PEDAGOGIA

COMO ESTUDAR MATEMÁTICA

por W. C. Arnold

(Publicado em «The American Mathematical Monthly», vol. 47, 1940)

Êste artigo foi escrito para auxiliar o *caloiro* de matemática e tem por fim instruí-lo na técnica do seu estudo. Estudar vai ser a sua profissão durante alguns anos e é preciso adquirir o suficiente brio profissional para que o trabalho seja o mais proveitoso possível.

O assunto será apresentado subordinando-se aos seguintes tópicos: *Instruções gerais; O Estudo do texto; Resolução dos problemas; Fixação do estudo feito; O Auxílio do professor.*

A) Instruções gerais

1) Não se dedique a actividades extra-escolares antes de cumprir devidamente o trabalho escolar; depois dêste feito pode pensar noutras coisas.

2) Comece a trabalhar desde os primeiros dias do ano escolar. Em matemática, uma boa arrancada é muito importante. Dá-lhe o ímpeto para poder prosseguir.

3) Tome parte nas discuções do curso. O estudo é um processo activo e não passivo. Não basta ler os livros e ouvir o mestre, isto é o mesmo que ouvir palavras novas sem as empregar, pois não as dominará enquanto delas não fizer uso várias vezes, quer na conversa quer na escrita.

4) Estude a lição logo a seguir à exposição. É mais facil a aprendizagem da matéria recentemente exposta. Recapitule a lição antes de ir para a aula, recitando-a para si.

5) Evite quaisquer maus hábitos que porventura tenha adquirido no estudo da matemática no liceu. Tome muita atenção às observações do professor acêrca dêsses maus hábitos.

6) Verifique, logo que possa, se está senhor das bases necessárias para poder seguir o curso. Se não estiver consulte o professor sôbre as suas falhas.

7) Um ponto fundamental no estudo da matemática é o comêço no estudo. Tem muito que se lhe diga e muitos estudantes não conseguem triunfar por causa disso. Pensam que estudam pelo facto de terem um livro aberto à sua frente. Mas não basta abrir o livro, é necessário criar um estado de espírito propício ao estudo; para isso começa por escolher uma hora pouco depois da prelecção. É preciso que já tenha descansado o suficiente para que o espírito esteja pronto a abordar o estudo. É claro que em virtude do horário nem sempre se encontrará a situação ideal, mas é sempre possível descobrir uma hora apropriada. Não espere que essa hora seja aquela em que esteja de boa disposição, comece a estudar e é possível que a adquira. Feche o aparelho de rádio e avise o seu companheiro de quarto que tem um trabalho muito importante a fazer; puxe uma cadeira e sente-se direito à secretária com papel e lápis: abra o livro e ataque a lição com uma atitude semelhante à que teria numa competição desportiva. Concentre-se na lição. Vença todas as distracções e não se sirva delas como pretexto para não estudar. O somatório de todos estes esforços provocará em si o tal estado de espírito a que poderemos chamar «atitude agressiva» com o fim de estudar matemática.

8) O seu trabalho será mais profícuo se tiver sempre presente que o *caloiro* de matemática deve:

a) Aprender e estudar matemática eficientemente;

b) Aprender a ajuizar, a fazer uso do raciocínio e a empregar uma linguagem cuidadosa e precisa;

c) Adquirir a técnica de cálculo de forma a poder aplicar o que estudou aos diversos campos onde a matemática elementar tem aplicação e que são entre outros: as matemáticas superiores, a astronomia, a física. a química, a meteorologia, a navegação, a engenharia e a estatística na sua aplicação aos estudos da psicologia, educação, sociologia, biologia e economia.

Se o Mundo não necessita de um número muito grande de professores de matemática precisa no entanto de muitíssimas pessoas que possam fazer uso da matemática inteligentemente.

d) Aprender a compreender e a apreciar a frase: «A matemática é a ciência das conclusões necessárias».

e) Aprender a apreciar a beleza de certos problemas de matemática ainda quando não tenham aplicação para fins lucrativos.

B) O estudo do texto

1) Leia os livros e aprenda a servir-se dêles. Sirva-se das tábuas e outro material matemático.

2) Apresenta-se seguidamente um método para estudar o livro de texto que põi imediatamente o estudante em acção fornecendo-lhe processos para o manejo do livro de preferência a lê-lo passivamente. Para isso:

a) Tome a «atitude agressiva».

b) Faça uma primeira leitura com o fim de descobrir a ideia principal do autor. Não se importe com os pormenores, deixe-os para mais tarde. Leia de vagar. Se encontrar termos que não conheça procure a sua definição.

c) Leia o assunto novamente, com cuidado, estudando agora os pormenores. Copie todas as demonstrações, linha por linha, estudando os casos particulares. Verifique a razão por que cada fase é uma conseqüência lógica do que precede. Se encontrar algum passo obscuro não perca muito tempo com êle; tome nota e pregunte ao mestre. Não deve, no entanto, abusar da sua boa vontade procurando constantemente o seu auxílio. Quando se resolve uma dificuldade aumenta-se a confiança em si próprio.

d) Depois da segunda leitura escreva um resumo do assunto; êste deve ser curto e sintético e feito de tal modo que permita repetir a lição. Terá ainda outra aplicação que adiante será descrita.

e) Aprenda a expôr. Para isso feche o livro e procure reproduzir a lição servindo-se apenas do resumo que acabou de fazer. Recite as partes que podem ser ditas oralmente. Escreva as mais importantes. Esta é a parte essencial do método. Assim se revela se o aluno domina a lição. Não é preciso empregar a linguagem do livro, é mesmo conveniente que faça a exposição por palavras suas; no entanto deve observar-se que se o livro de texto fôr bom, será difícil apresentar melhores definições dos termos da matemática.

f) Procure as aplicações da teoria que acabou de estudar. Às vezes a sua aplicação só poderá fazer-se mais tarde, outras vezes as aplicações são a resolução de problemas. O conhecimento das aplicações da teoria tornam o trabalho mais eficaz. Quási sempre é o mestre que dá os exemplos, mas melhor será se os descobrir por si só. Deve de vez em quando procurar construir uma teoria, porque é interessante o sentirmo-nos mais fortes e para isso sempre terá tempo, pois os trabalhos diários que nos dão o pão, não nos consomem todas as horas do dia.

g) Reveja a lição pouco antes de ir para a aula. Sirva-se do resumo e verifique se se esqueceu de alguma coisa.

h) Se apreender o espírito dêste método sentir-se-à contente com o resultado dos seus esforços. As *certezas* que se encontram na matemática satisfazem a maior parte das pessoas, porque as suas conclusões não são uma questão de opinião — aqui pode saber-se quando se tem ou não razão.

