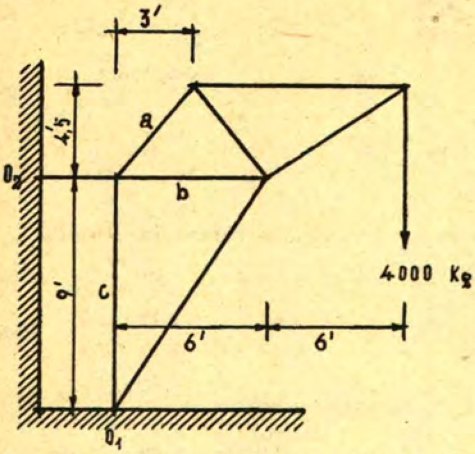
1245 — Dado o sistema articulado representado na figura, calcular as tensões nas barras a, b e c

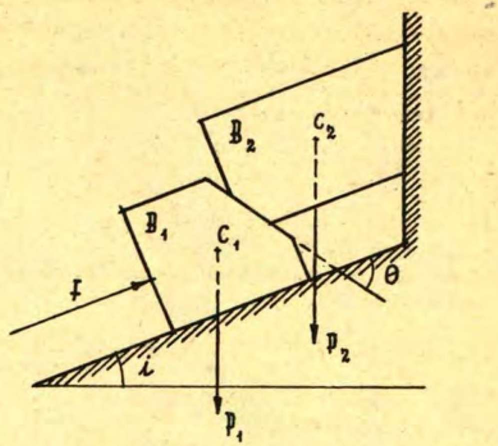


e indicar se são tensas ou comprimidas, (O_1, O_2 pontos fixos).

1246 — Dois blocos B_1 e B_2, de pesos p_1 e p_2, encontram-se em equilíbrio na posição indicada na figura, devido à acção da fôrça F paralela à linha de maior declive do plano que os suporta. Conhecidos p_1 e p_2, i e θ, calcular F pela aplicação do teorema do trabalho virtual, desprezando o atrito.

Dados numéricos:

$i=30^o$; $\theta=45^o$; $p_1=200$ kg.; $p_2=100$ kg).



1247 — Um ponto móvel P descreve a espiral de Arquimedes $r=4\theta/\pi$ (r expresso em decímetros e θ em radianos) de tal modo que a sua aceleração é central e dirigida para o polo da espiral. Sabendo que, para $\theta=\pi/2$, a velocidade de P é 20 cm/s e que o movimento se faz no sentido dos $\theta\theta$ decrescentes, calcular: *a)* a constante das áreas; *b)* a velocidade e a aceleração quando $\theta=20^o$.

PROBLEMAS

Secção a cargo de A. Ferreira de Macedo e Mário de Alenquer

PROBLEMAS PROPOSTOS

1248 — Determinar o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos que têm um lado dado e o vértice oposto sôbre uma recta dada.

1249 - Determinar a equação geral das superfícies S tais que, designando por $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ os pontos em que a normal num ponto M duma delas encontra respectivamente os planos YOZ, ZOX e XOY, a razão anarmónica $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, M)=k$.

Problemas n.os 1248 e 1249 propostos por José Morgado (Pôrto).

1250 — Dado o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ substituí-lo por outro que tenha por limites dois números dados, A e B, por meio da substituïção $x=my+n$, sendo m e n dois números a determinar (Sturm).

Problema n.º 1250 proposto por Rui Verdial (Pôrto).

1251 — Dum barril cheio tira-se um litro de vinho, e substitui-se por água. Depois tira-se um litro da mistura e substitui-se por água. Efectuada esta operação 35 vezes, verifica-se que o barril contém quantidades iguais de água e vinho. Calcular a capacidade do barril.

1252 – Lugar do centro dum círculo que se desloca de tal forma que os seus eixos radicais com dois círculos fixos passam por dois pontos fixos.

1253 — Mostrar que o sistema é possível, e resolvê-lo

$$\begin{cases} (ad+be)\,x+(ae+bf)\,y+(af+bd)=0 \\ (bd+ce)\,x+(be+cf)\,y+(bf+cd)=0 \\ (cd+ae)\,x+(ce+af)\,y+(cf+ad)=0\,. \end{cases}$$

1254 — Prove que

$$\sum_{r=0}^{n-1} 2^r \operatorname{tg}(2^r x)=\operatorname{cotg} x-2^n \operatorname{cotg}(2^n x)\,.$$

Problemas n.os 1251 a 1254 propostos por Mário de Alenquer.

