

SOPHUS LIE

por A. de Mira Fernandes

Faz, em Dezembro, cem anos que nasceu Sophus Lie (1). Os seus primeiros estudos sobre a *Representação dos imaginários da geometria plana* foram publicados em Christiania, em 1869 e, nesse mesmo ano, no *Jornal de Crelle*, em Berlim. O tema não era inteiramente novo: dez anos antes, outro norueguês, C. A. Bjerknes, professor de Lie, ocupara-se da *representação geométrica das equações entre duas variáveis reais ou complexas*. De certo, Sophus Lie conhecia este trabalho; mas devem ter sido os escritos de Plücker os principais orientadores do seu espírito. À parte o uso do termo *representação*, não há, na memória de Bjerknes, nada que possa sugerir a análise de Lie; mas o seu espaço, a quatro dimensões, das rectas complexas do plano é bem próximo visinho do espaço plückeriano, também a quatro dimensões, de todas as rectas do espaço ordinário.

Quatro anos antes, em 1865, terminara os seus estudos universitários, *ainda hesitante* (aos 23 anos) *entre a filologia e as matemáticas*, como adverte Darboux, na sua conferência de 1904, no Congresso de S. Luiz, *sobre o desenvolvimento dos métodos geométricos*.

Sophus Lie não foi, portanto, um precoce, como Clairaut, Lagrange, Galois, Abel e tantos outros. Mas com que firmeza de consciência a sua verdadeira vocação lhe foi revelada pela leitura da obra de Plücker! E com que mestria êle soube construir e dominar, persistente e confiante, um dos mais belos monumentos da ciência moderna! Desde 1870 (di-lo, ainda, Darboux) Sophus Lie estava de posse das idéias directrizes de toda a sua carreira científica. O depoimento é insuspeito.

Tendo conseguido obter uma bolsa de estudo, Lie esteve em Berlim nos últimos meses de 1869, e aí conheceu Klein (um pouco mais novo) de quem foi amigo íntimo. Nos princípios de 1870 estavam ambos em Paris, onde viveram juntos, onde publicaram trabalhos comuns e onde privaram com Darboux e Jordan. A separação deu-se no princípio do outono, quando a guerra franco-prussiana obrigou Klein a regressar à Alemanha, saindo Sophus Lie para a Itália.

Foi um curso de Sylow, por êles seguido, que lhes revelou a grande importância da teoria das substituições;

estudavam-na, em comum, à data dessas suas primeiras relações com Darboux, no grande tratado de Jordan. Nos seus espíritos nascera a convicção de que o conceito de grupo ia ser chamado a desempenhar um papel fundamental em muitos ramos das ciências matemáticas. E todos nós sabemos como as obras de um e de outro vieram demonstrar a justiça dessa convicção. Numa Nota, publicada nos *Comptes Rendus*, em outubro de 1870, e apresentada por Chasles, estabelecia Sophus Lie uma interessante transformação que faz corresponder a cada recta uma esfera, e que lhe permitia, conhecidas as linhas assintóticas duma superfície, determinar as linhas de curvatura doutra superfície, e reciprocamente. E assim determinava êle as assintóticas da superfície de Kummer.

Dessa Nota diz Darboux:

Le nom de Lie demeura attaché à ces relations si cachées qui rattachent l'une à l'autre la ligne droite et la sphère, ces deux éléments essentiels et fondamentaux de la recherche géométrique.

Em dezembro desse mesmo ano de 70 aparecia, sobre o mesmo tema das assintóticas da superfície de Kummer, uma Nota de Lie, em colaboração com Klein, publicada nos *Monatsberichte* da Academia de Berlim. Já então Sophus Lie estava em Christiania e Klein em Düsseldorf. E no verão seguinte (1871) publicavam os *Mathematische Annalen* outra Nota comum *sobre as curvas planas que a si mesmas se sobrepõem por um sistema fechado de transformações lineares permutáveis*. Estava Klein em Göttingen. Da penúltima Nota mencionada dizia Klein, mais tarde, que ela marcava o ponto culminante da sua colaboração.

Da convivência de ambos, pessoal e epistolar, há larga documentação, devida, sobretudo, a Klein que sobreviveu um quarto de século a Sophus Lie. Aqui e além, uma sentida homenagem à memória do Mestre Plücker:

Es ist eigentlich merkwürdig, wie wenig Menschen sich eine wirklich kühne geometrische Denk-

(1) Marius Sophus Lie nasceu em 17 de Dezembro de 1842. É a data por êle mencionada no seu *curriculum* de 1867, apresentado à Universidade de Christiania. Alguns autores dizem, erradamente, 12 de Dezembro.

weise angeeignet haben. Wir werden es wohl bei Plücker gelernt haben. (*)

Às vezes... um comentário sem desprimor: *Ich schätze Kleins Talente hoch... aber ich glaube, dass er z. B. nicht genug zwischen Induktion und Beweis, zwischen der Einführung eines Begriffs und seiner Verwertung unterscheidet.* (*)

Será assim?

