sagem por trabalhos de excepcional merecimento. E não só no campo da Ciência pura êle foi notável; no domínio da técnica numerosos são os instrumentos que inventou ou aperfeiçoou.

A sua obra é demasiado vasta para que possa ser apreciada, mesmo resumidamente, num artigo da natureza dêste. Limitar-nos-emos por isso a uma simples indicação de alguns dos seus trabalhos de maior vulto.

No domínio dos raios X ocupou-se particularmente do estudo dos raios X moles, tendo conseguido fazer a ligação e mesmo a sobreposição parcial do espectro ultra-violeta e do espectro X. Foi êle que obteve os raios X de maior comprimento de onda até hoje produzidos.

Estudou a acção biológica das radiações nos organismos unicelulares, tendo conseguido pôr em evidência a existência, nas células, de zonas sensíveis, de superfície muito inferior à superfície total da célula. Uma radiação só actua sôbre a célula quando atinge uma destas zonas sensíveis.

No domínio da técnica deve-se-lhe a invenção da bomba molecular Holweck que permite obter o vácuo mais perfeito que se consegue actualmente.

Deve-se-lhe também o invento do pêndulo gravimétrico Holweck, destinado a medir a intensidade da gravidade e que constituiu uma notabilíssima descoberta, por reduzir extraordinàriamente o tempo necessário para tais medições, e com o qual se consegue uma grande precisão. Esta descoberta valeu-lhe o prémio Alberto I de Mónaco, a mais elevada distinção internacional para os trabalhos de gravimetria.

Não podemos alongar-nos mais sôbre os numerosos trabalhos que tornaram o nome de Fernand Holweck universalmente conhecido e estimado.

Êste sábio morreu na fôrça da vida, quando a Ciência e o Progresso humano a que votara tôda a sua actividade muito tinham ainda a esperar do seu excepcional talento.

Acrescentaremos apenas mais uma breve indicação biográfica. Holweck, que dedicara sempre tôda a sua actividade ao serviço da humanidade, poz galhardamente a sua vida ao serviço da Pátria quando esta estava em perigo. Na guerra de 1914-18, Holweck serviu heròicamente no exército francês, tendo merecido pelos seus feitos a roseta de oficial da Legião de Honra.

Com o seu desaparecimento perdeu a Humanidade não só um grande sábio mas também um homem de carácter firme e de coração largo. Holweck é daqueles de quem se pode dizer que deixou por sua morte uma vaga difícil de preencher.

A «Gazeta de Matemática», dando notícia da perda de Fernand Holweck, inclina-se respeitosamente perante a memória do grande cientista que viveu como um justo e morreu como um mártir.

OS TEOREMAS DE
BAIRE, CANTOR, WEIERSTRASS E CAUCHY

por J. Albuquerque (C. E. M. L.)

Quando se estuda a continuïdade das funcões reais de variável real, encontram-se alguns resultados muito importantes e que se estabelecem fàcilmente; entre êles ocupam um lugar de relêvo os teoremas de Cantor, Weierstrass e Cauchy.

Estes três teoremas demonstram-se de uma maneira tão fácil que nos surpreende, e os seus enunciados tornam-se-nos evidentes em pouco tempo.

René Baire, matemático francês, um dos geniais fundadores da moderna teoria das funções de variável real, deixou-nos um teorema que num caso muito particular se reduz ao clássico teorema de Cantor.

Olharemos primeiro o resultado de Baire e em seguida os de Weierstrass e Cauchy. Mas antes dêles vejamos algumas noções fundamentais, indispensáveis.

No que se vai seguir suporemos sempre que $y=f(x)$ é uma função real definida no conjunto E da variável real x.

Seja x um ponto de E e representemos por $V(x, E, \varepsilon)$ o conjunto dos pontos de E que caiem num intervalo aberto de centro em x e de comprimento 2ε.

Os valores de f no conjunto V formam um conjunto limitado por dois números reais que representaremos por $L(x, \varepsilon) \geq l(x, \varepsilon)$.

Os números $L(x, \varepsilon)$, $l(x, \varepsilon)$ e $\omega(x, \varepsilon) = L(x, \varepsilon) - l(x, \varepsilon)$ chamam-se respectivamente *limite superior, limite inferior e oscilação* da função f no conjunto $V(x, E, \varepsilon)$.

Fazendo tender ε para zero, $L(x, \varepsilon)$ não cresce, $l(x, \varepsilon)$ não diminui, e estes dois números tendem para limites $L(x)$ e $l(x)$ que se designam como limites superior e inferior de f no ponto x.

Tem-se também, visto ser para todo o ε, $L(x, \varepsilon) \geq \geq l(x, \varepsilon)$,

$$\omega(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(x, \varepsilon) = L(x) - l(x) \geq 0,$$

e esta diferença chama-se oscilação de f no ponto x.

Os três números $L(x)$, $l(x)$ e $\omega(x)$ são funções reais de variável real definidas no conjunto E.

Vejamos em seguida o que se entende por continuïdade da função f num ponto do conjunto E.