SOLUÇÕES RECEBIDAS

1090 — Achar os máximos e mínimos de $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ em que x, y, z verificam a equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. R: *Diferenciando as duas relações, temos:*

$$\begin{cases} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\dfrac{y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\dfrac{z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0 \\ \dfrac{x\,dx}{a^2}+\dfrac{y\,dy}{b^2}+\dfrac{z\,dz}{c^2}=0. \end{cases}$$

O método dos multiplicadores de Lagrange fornece as equações:

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{\lambda}{a^2}\right)x=0,\quad \left(\frac{1}{u}+\frac{\lambda}{b^2}\right)y=0 \;e\; \left(\frac{1}{u}+\frac{\lambda}{c^2}\right)z=0.$$

Como não pode ser simultâneamente $x=y=z=0$, *temos as três soluções:*

$$\begin{cases} x=y=0 \\ z=u=-\lambda=c, \end{cases} \quad \begin{cases} y=z=0 \\ x=u=-\lambda=a \end{cases} \;e\; \begin{cases} z=x=0 \\ y=u=-\lambda=b. \end{cases}$$

A função é pois máxima ou mínima nos pontos $(0,0,c)$, $(a,0,0)$ *e* $(0,b,0)$. *Suponhamos que é* $a>b>c$. *Nesta hipótese vê-se fàcilmente que o primeiro ponto é um mínimo e o segundo um máximo. Quanto ao 3.º ponto, escrevendo*

$$u=\sqrt{x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)+z^2}=$$

$$=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)z^2+b^2}$$

e notando que $\frac{b}{a}<1$ *e* $\frac{b}{c}>1$, *vê-se que é mínimo numas secções e máximo noutras, não se tratando pois nem dum máximo nem dum mínimo.*

Solução de Rui Verdial (Pôrto).

A solução é correcta, mas não foram, porém, considerados os duplos sinais das soluções. Os pontos de estacionaridade são da forma $(0,0,\pm c)$, etc.

M. A.

1188 — Para que a expressão $dz+Adx+Bdy$ admita um factor integrante independente de z é necessário e suficiente que seja da forma $dz+zd\varphi+e^{-\varphi}d\psi$ em que φ e ψ são funções só de x e y. R: *Multiplicando a expressão diferencial dada pelo factor integrante* v *obtemos a expressão:* $v dz+Av dx+Bv dy$ *que deve ser diferencial exacta. Portanto:* $\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial A}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=v\frac{\partial B}{\partial z}$ *e* $\frac{\partial(Av)}{\partial y}=\frac{\partial(Bv)}{\partial x}$, *visto que* $\frac{\partial v}{\partial z}\equiv 0$ (v *independente de* z). *Integrando:* $A=\frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial x}+\Phi(x,y)$ *e* $B=\frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial y}+\Psi(x,y)$ *donde* $Av=z\frac{\partial v}{\partial x}+v\Phi$ *e* $Bv=z\frac{\partial v}{\partial y}+v\Psi$. *Portanto:* $\frac{\partial Av}{\partial y}=$ $=z\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\Phi\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ *e* $\frac{\partial Bv}{\partial x}=z\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}+\Psi\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, *donde* $\Phi\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\Psi\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ *ou* $\frac{\partial(v\Phi)}{\partial y}=\frac{\partial(v\Psi)}{\partial x}$. *Portanto* $v\Phi$ *e* $v\Psi$ *são derivadas parciais duma certa função* $F(x,y)$, *isto é,* $v\Phi=\frac{\partial F}{\partial x}$ *e* $v\Psi=\frac{\partial F}{\partial y}$. *Então,* $A=\frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial x}$ *e* $B=\frac{z}{v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial y}$. *Ponhamos* $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ *e* $F=\Psi(x,y)$ *ou* $\frac{\partial(\log v)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial(\log v)}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ *donde o factor integrante* $v=e^{\varphi}$. *Então* $A=z\frac{\partial\varphi}{\partial x}+e^{-\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $B=z\frac{\partial\varphi}{\partial y}+e^{-\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial y}$, $dz+Adx+Bdy=dz+\left(z\frac{\partial\varphi}{\partial x}+e^{-\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx+\left(z\frac{\partial\varphi}{\partial y}+e^{-\varphi}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dy=dz+z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)+e^{-\varphi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy\right)=dz+zd\varphi+e^{-\varphi}d\Psi$, c. q. p.