Em 1872, Sophus Lie era professor da universidade de Christiania. A concepção de Plücker relativa à geração do espaço por elementos não pontuais (rectas, curvas ou superficies quaisquer), de tão grande alcance nas teorias algébricas, foi utilizada por Sophus Lie, em geometria infinitesimal, definindo os conceitos de congruência e complexo de curvas e em seguida, o de *transformação de contacto*.

Com êste instrumento, aperfeiçoou os métodos de integração de Jacobi, relativos às equações às derivadas parciais de primeira ordem e, sobretudo, esclareceu a teoria das equações de ordem superior. Durante o inverno de 1873-1874, pode dizer-se que estruturou, nas suas grandes linhas, a teoria dos grupos contínuos finitos de transformações. E esta teoria (bem como a dos grupos infinitos) não mais deixou de ser a preocupação principal do seu engenheiro de analista. O conceito de transformação infinitesimal, os três teoremas fundamentais puseram em evidência toda a importância do conceito de grupo em Geometria.

HENRI LEBESGUE

por J. Vicente Gonçalves

O assunto, sem a frescura aliciante das novidades nem o prestígio forte da elevação, parecia rejuvenescer e altear-se na exposição originalíssima do Mestre. Um halo de luz fecundante dava novos contornos às coisas e acendia nos espíritos a ambição de as devassar. Quantos ali couberam, na pequena sala de Geometria, viviam uma hora de encanto naquele ambiente de primado espiritual.

Não fôra de-certo o assunto que ali os trouxera pressurosos. ¿Superfícies planificáveis? Todos as tinham por tema mediocre, para mais já ressequido por longa clausura em rígidos moldes clássicos. — Superfícies regradas de curvatura nula, em geral geradas pela tangente a uma curva torsa, a aresta de reversão; e sabiam bem como as *apli-*

Outros domínios, mais ou menos relacionados com estes, lhe devem grandes progressos: superficies mínimas, geodésicas, fundamentos da Geometria, etc.

Em 1886 foi nomeado professor em Leipzig; e lá se conservou até 1898. Tendo sido criada para êle uma cadeira privativa na universidade de Christiania, regressou então, à Noruega. Morreu alguns meses depois, em 18 de Fevereiro de 1899, com 57 anos incompletos.

A obra de Sophus Lie não teve, de princípio, no mundo matemático (e disso êle se queixava amargamente) o realce a que tinha jus. O tempo se encarregaria (e com que usura!) de lhe fazer justiça.

Não quero terminar esta breve comemoração da sua grande personalidade científica sem um reparo que se me afigura ser da mais flagrante actualidade. É êste:

Coêva da concepção kleiniana das geometrias holónomas, a idéia de Lie de utilizar um elemento gerador que já não é o ponto, por êle largamente aproveitada em toda a sua obra, volta a ser, neste meado do século XX, embora ao serviço doutra aparelhagem analítica, o recurso de maior valia da moderna geometria diferencial, quando pretende relacionar os conceitos de Riemann e Klein, exhaustos, sob forma pontual, na sua capacidade de entendimento. E, ainda aqui, em estreita colaboração com o mundo algébrico.

(1) Duma carta de Klein para Lie, de Abril de 1878. (Plücker morreu em 1868).

(2) Do prólogo do terceiro volume da *Teoria dos grupos de transformações* (Lie).

car no plano, deformando com continuidade a aresta, sem rasgar ou enrugar o leque em que as suas tangentes se abrem. Nenhum recanto sombrio, com a promessa, embora vã, de um mistério. ¿Que havia a esperar dali?

E, realmente, no campo dos factos, nenhuma revelação sensacional viera surpreender os ouvintes; mas a finura da análise, a justesa do comentário, a luminosidade da síntese renovavam e enalteciam a matéria, tornando-a digna de interesse. Depois, aqui e além, sempre havia novidade: certa particularidade na configuração de uma zona plana a descoberto, tal vicissitude no curso da geratriz rectilínea, etc.; e o ponteiro, fazendo de geratriz, evoluía lentamente no ar, simulando permanente contacto com uma aresta invisível. Todos