)+F\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c$. *A aplicação do método de Fubini conduz a*

$$\begin{cases} D+2E=0 \\ A-2D-4F-\sqrt{3}\,F=0 \\ 2B+6D-14E-2\sqrt{3}\,F=0 \\ 3A-2B-3C+12D+12E+7\sqrt{3}\,F=3 \\ 12A-4C+9D+24E+6\sqrt{3}\,F=2 \\ 6B-3C+18D+12\sqrt{3}\,F=1. \end{cases}$$

1233 — Supondo convergente o integral $\int_0^{\infty}\frac{e^{-az}\,z^{s-1}\,dz}{1-e^{2\pi ix-z}}=f(a,s,x)$ em certos domínios paramétricos, procurar as suas derivadas parciais em ordem a x, s e a. R: $\frac{\partial f}{\partial a}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-az}\,z^s\,dz}{e^{2\pi ix-z}-1}$,

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-az}\,z^{s-1}\log z}{1-e^{2\pi ix-z}}\,dz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\int_0^{\infty}\frac{e^{2\pi ix-(a+1)z}\,z^{s-1}\,2\pi i}{(1-e^{2\pi ix-z})^2}\,dz.$$

I. S. T. — CÁLCULO — **1.º exame de freqüência, 1942**

1234 — Estudar a convergência do integral $I=\int_a^{\infty}(e^{\operatorname{sen} x})'\frac{\operatorname{sen} x}{x^k}\,dx$. R: *Se* $a>0$ *o integral é impróprio de 2.ª espécie, diverge se* $k\leq 1$ *e converge se* $k>1$ *porque, neste caso, tem-se* $I=\int_a^{\infty}\frac{e^{\operatorname{sen} x}\,.\,\cos x\,.\,\operatorname{sen} x}{x^k}\,dx$ *e o numerador da função integranda é limitado. Se* $a<0$, *tem-se*

$$I=\int_a^{b^2}(e^{\operatorname{sen} x})'\frac{\operatorname{sen} x}{x^k}\,dx+\int_{b^2}^{\infty}(e^{\operatorname{sen} x})'\frac{\operatorname{sen} x}{x^k}\,dx=I_1+I_2.$$

Onde I_1 *é um integral riemanniano se* $k>0$, *e é impróprio de* 1.ª *espécie de* $k<0$, *sendo convergente para* $k<1$ *e divergente para* $k\geq 1$. *E* I_2 *é impróprio de* 2.ª *espécie, sendo divergente para* $k\leq 1$ *e convergente para* $k>1$. *Logo, no caso* $a<0$ *o integral* I *é sempre divergente.*

1235 — Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, onde $f_1(x)=x$ e $f_n(x)=x^{1/(2n-1)}-x^{1/(2n-3)}$, averiguar se será legítimo integrá-la têrmo a têrmo em qualquer intervalo do eixo real. R: *Note-se que* $S_1(x)=x$, $S_2(x)=x^{1/3}$, $S_3(x)=x^{1/5}, \ldots S_n(x)=x^{1/(2n-1)}$ *e que* $S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=1$ *qualquer que seja* x *finito. Tem-se, portanto,* $\lim_{x\to 0} S(x)=1$. *Mas,* $S(0)=0$ *porque para* $x=0$ *se anulam todos os termos da série. A função* S (x) *tem uma descontinuïdade na origem e, por conseqüência, a série dada não é uniformemente convergente ; todavia, pode ser legítimo integrá-la têrmo a têrmo. Calculemos* $\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b dx=b-a$ *e o*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b x^{1/(2n-1)}\,dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}\left(b^{2n/(2n-1)}-a^{2n/(2n-1)}\right)=b-a\,.$$

Logo, é legítimo integrar a série dada têrmo a têrmo, embora ela não seja uniformemente convergente.

1236 — Calcular a segunda derivada $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ da função $y(x)$ definida pela equação $\dfrac{\sqrt{2ky-y^2}}{k}=\operatorname{sen}\dfrac{x+\sqrt{2ky-y^2}}{k}$, no ponto (x,y).

1237 — Escrever o desenvolvimento de Taylor da função $f(x,y)=(x\,.\,y)^a+\operatorname{sen} xy$, $a>0$, na vizinhança do ponto $(1,2)$.

Soluções dos n.os 1230 a 1235 de A. Sá da Costa.

MECÂNICA RACIONAL—FÍSICA MATEMÁTICA

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — **I.º exame de freqüência, 1942**

1238 — Dado o vector $u(P)$, função do ponto variável P, e a homografia α_u, função do vector u, tal que

$\alpha_u I=\operatorname{grad}(u|I)$, $\alpha_u J=\operatorname{grad}(u|J)$, $\alpha_u K=\operatorname{grad}(u|K)$. 1.º Achar o vector e o primeiro invariante da homografia α_u; 2.º ¿Quando é que α_u é uma dilatação e quando é que é axial?; 3.º Mostrar que $\operatorname{grad}(u|v)=\alpha_u v+\alpha_v u$; 4.º Comparar α_u com a homografia $\dfrac{du}{dP}$. Podem ser iguais?

1239 — Determinar, entre dois pontos A e B do plano xy, a curva plana que torna mínimo o integral $\int_{\widehat{AB}} y\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^3 ds$. (Supõe-se que o coeficiente angular da tangente varia contìnuamente, entre os extremos A e B da curva).

1240 — Resolver a equação

$f(x)=\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy$ sendo $f(x)=3x^2+4$ e $K(x,y)=2xy^2+3x^2y^3$. [$D(\lambda)$ e $\Delta(x,y:\lambda)$ são quadráticas em λ].