Solução de Rui Verdial (Pôrto).

1189 — Ache o lugar geométrico dos centros das esferas que passam por dois pontos fixos A e B e são tangentes a um plano fixo ω. Discussão. R: *Podemos escolher o triedro de referência, de tal maneira que o plano dado seja o plano* xy, *e as coordenadas dos pontos* A *e* B *sejam respectivamente:* $A(0,0,z_1)$ *e* $B(0,y_2,z_2)$. *Então, se as coordenadas do centro forem* $C(x,y,z)$, *as do ponto de tangência serão evidentemente* $T(x,y,0)$, *e as condições do problema,* $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{TC}$, *fornecem as equações:* $x^2+y^2+(z-z_1)^2=x^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=z^2$, *donde as equações do lugar geométrico:*

$$\begin{cases} y_2\left(y-\dfrac{y_2}{2}\right)+(z_2-z_1)\left(z-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)=0 \\ 2z_1z=x^2+y^2+z_1^2. \end{cases}$$

O lugar é uma cónica, assente num plano Π. *Se um dos pontos, seja* A, *pertence ao plano* ω, *é* $z_1=0$, *a projecção da cónica no plano* xy *reduz-se a uma circunferência de raio nulo e o lugar geométrico reduz-se à intersecção do eixo dos* zz *com* Π, *de coordenadas* $P\left(0,0,\frac{y_2^2+z_2^2}{2z_2}\right)$. *Se os pontos* A *e* B *pertencem ambos ao plano* ω, *o problema é manifestamente impossível no campo real. O lugar reduz-se aos dois pontos imaginários conjugados, de coordenadas:* $\left(\pm\frac{y_2 i}{2}, \frac{y_2}{2}, 0\right)$. *É claro que se as cotas dos pontos forem de sinais contrários a solução é também imaginária. Se as cotas forem iguais,* $z_1=z_2$, *o lugar é uma parábola assente no plano* $y=y_2/2$ *e de eixo paralelo ao eixo dos zz. Se* $y_2=0$ *teremos uma circunferência assente num plano de cota constante, igual à média aritmética das cotas de* A *e* B, *e de raio igual à média geométrica das mesmas cotas.*

Solução de Rui Verdial (Pôrto).

A solução está certa, embora padeça de certos defeitos que passamos a enumerar, porque alguns dêles são de fácil emenda.

1. A discussão não está arrumada, de forma que o leitor possa, sem ter o trabalho de refazer êle próprio a solução, verificar que foram consideradas tôdas as hipóteses possíveis.

2. Na discussão misturam-se as soluções reais e as imaginárias, considerando estas últimas só quando não as há reais, o que é mau método: ou se consideram sempre ou nunca se consideram.

3. O Autor nem sempre levou tão longe quanto seria para desejar a interpretação geométrica dos resultados analíticos que obteve.

A propósito queremos observar que em problemas de geometria elementar, como êste, é sempre preferível uma solução geométrica a uma solução analítica. Pena é que a geometria sintética seja uma disciplina que não se estuda (ou se estuda mal, imperfeitamente pendurada dos dados analíticos) nas nossas universidades, dando como resultado que os nossos licenciados são incapazes de a ensinar nos liceus, de forma que ninguém a sabe em parte nenhuma. A fuga para os métodos analíticos, que daí resulta, tira ao raciocínio matemático grande parte da sua originalidade e da sua finura, transformando-o no simples jôgo mais ou menos automático, mais ou menos hábil, de algoritmos sem dúvida complexos e elegantes, mas cujo domínio não é senão uma parte da cultura matemática.