C) Resolução dos problemas

1) Tome a «atitude agressiva».

2) Estude cuidadosamente a teoria que precede os problemas e os exemplos do texto ou os fornecidos pelo professor.

3) Comece pelos mais simples e vá resolvendo-os gradualmente por ordem de dificuldade. Se encontrar algum que lhe dê muito trabalho, ponha-o de lado por momentos e volte a resolvê-lo mais tarde como se fôsse um problema novo, de forma a evitar os possíveis êrros que tenha praticado.

4) Aprenda a trabalhar com precisão. Se cometer constantemente êrros verifique a cada passo. Assim melhorará até conseguir resolver o problema à primeira tentativa. A princípio não trabalhe depressa nem sob pressão; disponha do tempo bastante para resolver os problemas. À medida que fôr triunfando mais depressa os resolverá. Finalmente resolvê-los-à depressa e correctamente.

5) Em quási todos os problemas é possível verificar os resultados. Deve habituar-se a verificar de preferência a comparar os resultados do livro com os seus. É uma grande fonte de satisfação a verificação, especialmente num exame.

6) Para resolver um problema por meio de álgebra, leia-o primeiramente com cuidado, em seguida reproduza o problema por palavras suas, Isto é absolutamente necessário se quizer triunfar. Designe por letras as incógnitas e escreva as relações traduzidas no enunciado entre os dados e as incógnitas. Feito isto terá tantas equações quantas as incógnitas e poderá resolver a equação ou sistema de equações. Se o tipo de equação achada não corresponder à teoria que acabou de estudar é natural que tenha errado, embora nem sempre isso aconteça.

7) Para resolver um problema de geometria por meio de álgebra determine em primeiro lugar o que é conhecido e o que se procura conhecer. Em seguida faça um desenho com todos os dados do problema estabelecendo as relações geométricas

existentes entre os dados e as incógnitas por meio de equações e resolva-as.

8) Se o problema geométrico tiver de ser resolvido por métodos puramente geométricos (sem auxílio da álgebra) procure determinar com cuidado a hipótese e a tese e faça um desenho. Geralmente o melhor processo é partir do princípio de que a tese é verdadeira e resolver o problema regressivamente até à hipótese e depois inverter o processo que se acabou de seguir.

9) A resolução dos problemas de trigonometria requere métodos especiais, embora seja útil tudo quanto foi dito acêrca dos problemas algébricos e geométricos.

10) Lembre-se sempre que as letras usadas representam números. Se tiver dúvidas sôbre se determinado resultado estará certo, substitua as letras por números. Assim é freqüente escrever $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ que se verifica ser êrro quando se substituam as letras por números, pois que se tem por exemplo: $\sqrt{4^2+3^2}=5$ e não igual a $4+3$.

11) Muitos estudantes atrapalham-se com as fracções. Uma regra simples mas muito importante é a traduzida pela igualdade $a/b=(a/b)\times 1$. Como exemplo da sua aplicação temos o seguinte: por ser $c/c=1$ vem $a/b=a/b\times c/c=ac/bc$. Aquela igualdade tem, como é fácil de ver, muitas outras aplicações.

D) Fixação do estudo feito

Quási sempre o aluno prepara as lições do dia e descobre no fim da semana que se esqueceu de grande parte do que aprendeu durante a semana. Isto é muito grave porque o trabalho de cada dia depende do dos dias antecedentes. O exame torna-se assim muito difícil e não se consegue triunfar. É pois preciso reter tudo o que se aprendeu. O primeiro exame do *caloiro* é muitas vezes um fracasso e êste facto afecta-o de uma das duas seguintes formas: serve-lhe de lição para se dedicar mais a fundo ao estudo, ou torna-se pessimista e abandona o trabalho. Em qualquer dos casos a situação não é agradável e pode ser evitada. Para tanto:

1) Deve continuamente rever. Dedique parte do tempo destinado à preparação das lições do dia a revisões da matéria estudada. Depois de rever, suponhamos umas vinte páginas do livro, recapitule os princípios básicos e veja o que conseguiu reter. Da vez seguinte gaste mais tempo com os pontos que notou mais fracos da primeira vez. Utilise agora os resumos de cada lição para a recapitulação. Uma vez que siga êste método verificará ao fim de certo tempo que prepara as lições diárias mais fàcilmente e que necesssita menos tempo que anteriormente para estudar qualquer assunto novo.

2) Na recapitulação de problemas não resolva os mais difíceis. Poder-se-á embaraçar num que seja muito difícil ou longo. Numa recapitulação precisamos de reter os pontos principais; resolver muitos problemas fáceis ou com ligeiras dificuldades e de preferência aqueles que apresentem uma variedade de tipo.

E) Auxílio do professor

1) O professor averiguará de início se o aluno está de posse dos conhecimentos necessários para poder seguir o curso.

2) Demonstrará a técnica descrita neste artigo elucidando o curso e convencendo-o da sua eficácia.

3) Dar-lhe-à todas as explicações necessárias desde que o aluno não abuse e traga por escrito as dificuldades a resolver.