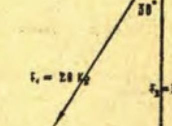
1241 — Supondo que a densidade é, em cada ponto, proporcional à soma das coordenadas cartesianas dêsse ponto, calcular o momento de inércia do rectângulo que tem por vértices os pontos $A(0,1)$, $B(4,1)$, $C(4,3)$, $D(0,3)$ em relação ao seu centro de gravidade, utitizando a fórmula $MI_g=\Sigma\Sigma\, m_i\, m_j\, r_{ij}^2$, devidamente modificada. (r_{ij} é a distância dos pontos m_i e m_j).

F. C. P. — MECÂNICA RACIONAL — **I.º exame de freqüência, Fevereiro, 1942**

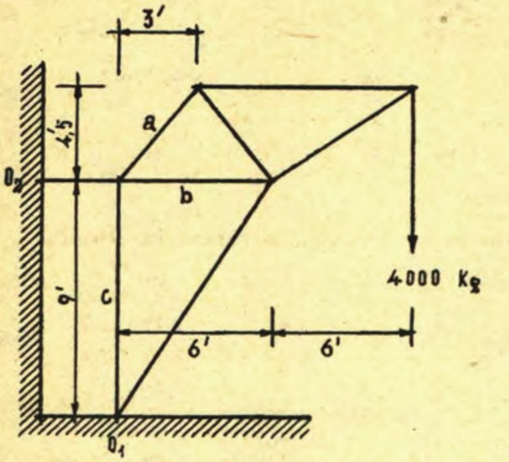
1242 — Verifique se o campo de vectores $W_p=(1-3z-y)\,.\,i+(x-2z)\,.\,j+(-1+2y+3x)\,.\,k$ é um campo de momentos e no caso afirmativo calcule o invariante escalar do campo.

1243 — Determine dois vectores, um dos quais localizado sôbre o eixo Ox, que constituam um sistema gerador do campo precedente no caso, subentende-se, de ser um campo de momentos.

1244 — Dadas as fôrças complanas F_1, F_2, F_3, indicadas na figura, localize no seu plano, usando das propriedades dos funiculares, uma quarta fôrça F_4 que torne o sistema equivalente a um binário B de momento dado (200 m.kg) (o sentido fica ao arbítrio do aluno).



1245 — Dado o sistema articulado representado na figura, calcular as tensões nas barras a, b e c

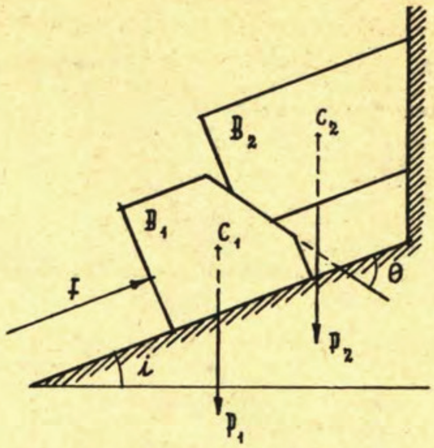


e indicar se são tensas ou comprimidas, (O_1, O_2 pontos fixos).

1246 — Dois blocos B_1 e B_2, de pesos p_1 e p_2, encontram-se em equilíbrio na posição indicada na figura, devido à acção da fôrça F paralela à linha de maior declive do plano que os suporta. Conhecidos p_1 e p_2, i e θ, calcular F pela aplicação do teorema do trabalho virtual, desprezando o atrito.

Dados numéricos:

$i=30°$; $\theta=45°$; $p_1=200$ kg.; $p_2=100$ kg).



1247 — Um ponto móvel P descreve a espiral de Arquimedes $r=4\theta/\pi$ (r expresso em decímetros e θ em radianos) de tal modo que a sua aceleração é central e dirigida para o polo da espiral. Sabendo que, para $\theta=\pi/2$, a velocidade de P é 20 cm/s e que o movimento se faz no sentido dos $\theta\theta$ decrescentes, calcular: *a)* a constante das áreas; *b)* a velocidade e a aceleração quando $\theta=20°$.

PROBLEMAS

Secção a cargo de A. Ferreira de Macedo e Mário de Alenquer

PROBLEMAS PROPOSTOS

1248 — Determinar o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos que têm um lado dado e o vértice oposto sôbre uma recta dada.

1249 - Determinar a equação geral das superfícies S tais que, designando por $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ os pontos em que a normal num ponto M duma delas encontra respectivamente os planos YOZ, ZOX e XOY, a razão anarmónica $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, M)=k$.

Problemas n.os 1248 e 1249 propostos por José Morgado (Pôrto).

1250 — Dado o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ substituí-lo por outro que tenha por limites dois números dados, A e B, por meio da substituïção $x=my+n$, sendo m e n dois números a determinar (Sturm).

Problema n.º 1250 proposto por Rui Verdial (Pôrto).

1251 — Dum barril cheio tira-se um litro de vinho, e substitui-se por água. Depois tira-se um litro da mistura e substitui-se por água. Efectuada esta operação 35 vezes, verifica-se que o barril contém quantidades iguais de água e vinho. Calcular a capacidade do barril.

1252 – Lugar do centro dum círculo que se desloca de tal forma que os seus eixos radicais com dois círculos fixos passam por dois pontos fixos.

1253 — Mostrar que o sistema é possível, e resolvê-lo

$$\begin{cases}(ad+be)\,x+(ae+bf)\,y+(af+bd)=0\\(bd+ce)\,x+(be+cf)\,y+(bf+cd)=0\\(cd+ae)\,x+(ce+af)\,y+(cf+ad)=0\,.\end{cases}$$

1254 — Prove que

$$\sum_{r=0}^{n-1} 2^r \operatorname{tg}(2^r x)=\operatorname{cotg} x-2^n \operatorname{cotg}(2^n x)\,.$$

Problemas n.os 1251 a 1254 propostos por Mário de Alenquer.