A função $y = f(x)$ definida no conjunto E será contínua num ponto x de E se, e só se, escolhido um número real $\delta > 0$, for sempre possível determinar um número real $\varepsilon > 0$ tal que para todo o ponto x' do conjunto $V(x, E, \varepsilon)$ se tenha $|f(x') - f(x)| < \delta$. A função f será contínua no conjunto E se o fôr em todos os pontos de E.

Analisemos mais de perto esta definição, que nos foi dada por Cauchy. Esta definição mostra-nos que para a função ser contínua no ponto x, os valores da função em pontos de E visinhos de x não são arbitrários, mas sujeitos à condição de serem visinhos de $f(x)$. Em particular isso sucede sempre nos pontos isolados de E, e se não sucede algures isso é certamente num ponto de acumulação de E, pertencente a E.

A continuïdade de f em E, pode, conforme resulta desta análise, ser definida sòmente nos pontos de acumulação de E que pertencem a E, e para isso vai naturalmente fazer-se uso de sucessões convergentes no domínio e contra-domínio da função.

É o que faz Heine.[1] Para êste matemático a função $f(x)$ é contínua no ponto x de acumulação do conjunto E:

1.º: se x pertence a E,

2.º: se para tôda e qualquer sucessão, $x_1, x_2, \cdots \cdots, x_n, \cdots$ de pontos de E, convergindo para x, os valores da função, $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$ constituem uma sucessão convergindo para $f(x)$.

A função f será contínua em E se o fôr em todos os pontos de acumulação de E, pertencentes a E.

É fácil demonstrar a equivalência destas duas difinições uma vez que se aceite o axioma de Zermelo.[2] A equivalência será por nós francamente aceite, passando aqui em claro a demonstração que é de tôda a gente conhecida.

Seja x um ponto de continuïdade da função f e consideremos o conjunto dos valores da função nos pontos x' de E, visinhos de x, isto é, nos pontos de $V(x, E, \varepsilon)$; êsse conjunto de valores é limitado, como o prova a condição: $|f(x') - f(x)| < \delta$ para, $|x' - x| < \varepsilon$, que é condição suficiente para o conjunto dos valores $f(x')$ ter por limite $f(x)$.

Então se todos os pontos de acumulação de E pertencem a E, ou por outras palavras, se E é fechado, e se $f(x)$ é contínua em E, ou em todos os pontos de acumulação, conclui-se que $f(x)$ é limitada em todos os pontos de E.

Duma maneira mais simples: *tôda a função contínua num conjunto fechado é limitada nêsse conjunto.*

Também num ponto x de continuïdade se tem imediatamente: $L(x) = f(x) = l(x)$. Portanto: $\omega(x) = L(x) - l(x) = 0$.

Se fôr sòmente: $L(x) = f(x) \neq l(x)$, ou sòmente: $L(x) \neq f(x) = l(x)$, diz-se então que $f(x)$ é semi-contínua superiormente ou inferiormente (por sua ordem) no ponto x.

Depois destas noções ràpidamente relembradas, vamos demonstrar o teorema de Baire. Pode êle ser enunciado como segue:[3]

Teorema de Baire. *Se* f(x) *é uma função real de variável real definida num conjunto* E *fechado e limitado, e se em cada ponto* x *de* E *se tem:* $\omega(x) < k$, *então existe um número positivo* α *tal que, para todo o par de pontos* (x', x'') *de* E, *para os quais,* $|x' - x''| < \alpha$, *será*: $|f(x') - f(x'')| < k$.

Para demonstrarmos êste teorema notemos que, se x é um ponto de E existe um $h > 0$, mas suficientemente pequeno, tal que para dois pontos (x', x'') do intervalo aberto $(x-h, x+h)$ se tenha: $|f(x') - f(x'')| < k$. O conjunto E será coberto por êstes intervalos abertos e, por maioria de razão pelos respectivos segmentos; por outras palavras, qualquer que seja o ponto x de E existe um segmento a que x é interior.

Pois bem: existe um *número finito* daqueles segmentos igualmente com a propriedade de cobrir E, ou de cada ponto x de E ser interior a um dêles, (Heine-Borel).

Com efeito[4] se não houvesse um número finito de segmentos cobrindo E, também não haveria um número finito dêsses segmentos cobrindo um

[1] *Heine — Journal de Crelle*, vol. LXXIV (1872) p. 182, *Hobson* — vol. 1.º, p. 282.

[2] *Sierpinski — Comptes Rendus*, Paris, vol. CLXIII (1916), p. 688.

[3] *Baire, Sur les fonctions des variables réelles*, Annali di Mat. (3 A), vol. III, p. 15.

[4] Reproduzimos um raciocínio do prof. *Esparteiro* da Universidade de Coimbra. Ver: *Vicente Gonçalves, Lições de Cálculo e Geometria*, p. 101.

conjunto fechado E_1 contido em E e de diâmetro igual a 1/2 do diâmetro de E, ou cobrindo um conjunto fechado E_2 contido em E_1 e de diâmetro igual a 1/4 do diâmetro de E, e assim sucessiva e indefinidamente.