4) Fará um ponto modêlo antes do exame e o seu resultado não terá influência na classificação final do exame. Por êste ponto o aluno fará ideia do que se pretende. O ponto será corrigido pelo professor, discutido na aula e entregue ao aluno.

5) O professor comentará a matéria que tenha saído no ponto e tirará as dificuldades que se apresentem na resolução dos problemas. Estas explicações só podem ser úteis aos alunos que tenham dominado a matéria dada até essa data.

6) O professor não fará prelecções. Levará o aluno a entrar na matéria auxiliado por êle.

7) O professor fornecerá exemplos de aplicação afim de criar interêsse nos alunos.

8) Interrogará freqüentemente os alunos afim de verificar se compreenderam os métodos aqui descritos e se estão a pô-los em prática. Êste interrogatório servirá também para averiguar em qual das seguintes categorias o aluno se encontra:

a) Não domina os princípios fundamentais necessários para poder seguir o curso.

b) Não estuda.

c) Tenta estudar e não sabe como.

d) Consegue triunfar mercê de habilidades.

e) Dá conta do recado.

Tradução de F. SCHÄLLER DIAS e de J. PAULO

A TEORIA DOS LOGARITMOS NO ENSINO LICEAL

por J. Sebastião e Silva (C. E. M. L.)

«Tem-se desenvolvido e espalhado muito o conhecimento dos logaritmos, a tal ponto que já os alunos manejam as tábuas de logaritmos *e delas se utilizam para o cálculo prático; há contudo estabelecimentos de ensino (no meu tempo era isto o normal) em que nada se diz de como se construem essas tábuas. Não podemos deixar de condenar êste facto, inspirado no mais baixo utilitarismo e contrário a todo o princípio de elevada pedagogia».*

(F. Klein, «Matematica Elemental desde un punto de vista superior», tradução espanhola de R. Araújo, p. 194).

«... não deve estranhar-se, nem parecer casual, que um homem como Leibniz, *pensador abstracto de primeira linha, mas dotado dum espírito eminentemente prático, fôsse ao mesmo tempo o* pai da Matemática formal *e o* inventor da primeira máquina de calcular».

(F. Klein, obra citada, p. 22).

Para nós e para muitos, é indiscutível que a Matemática deve desempenhar no ensino liceal um papel essencialmente formativo. Pouco interessa que o aluno fique a conhecer muitos teoremas e os processos de resolução de muitas classes de problemas: o que importa, acima de tudo, é que êle tenha exercido as suas faculdades na demonstração dos teoremas e na resolução dos problemas; é que tenha adquirido o hábito de pensar *matemàticamente*, quer estudando o desenvolvimento lógico das teorias, quer aplicando os factos estabelecidos à resolução de numerosas questões procedentes da realidade tangível. Exige-se, evidentemente, um mínimo de informação matemática, a aquisição duma técnica segura de cálculo elementar (numérico e algébrico); mas isso pouco deverá ser, comparado com o trabalho de criação dos hábitos de raciocínio, de abstracção, de disciplina mental, que distinguem a formação matemática. E é ainda manifesto que êsse mínimo de informação se refere quási exclusivamente aos alunos que vão seguir determinados cursos, enquanto os benefícios da formação matemática interessam à *totalidade* dos alunos.

Ora o estudo dos logaritmos constitui, há muitos anos, um dos assuntos capitais dos programas de Matemática dos liceus portugueses, e não nos parece plausível, *por ora*, que se mude de orientação, suprimindo essa parte do programa. É possível, sim, que venha a reconhecer-se a necessidade de nêle introduzir o ensino de outros métodos expeditos de cálculo numérico, nomeadamente métodos mecânicos; mas isso mesmo não implicará a vantagem de excluir o ensino dos logaritmos. E não se deverá então deixar de ensinar, na medida do possível, o princípio teórico dêsses métodos — a não ser que o objectivo da Educação consista em formar autómatos, em vez de *homens*. (Ver nota final).

Do ponto de vista informativo, parece-nos inatacável a inclusão dos logaritmos no ensino liceal — mas é do ponto de vista formativo que mais útil se deve considerar êsse estudo, pela oportunidade que oferece de pôr em evidência aspectos importantes do método matemático, dando uma idéia das suas admiráveis possibilidades. Não é portanto razoável que se faça predominar a feição prática, estreitamente utilitária, no modo de ensinar essa matéria, sem preocupações a respeito do seu enquadramento lógico no conjunto harmonioso das aquisições matemáticas.

E como se tem procedido, nêste assunto, entre nós? Costuma dar-se, é verdade, a demonstração de vários teoremas, relativos ao logaritmo dum produto, dum cociente, etc. etc. — mas todos nós sabemos quanto é precária a base em que vão assentar semelhantes demonstrações. É preciso ter a coragem de o afirmar: essa maneira de proceder não passa de pura mistificação, desde que se não tenha dado ao aluno uma noção conveniente de logaritmo. E o que temos visto fazer, neste ponto, é apresentar uma definição nominal, com a mais insensata despreocupação a respeito da existência das entidades definidas; isto é, sem ter o cuidado de mostrar que a equação $a^x=b$ admite solução, quaisquer que sejam a e b positivos. Por exemplo, segundo a definição, o logaritmo de 8 no sistema de base 2 é o expoente da potência a que se deve elevar 2 para obter 8: muito bem, êsse logaritmo é igual a 3. Mas qual é então o logaritmo de 2 no sistema de base 10? Aqui enveredа-se pela via condenável do silêncio e do mistério: o aluno pode vir a saber, socorrendo-se duma tábua de logaritmos, que o logaritmo procurado é aproximadamente 0,30103; mas nunca lhe é dado penetrar nas altas razões que decidem ser êsse e não outro, o logaritmo decimal de 2, com cinco casas decimais. E é na mais santa ignorância do que sejam afinal os logaritmos, que o aluno se dará ao luxo de demonstrar belos teoremas sôbre essas entidades, de que êle sabe tanto, quanto nós sabemos dos habitantes do planeta Marte!...