Veja-se a êste respeito a elegância da seguinte solução do mesmo problema (S. Vatriquant, Bruxelas):

Seja M *o ponto de intersecção da recta* AB *com o plano* ω *e* T *o ponto de contacto da esfera com* ω. *Será então* $MA \cdot MB = MT^2 = \text{const.}$ *O lugar de* T *é uma circunferência do plano* ω, *com centro* M. *A perpendicular a* ω *em* T *passa pelo centro* C *da esfera; êsse centro está no plano* β, *perpendicular a* AB *no seu ponto médio. O lugar do centro* C *é pois a elipse secção por* β *da superfície cilíndrica de revolução cuja directriz é o lugar de* T.

Se AB *é paralela a* ω, *o ponto* M *está no infinito, o lugar de* T *é uma recta, o de* C *uma parábola, etc.*

Mário de Alenquer

1190 — Mostre que os 6 planos perpendiculares às 6 arestas dum tetraedro passando pelos meios das projecções das mesmas arestas sôbre um mesmo plano têm um ponto comum. R: *Sejam* V_1, V_2, V_3, V_4 *os vértices do tetraedro,* V'_1, V'_2, V'_3, V'_4 *as suas projecções sôbre um plano* ω *e* Π_{ij} *o plano, nas condições do enunciado, relativo à aresta* $V_i V_j$. *Os planos* $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$ *cortam-se segundo uma recta,* p_4, *perpendicular à face* V_1, V_2, V_3 *e passando pelo centro do círculo circunscrito a* V'_1, V'_2, V'_3, *por:* 1) *a intersecção de dois quaisquer dos planos* (Π_{12}, Π_{13}, *por exemplo*) *ser perpendicular à face* V_1, V_2, V_3; 2) *os traços de* $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}$ *em* ω *serem as mediatrizes dos lados do triângulo* V'_1, V'_2, V'_3. *Pela mesma razão* $\Pi_{12}, \Pi_{14}, \Pi_{24}$ *intersectam-se segundo uma recta* p_3 *concorrente com* p_4, *visto* p_3 *e* p_4 *serem complanas e não poderem ser paralelas em virtude da não coplanaridade dos pontos* V_1, V_2, V_3, V_4. *Os planos* $\Pi_{23}, \Pi_{24}, \Pi_{34}$ *cortam-se segundo uma recta* p_1 *que passa pelo ponto de encontro de* p_3 *e* p_4, *visto ser a intersecção de* Π_{24} *e* Π_{23}. *Portanto os planos* $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{14}, \Pi_{23}, \Pi_{24}$ *e* Π_{34} *passam por um mesmo ponto como pretendia provar-se.*

Solução de José Morgado (Pôrto).

1192 — Ache a equação geral das superfícies tais que: se por um ponto M duma delas se tira a normal MN até ao plano Oxy, o comprimento MN é igual a ON. R: *As equações da normal,* $\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$ *fornecem as coordenadas de* N, *fazendo* $Z=0$, $X_1=x+pz$, $Y_1=y+qz$ *e* $Z_1=0$. *E então:*

$$\overline{MN}^2=(X_1-x)^2+(Y_1-y)^2+(Z_1-z)^2=p^2z^2+q^2z^2+z^2,$$

$$\overline{ON}^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2=(x^2+2pxz+p^2z^2)+(y^2+2qyz+q^2z^2).\quad \overline{ON}^2-\overline{MN}^2=x^2+y^2-z^2+2pxz+2qyz=0,$$

donde $\frac{dx}{2xz}=\frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{z^2-x^2-y^2}$ *e daqui o integral primeiro* $C_1=\frac{y}{x}$. *Escrevendo as equações com outra forma:*

$$\frac{2xdx}{2x^2}=\frac{2ydy}{2y^2}=\frac{2zdz}{z^2-x^2-y^2}=\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{x^2+y^2+z^2}$$

e pondo $x^2+y^2+z^2=u$, *temos:* $\frac{dx}{x}=\frac{du}{u}$ *donde o novo integral primeiro* $C_2=\frac{u}{x}=\frac{x^2+y^2+z^2}{x}$.

A equação geral pedida será: $\frac{x^2+y^2+z^2}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Solução de Rui Verdial (Pôrto).

Nota — A «Gazeta de Matemática» só publica a solução de problemas insertos na secção Problemas Propostos, a não ser quando pela sua originalidade ou qualquer outro facto mereçam ser publicados. Dentre as soluções recebidas escolhe as melhores mencionando tôdas as outras que sejam correctas.

— No próximo número serão consideradas em especial as Matemáticas Elementares.