Mas então os conjuntos E, E_1, $E_2, \cdots$ teriam um ponto c em comum (Cantor [1]), para o qual não haveria um número finito de segmentos aos quais êle fôsse interior.

Mas c pertence a E e portanto é interior pelo menos a um segmento. A contradição assegura a existência de um número finito de segmentos cobrindo E.

As extremidades dêstes segmentos em número finito situadas em E constituem um conjunto finito de pontos. Se fôr α a menor distância entre dois quaisquer dêstes pontos, para (x', x'') pertencentes a E e com $|x'-x''| < \alpha$, é certo x' e x'' caírem num mesmo segmento que cobre E e portanto será: $|f(x')-f(x'')| < k$. c. q. d.

Se quizermos deduzir do teorema de Baire o teorema de Heine-Cantor, bastará supormos que $f(x)$ é contínua em todos os pontos do conjunto fechado e limitado E.

Então neste caso muito particular, é, conforme já se viu: $\omega(x)=0<\varepsilon$. Obtem-se imediatamente o seguinte enunciado:

Teorema de Heine. *Se* f(x) *é continua num conjunto fechado e limitado* E, *então a cada* $\varepsilon>0$ *corresponde um* $\alpha>0$, *tal que se tem:* $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, *para todo o par de pontos com:* $|x_1-x_2|<\alpha$.

Êste teorema foi apresentado e demonstrado pela primeira vez por Heine, o que nos leva a pôr-lhe o nome dêste matemático. [2] Uma proposição muito semelhante a esta no seu conteúdo é o clássico teorema de Cantor ou teorema da *continuïdade uniforme*.

Teorema de Cantor. *Se uma função é continua num intervalo finito e fechado, então o intervalo pode ser dividido num número finito de sub-intervalos em cada um dos quais o incremento da função é menor que um número positivo prèviamente dado.*

Seja E um conjunto fechado (de números reais) e $f(x)$ uma função real contínua em E. Representemos abreviadamente por $f(E)$ o conjunto de valores de f nos pontos de E. Suponhamos E limitado. Seja p um ponto de acumulação de $f(E)$; haverá infinitos pontos x' tais que $|f(x')-p|<\delta$ e qualquer ponto de acumulação, x, do conjunto dos x' será tal [3] que, devido à continuïdade de f, se tem: $f(x)=p$. Sendo E um conjunto fechado, x pertence-lhe, e portanto p pertencerá a $f(E)$. Conclui-se assim que: *se* E *é limitado e fechado, e* f *continua em* E, *então* f(E) *será fechado.*

Dêste resultado vem imediatamente o conhecido:

Teorema de Weierstrass. *Os limites* l *e* L *duma função continua num conjunto limitado e fechado são valores da função.*

Com efeito l e L pertencem ao derivado do conjunto dos valores da função. A l e L, quando atingidos, dá-se os nomes de *mínimo* e *máximo* de f. Vejamos finalmente uma última definição:

Chamaremos *continuo de Jordan* a todo o conjunto fechado tal que dados dois quaisquer dos seus pontos é sempre possível uni-los por uma linha poligonal ou cadeia, com extremos nos dois pontos, com os vértices no conjunto e cujos lados ou elos sejam inferiores em comprimento a qualquer número positivo dado.

Um contínuo de Jordan na recta, é pois um segmento.

Suponhamos agora que E era um contínuo no sentido de Jordan e que f é contínua em E. Sejam p e q dois pontos de $f(E)$ e x' e x'' dois dos pontos de E tais que: $f(x')=p$ e $f(x'')=q$.

Em virtude da continuïdade de f, existe para cada $\varepsilon>0$, uma cadeia: x', x_1, $x_2, \cdots, x_n$, x'' de pontos de E e de elos de comprimento menor que ε, e portanto uma cadeia: $p, f(x_1), (x_2), \cdots, \cdots, f(x_n), q$ de pontos de $f(E)$ e de elos de comprimento menor que δ. Conclui-se assim que: *se* E *fôr um continuo de Jordan e* f *continua em* E, *então* f(E) *será um continuo de Jordan.*

Por outras palavras bem mais sugestivas: o transformado de um segmento por uma função contínua é um segmento.

Concluimos também que:

Os valores de uma função real de variável real num segmento, preenchem o intervalo entre o mínimo e o máximo.

Finalmente concluimos ainda, sem grande esfôrço, o conhecido teorema seguinte:

Teorema de Cauchy. *Uma função real e continua sôbre um continuo de Jordan, não muda de sinal sem passar por zero.*

A quási todos os enunciados que apresentámos mantivemos uma forma que lhes conserva sentido mesmo no caso de sairmos do campo das funções de uma só variável real. Fica para passatempo do leitor o antever essa generalisação imediata.

---

[1] Fêz-se uso de um teorema quási evidente de Cantor conhecido com o nome de *Durchschnittssatz*.

[2] *Heine, Journal de Crelle*, vol. LXXI (1870) p. 361, e vol. LXXIV (1872) p. 188; ver também: *Hobson*, vol., I, p. 290.

[3] Êsse ponto de acumulação existe visto que E é limitado (Bolzano-Weierstrass).