Não se pode negar que o problema é delicado. Parece que chegámos a êste dilema: ou renunciar de todo a uma teoria matemática dos logaritmos, contentando-nos com o ensino de regras mecânicas, de receitas a aplicar cegamente; ou sujeitar o inditoso jóvem a um estudo sério dos irracionais e das funções contínuas, para, sôbre essa base inabalável, erigir o soberbo edifício dos logaritmos. Ora é forçoso encontrar aqui uma saída, uma terceira hipótese menos cruel... [(1)]

Pois bem: nós cremos na possibilidade de resolver a questão, sem recorrer ao luxo duma exploração analítica do corpo real, e sem cair em mistificações escandalosas. Basta lembrar que os logaritmos foram inventados muito antes de Dedikind, Cantor e Weierstrass terem vindo ao mundo — e que não devemos acusar Neper de ter feito uma descoberta prematura...

Aqui a norma a adoptar parece-nos que deve ser esta: dar ao ensino uma orientação de tal modo natural, que o aluno seja levado a aceitar os factos ***intuïtivamente,*** [(2)] e com uma fôrça de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa dêsses factos. A solução que vamos propôr não constitui pròpriamente novidade. Não. Achámos, contudo, nosso dever chamar a atenção das pessoas distraídas para uma solução aceitável, que, apesar da sua singeleza, tem andado imerecidamente oculta e desprezada.

Suponhamos que foi dada a definição usual de logaritmo dum número, relativamente a uma determinada base, e procuremos, armados com essa definição, calcular, por exemplo, o logaritmo decimal de 3. Trata-se portanto de achar um número k tal que $10^k=3$. Diga-se ao aluno: ***se um número tal existe,*** é natural que esteja compreendido entre 0 e 1, pois que $10^0=1, 10^k=3, 10^1=10$ e $1<3<10$ [(3)].

Dividamos então em 10 partes iguais o intervalo de extremos 0 e 1: os intervalos obtidos terão por extremos 0; 0,1; 0,2; $\cdots$; 0,9; 1. Em qual dêstes novos intervalos se deve encontrar k? Para o saber, basta comparar o número $10^k=3$ com cada uma das potências $10^{0,1}, 10^{0,2}, \cdots, 10^{0,9}$; mas isso equivale a comparar, entre si, as décimas potências dêsses números. Ora

$$3^{10}=[(3^2)^2]^2\cdot 3^2=6561\times 9=59049$$

e por outro lado

$$(10^{0,1})^{10}=10, (10^{0,2})^{10}=10^2, \cdots, (10^{0,9})^{10}=10^9.$$

Como $10^4<59049<10^5$, segue-se que $10^{0,4}<<10^k<10^{0,5}$ e portanto $0,4<k<0,5$. Assim, o logaritmo decimal de 3, *se existe,* deve encontrar-se entre 0,4 e 0,5. Tomando 0,4 para valor aproximado dêsse logaritmo, comete-se portanto (na hipótese de êle existir) um êrro por defeito inferior a 0,1: podemos então ***convencionar*** dizer que 0,4 é ***o logaritmo decimal de 3 a menos de uma décima.***

Pretendendo calcular log 3 a menos de uma centésima, procederemos anàlogamente, dividindo o intervalo de extremos 0,4 e 0,5 em 10 partes iguais, e comparando $10^k=3$ com os números $10^{0,41}, 10^{0,42}, \cdots, 10^{0,49}$. Mas tem-se $3^{100}=(3^{10})^{10}\approx\approx(5,90\times 10^4)^{10}\approx 5,1\times 10^{47}$ [(4)] e, por outro lado, $(10^{0,41})^{100}=10^{41}, (10^{0,42})^{100}=10^{42}, \cdots, (10^{0,49})^{100}=10^{49}$; como $10^{47}<5,1\times 10^{47}<10^{48}$, será $10^{0,47}<10^k(=3)<<10^{0,48}$, donde $0,47<k<0,48$. Tem-se portanto, a menos de uma centésima, $\log 3=0,47$.

Anàlogamente se calculava log 3 a menos de uma milésima, etc. E agora que já o ***descobrimos,*** podemos reduzir o método às suas linhas estruturais, dando-lhe até maior generalidade: Seja a o número dado. Calculemos a sua potência de expoente p, sendo p um inteiro qualquer. Se fôr

$10^n<a^p<10^{n+1}$, ter-se-á $10^{\frac{n}{p}}<a<10^{\frac{n+1}{p}}$ e, por-

---

(1) Como solução, já ouvimos propor que se voltasse ao ensino dos logaritmos a partir de duas progressões, uma aritmética e a outra geométrica, com os termos em correspondência biunívoca; mas nós achamos que dêste modo as dificuldades apontadas subsistem completamente, com acréscimo de inconvenientes.

Há dez anos fazia-se na 7.ª classe um estudo pretencioso das funções exponencial e logarítmica.

(2) Que nos perdôem aquêles para quem a palavra *intuïção* deixou de ter sentido e ainda aquêles para quem a intuïção matemática termina, onde os números irracionais começam.

(3) Supomos, evidentemente, que já foi demonstrada a proposição: «*Se* $a>1$ *e* $p>q$, *tem-se* $a^p>a^q$, *para* p *e* q *racionais*». Aqui, procura-se determinar log 3, como se êle fôsse racional. Veja-se que não se trata por enquanto de *demonstrar*, mas apenas de *investigar*. Só depois se colocará o aluno perante a hipótese da irracionalidade, sem que o resultado fique lògicamente comprometido. *Supomos aqui já definida potência irracional de expoente racional, mas não potência de expoente irracional.* É o estudo dos logaritmos que faz sentir ao aluno a necessidade de introduzir esta última noção.

(4) O sinal $\approx$ deve ler-se «*aproximadamente igual a*». Nestes cálculos, basta operar com valores aproximados; mas é necessário, evidentemente, fixar o número de algarismos significativos a conservar de cada vez, para que o resultado não seja comprometido. Patenteia-se aqui, uma vez mais, a necessidade premente de ministrar, nos nossos liceus, algumas noções sôbre cálculo aproximado — necessidade que, desgraçadamente, ainda não foi tomada em devida consideração.

tanto (se existe $\log a$), $\frac{n}{p} < \log a < \frac{n+1}{p}$. Para atingir depressa um expoente p bastante elevado, pode adoptar-se o processo de repetidas elevações ao quadrado, utilizando uma tábua de quadrados [5], que nada tem já de misterioso para o aluno. Com 10 consultas da tábua e uma divisão por 1024 — calcula-se um logaritmo com 3 decimais.

E... o problema da existência? Mas é evidente que êsse problema perdeu agora grande parte do seu interêsse prático, e mesmo lógico! O aluno encontra-se apto a determinar números k' que satisfazem *aproximadamente* à condição $10^{k'}=3$, com um êrro tão pequeno, *quanto êle quiser;* isto é, números k', tais que a potência $10^{k'}$ seja tão *próxima* de 3, *quanto êle quiser*. E não é isto suficiente nas aplicações ao mundo físico? Não sabe o aluno já que, nessas aplicações, os números exprimem medidas, irremediàvelmente sujeitas a êrro? Que significado pode ter, por exemplo, num resultado, um êrro inferior a uma décima de milímetro, quando o processo de medição utilizado é insuficiente para distinguir grandezas inferiores a êsse limite? E tôda a teoria dos logaritmos pode ser adaptada a êste novo modo de encarar o assunto, sem cometer a mínima falta em relação à lógica. Bastará, então, estabelecer os teoremas, só no caso em que logaritmos são racionais, e mostrar ao aluno como, aplicando êsses teoremas, se pode fazer o cálculo logarítmico dum produto, dum cociente, etc., com um êrro inferior a um limite prèviamente fixado.

Mas também a atitude filosófica não deve ser desprezada, mesmo nesta fase de iniciação! É que, além do mais, há nessa orientação ainda um sentido prático, embora de outra ordem — uma utilidade que não se refere já às relações da Matemática com a Técnica, mas às necessidades intrínsecas da própria Matemática. Uma noção matemática impõe-se na medida em que é cómoda e fecunda — e êste princípio é verificado com o conceito de número irracional [6]. Tôda a Análise Matemática podia ser feita sem recorrer a tal conceito: simplesmente, os enunciados das proposições perderiam muito da sua luminosa simplicidade, quebrando-se aquela harmonia que não só lisonjeia o sentido estético, como também é condição de fecundidade. *Pràticamente,* não chegam a ser criados novos números — apenas é adoptada uma nova linguagem, que faz conceber como equivalentes a números, certas sucessões infinitas de números. E já isso representa alguma economia...

Tornemos agora ao cálculo dos logaritmos. Depois das considerações que foram feitas, é muito natural que o aluno sinta espontânea curiosidade em saber se as operações indicadas têm ou não um têrmo. Mesmo que esta sua curiosidade não seja então satisfeita (pode satisfazê-la mais tarde, em Aritmética Racional) ficará êle a conhecer os dois casos que se podem verificar, no cálculo do logaritmo dum número a, pelo método apresentado: a possibilidade ou a impossibilidade de encontrar, ao fim dum certo tempo, um número decimal k, tal que $10^k=a$; e terá aprendido a distinguir duas hipóteses, no segundo caso: a da periodicidade e a da não periodicidade da dízima obtida. Finalmente, virá a saber que, só na última hipótese, é impossível determinar um número racional k, tal que $10^k=a$; mas que, nesse caso, a sucessão dos números decimais (ou a dízima infinita) a que conduziria a aplicação indefinida do método indicado, define, *por convenção,* um número irracional λ, e que se tem, *ainda por convenção,* $10^{\lambda}=a$.

Mas não será preciso continuar a desenvolver êste ponto de vista. Resta-nos lembrar que, já antes do estudo dos logaritmos — a propósito dos radicais — o aluno tomou um primeiro contacto com o fenómeno da irracionalidade. E observações em tudo análogas às precedentes devem ser feitas acêrca da noção de raiz aritmética dum número.

Agora, outro aspecto da questão. Com as anteriores indicações e pouco mais, *fica o aluno habilitado a construir uma tábua de logaritmos:* — é tudo uma questão de tempo e de paciência, relacionada com o número de casas dècimais adoptado. Como exercício, não será preciso ir além de 3 ou 4

---

(5) Estas tábuas, muito úteis para abreviar os cálculos, no método dos mínimos quadrados e no método de Gräffe (equações algébricas), têm ainda interêsse pedagógico e prático por oferecerem uma possibilidade de calcular produtos, efectuando apenas adições, subtracções e divisões por 2 — com o emprêgo da fórmula $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. No livro de J. Hoüel «Recueil de Formules et Tables Numériques», encontra-se a p. 62-65 (duas páginas apenas!) uma tábua de quadrados a quatro decimais — que permite ainda, sem grande trabalho, calcular quadrados de números com 8 algarismos significativos.

(6) Somos levados a aplicar aqui o critério de comodidade, de que H. Poincaré usou, mas também abusou, nas suas explicações.

Só no século XIX se reconheceu que os conceitos de número negativo, número irracional, etc., não obedecem a uma *necessidade lógica.*

dècimais: uma tábua para 4 decimais não ocupa mais de duas páginas duma tábua vulgar. Mesmo que o aluno não chegue a construir uma dessas tábuas, ficará (e é isto o fundamental) a ter a legítima convicção de que *seria capaz de a construir, se tanto quizesse,* — e dêste modo se evita o seu complexo de inferioridade perante um instrumento que não se deve, positivamente a artes mágicas — que não foi criado por entes sobrenaturais, mas *por homens!* A construção efectiva duma tábua é na verdade uma tarefa maçadora, monótona, mas isso também não constitui razão para a condenar. Perigosa educação a que leve ao convencimento de que tudo se consegue na vida sem grande maçada! De-resto, êste trabalho é dos que se podem repartir por uma *équipe* de alunos, aplicando o salutar preceito do trabalho colectivo.

«Trabalho vão! Tempo perdido!» ouvimos clamar. «A trôco de alguns escudos, o aluno pode adquirir uma tábua de logaritmos na livraria mais próxima!» Mas—insistiremos—não se trata aqui de atingir uma finalidade prática imediata! Também, segundo êsse critério, cem por cento utilitário, será *inútil* que o aluno aprenda a improvisar. por exemplo, certos aparelhos de física (supondo que tem um bom laboratório à sua diposição, e que não tenciona especializar-se nêsse género de construções) — e, não obstante, o prazer que fruïrá, trabalhando com os *seus* aparelhos, é um dos mais poderosos agentes de que pode socorrer-se a bôa pedagogia.[7] Êsse prazer tem algo de semelhante à emoção que se apodera do investigador (pensamos em Pasteur, neste momento ,,.), ao pressentir o êxito das suas pesquisas — mesmo que daí não venha a resultar nada que possa exprimir-se em unidades do sistema monetário Ai da Ciência, ai da Humanidade — se deixasse de haver gente *sonhadora,* capaz de sentir essa emoção!

Também se pode objectar que as tábuas logarítmicas de que nos servimos hoje não foram construídas pelo processo aqui apresentado, mas por outro mais expedito, que não se pode ensinar devidamente a alunos do liceu. Os anteriores argumentos servem ainda para nos defender desta objecção.

Resta-nos responder àquelas pessoas que se consomem em eternos cuidados, a respeito da extensão dos programas, incompatível com a saúde preciosa da juventude que se bate... por um diploma. — É evidente que, ao preconizar a introdução de uma nova matéria, não se exclui a hipótese de compensar êsse acréscimo, sacrificando outra parte, menos importante, do programa — e no nosso caso não será difícil descobrir, onde cortar... Não deixaremos, contudo, de lembrar humildemente êste humilde preceito: *nunca se deve lamentar o tempo gasto em estabelecer sòlidamente uma noção fundamental.* Mais até: *há acréscimos que têm o valor de simplificações* – princípio que só repugna a quem sofra de miopia intelectual. Tudo que sirva para elucidar — longe de constituir um pêso, uma sobrecarga — só contribui para suavizar a marcha... E — como diria êsse inimitável observador que é ainda M. de la Palisse — *nunca se perde tempo num trabalho que oferece a garantia de chegar mais depressa ao fim.*

Nota: As considerações precedentes são, em grande parte, o produto da nossa legítima reacção, a várias críticas que nos foram dirigidas a propósito da nossa 3.ª interrogação, formulada na secção pedagógica do n.º 11 da «G. M.». Em especial, referir-nos-emos às observações feitas, no mesmo número, pelo Sr. Prof. Bento Caraça, com quem estamos em desacôrdo neste ponto — mas a quem apoiamos na enérgica atitude que tem mantido a favor duma reforma do ensino das matemáticas em Portugal. Algumas das suas observações acêrca do nosso ponto de vista referem-se à necessidade de ensinar, a alunos do liceu, o manejo da régua de cálculo, e à gradual substituïção dos logaritmos pela máquina de calcular. É interessante notar que F. Klein, na sua tão celebrada obra, a que temos aludido, depois de afirmar categòricamente que *nenhum aluno devia sair da escola sem ter manejado uma máquina de calcular* (cujo segrêdo nos revela, num exemplo típico), dedica um extenso e substancial capítulo ao ensino dos logaritmos... E que vem a ser, afinal, uma régua de cálculo? É ainda F. Klein quem no-lo diz: «... como se sabe, não é outra coisa senão uma *tábua de logaritmos com 3 decimais...*» (Aqui se vê ainda um belo exemplo de união da Matemática e da Técnica, da teoria e da prática!)

Finalmente, transcrevemos do artigo «Os logaritmos», publicado na secção «Antologia» do n.º 11 da «G. M.», a seguinte passagem: «*É uma vez os logaritmos inventados, êles conduziram a uma teoria dos limites, das exponenciais, dos indivisíveis, que vieram a ser os preliminares essenciais da criação da análise*».

Somos levado a crer que o Sr. Prof. Bento Caraça não reflectiu maduramente, ao escrever a sua nota, em que afirma o propósito, na verdade simpático, de iniciar a discussão à volta das nossas interrogações. Mas o que é um facto — e muito grave — é que os seus argumentos (?) se insinuaram fàcilmente no espírito duma extensa camada de leitores, alimentando erros e confusões, que é preciso a todo o transe desenraïzar.

---

[7] É absolutamente necessário que o aluno adquira a suficiente confiança em si, para que não se sinta mais como um estranho, um tímido visitante, um espectador inerte e mudo, no imenso domínio da Ciência.

RESPOSTA ÀS CONSIDERAÇÕES ANTERIORES

por Bento Caraça

Cometi, pelo visto, um grave crime contra a teoria dos logaritmos e o Dr. Sebastião Silva, animado daquela sagrada ira que só as grandes dedicações inspiram, despeja sôbre mim, de cambulhada com a acusação de irreflectido e responsável pela propagação de erros nefastos, uma taleigada de citações eruditas.

É pouco do meu gôsto êsse jôgo da *citaçãozinha*. Lembro-me sempre do fim lamentável daquele pobre bibliotecário de que nos fala Anatole France, afogado nas fichas da sabença universal. Por isso, vou propôr ao Dr. Sebastião Silva outro jôgo: que deixemos em paz o Leibniz, e o Pasteur e o Klein e que, como homens do nosso tempo, virados para os problemas do nosso tempo e do nosso meio, analisemos, com cuidado e sentido das realidades, o problema em questão.

I — Trata-se do ensino liceal, do ensino ministrado a rapazes e raparigas entre os 10 e os 17 anos, portanto com um condicionamento psicológico próprio, uma capacidade de recepção e de sensibilidade ao facto matemático limitadas por êsse condicionamento.

O ensino liceal é dirigido a *todos*, quer vão ou não freqüentar mais tarde cursos superiores e deve ter, conseqüentemente, por objectivo fornenecer os elementos de cultura geral e a capacidade de actuação indispensável a todo o cidadão.

Esta me parece que deve ser a sua finalidade — *formar cidadãos* — e não formar matemáticos, ou físicos, ou geógrafos, ou alfaiates. Nessa formação, a matemática desempenha um papel de primeira plana, quer pela disciplina mental que pode contribuir para crear, quer pela cultura geral que o conhecimento dos seus conceitos e métodos proporciona, quer ainda pelas suas aplicações práticas imediatas à vida corrente. O seu ensino deve portanto ser orientado dêste triplo ponto de vista. Mas é preciso, se não quizermos estar apenas a construir castelos de cartas, ter em conta o condicionamento a que atraz me referi. Por isso, quando o Dr. Sebastião Silva diz que o ensino liceal da Matemática deve ter um objectivo essencialmente formativo, concordo com êle, mas já o não posso acompanhar quando pretende que êle deve levar ao hábito de *pensar matemàticamente* e ao estudo do *desenvolvimento lógico das teorias*. ¿Reflectiu o Dr. Sebastião Silva maduramente sôbre o que estas duas exigências implicam? ¿e nas suas possibilidades de realização em face de mentalidades médias de menos de 17 anos?

II — A teoria dos logaritmos pode ser encarada de um triplo ponto de vista também — o seu aspecto teórico (construção orgânica da teoria, relações com outras teorias), o seu aspecto de cultura geral, o seu aspecto prático.

Ocupemo-nos do primeiro.

Para se poder fazer uma teoria elementar dos logaritmos, completa e rigorosa, satisfatória do ponto de vista lógico, é preciso conhecer: a teoria do crescimento, a teoria da continuïdade, a teoria da inversão, a teoria da exponencial.

Com estes elementos, a teoria dos logaritmos faz-se com uma simplicidade enorme; não há que estabelecer convenções nem que fazer demonstrações de existência; há apenas que dar uma definição — a da função logarítmica como inversa da exponencial — e que tirar conseqüências imediatas.

Tôda a teoria elementar dos logaritmos que não recôrra a estes elementos é necessàriamente incompleta. ¿Pode fazer-se no liceu uma teoria rigorosa nos moldes que apontei? É evidente que não. Há, portanto, só dois caminhos a seguir — ou renunciar de todo a falar de logaritmos no ensino secundário ou resignarmo-nos a dar uma teoria incompleta.

Sou desta segunda opinião e já pùblicamente a expuz. ¿Como proceder? dar a definição a partir de duas progressões, uma aritmética outra geométrica, em correspondência biunívoca; deduzir, a partir dessa definição, as regras operatórias (para logaritmos racionais) referentes ao produto, cociente e potência de expoente racional e, em seguida, tomar para com os alunos esta atitude clara e simples — a teoria que acaba de ser feita não é rigorosa nem completa; em particular, a regra operatória da potência é generalizável a outros valores do expoente; mas não se pode fazer aqui uma teoria completa; aqueles que seguirem para estudos superiores de Matemática verão mais tarde como ela se faz; aqueles que não seguirem para cursos superiores têm, na teoria que acaba de ser feita, todos os elementos para as aplicações práticas.

Era esta a atitude, pouco mais ou menos, a dos antigos programas do liceu, que neste particular, como em muitos outros, eram incomparàvelmente mais sensatos do que os de hoje.

III — O Dr. Sebastião Silva diz-nos que descobriu outra maneira de tratar a questão, a qual resolve todas as dificuldades: foge ao carácter precário da definição por progressões e evita o recurso a noções que no liceu não podem ser dadas. Vamos analisar essa solução.

Assenta ela no critério seguinte — «dar ao ensino uma orientação de tal modo natural que o aluno seja levado a aceitar os factos intuïtivamente e com uma fôrça de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa dêsses factos».

Notemos, antes de mais:

a) Que se não fala já aqui de «desenvolvimento lógico das teorias». ¿Será esta uma questão de «realidade tangível?»

b) Que a maneira indiscriminada pela qual o Dr. Sebastião Silva emprega, nesta passagem e na nota n.º 2, o termo *intuïção* me parece susceptível de alimentar, no espírito do leitor desprevenido, êrros e confusões. A intuïção é uma faculdade que, como tôdas as faculdades humanas, é susceptível de desenvolvimento. Um artista pode ter, da combinação de côres ou de sons, uma intuïção que escape completamente a quem o não é. Do mesmo modo, um obreiro da Matemática, largamente exercitado no estudo dos seus métodos, pode ter do facto matemático um grau de intuïção totalmente inatingível para pessoas não adextradas. Estou convencido, e já fiz pùblicamente essa afirmação, de que o conceito de número irracional não tem nada de intuïtivo *para mentalidades não adextradas matemàticamente,* o que não exclui que o tenha para outras. Fica assim rectificada a *confusãozinha* da nota n.º 2.

Passemos adiante.

O Dr. Sebastião Silva utiliza para a definição de logaritmo a equação $a^x=b$ a respeito da qual vai até exigir que se mostre que admite solução, quaisquer que sejam a e b positivos ($a \neq 1$). A primeira coisa a fazer quando se tem que trabalhar com símbolos matemáticos é determinar com cuidado o seu significado. ¿O que é a função a^x que figura no primeiro membro da equação? Do que diz na nota 3 depreende-se:

a) que se supõe adquirida a noção de número irracional;

b) que se supõe a função a^x definida para x racional mas não para x irracional.

Quere dizer, o Dr. Sebastião Silva utiliza na sua definição um instrumento — a função a^x — imperfeitamente definido. É curioso que seja a mesma pessoa que condena o uso dum instrumento *prático* que se não aprendeu a construir (mas que se conhece na sua essência e no seu manejo) e que neste mesmo artigo se revolta contra «a insensata despreocupação a respeito da existência das entidades definidas» que venha em seguida advogar o uso dum instrumento *teórico* (donde há de sair tôda a construção) incompletamente definido, de que *se não sabe nada* numa infinidade de casos! infinidade de casos em que a equação de partida é falsa para x racional!

Mas há mais. Depois de mostrar como se pode, a partir da equação $10^x=3$, determinar um valor aproximado do logaritmo decimal de 3, diz-nos que «o problema da existência perdeu agora grande parte do seu interêsse prático e mesmo lógico». Essa agora! Então parte-se duma equação, $10^x=a$, que, para o conjunto de valores em que é definido o primeiro membro, é em geral falsa, e a questão de saber se existe um valor, em geral, fora dêsse conjunto, que a torne verdadeira não tem interêsse lógico?!

¿Tem, ao menos, êste tratamento a vantagem de ser completo? O próprio Dr. Sebastião Silva diz que não, visto que limita o estudo das propriedades operatórias ao caso em que os logaritmos são racionais.

IV. — A solução apresentada não é mais satisfatória se a encararmos do ponto de vista pedagógico.

A função a^x não foi ainda definida para x irracional e o Dr. Sebastião Silva diz na nota 3 que «é o estudo dos logaritmos que faz sentir ao aluno a necessidade de introduzir esta última noção».

A definição de potência de expoente irracional é delicada e pertence ao número daquelas que não podem ser dadas no ensino secundário em condições de eficiência. O introduzi-la a propósito da definição de logaritmo tem, além disso, os seguintes inconvenientes:

a) O de não respeitar o princípio pedagógico da seriação das dificuldades, metendo num único problema duas questões delicadas.

b) O de tirar perspectiva e importância à noção de potência de expoente irracional; o seu papel é mais largo — é o da conservação da continuïdade. Mas disto não pode falar-se no ensino secundário.

c) O de tornar extremamente difícil *para mentalidades de menos de 17 anos* o apreender, neste caso, o carácter convencional que tem tôda a definição. Depois de ter mostrado que da equação

$10^x = a$ se tira, *como único valor possível*, $x = \log_{10} a$ ¿como fazer perceber claramente ao aluno médio do liceu que se toma, para definição, *convencionalmente* e não *obrigatòriamente* $10^x = a$?

¿Não será muito mais sensato evitar no liceu êste escôlho, difícil de ultrapassar? ¿Para fazer compreender o carácter convencional das definições não dispomos de exemplos simples, como as definições de a^0, a^{-n}, etc., que, no entanto, a despeito da sua simplicidade, nem sempre são bem percebidos?

V. — A determinação aproximada dum logaritmo pode fazer-se partindo da definição por duas progressões. O mesmo problema numérico que o Dr. Sebastião Silva trata pode ser posto assim — se existir $\log_{10} 3$ deve poder fazer-se uma inserção conveniente de meios nas duas progressões de modo que na geométrica figure 3 como um dos seus termos; o meio correspondente na progressão aritmética será o seu logaritmo. A inserção de 10 meios leva à construção das duas progressões auxiliares

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \sqrt[10]{10} & \sqrt[10]{10^2} & \sqrt[10]{10^3} & \sqrt[10]{10^4} & \sqrt[10]{10^5} & \sqrt[10]{10^6} \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ & & \sqrt[10]{10^7} & \sqrt[10]{10^8} & \sqrt[10]{10^9} & \sqrt[10]{10^{10}} = 10 & \\ & & 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 1 & \end{array}$$

Verificado que $\sqrt[10]{10^4} < 3 < \sqrt[10]{10^5}$ e que, portanto, se existir $\log_{10} 3$, deve ser $0{,}4 < \log_{10} 3 < 0{,}5$, o raciocínio prosseguirá, levando *exactamente às mesmas contas* e a considerações análogas *de carácter prático e teórico*, mas com as vantagens seguintes:

a) Constituir uma aplicação imediata de um problema já tratado e conhecido — o da inserção de meios.

b) Não introduzir noções novas, o que é conveniente, dada a natureza longa e maçadora dos cálculos a efectuar.

c) Evitar o recurso a instrumentos analíticos mal definidos.

Em resumo, do que se trata é apenas disto — de escolher e dosear as noções e as dificuldades, apropriando-as às necessidades do ensino e às mentalidades dos alunos; é, no fundo, apenas, uma questão de sensatez.

VI. — É tempo de passar ao segundo aspecto que a teoria dos logaritmos apresenta no ensino do Liceu — o seu aspecto de instrumento de cultura geral.

Pelo papel que essa teoria desempenhou na história da Matemática, é justificável que os programas do Liceu não a excluam. Mas é preciso não esquecer que outras teorias, dum valor de cultura geral não menor, se não maior, lá podiam figurar e não figuram. Refiro-me em especial à teoria dos complexos e aos elementos da Geometria Analítica; estas matérias já se ensinaram no Liceu e foram depois suprimidas.

VII. — Ocupemo-nos, finalmente, do último aspecto da questão — o aspecto prático.

Encarados dêste ponto de vista, os logaritmos constituem um *expediente de cálculo,* importante sem dúvida, mas um expediente, que deve ser colocado no seu lugar, sem roubar o espaço necessário para o tratamento de outras questões igualmente, ou mais, importantes.

Nem sempre se tem o bom senso de proceder assim e há uma tendência entre nós para a idolatria da táboa de logaritmos. Um ponto de exame no Liceu vi eu já em que se exige um cálculo tão rigoroso, tão rigoroso, que se determina a posição dum navio no mar a menos de um milímetro! Quando as coisas são levadas a êste ponto, os instrumentos de cálculo deixam de ser instrumentos de cálculo para se transformarem em manipansos exercendo, por intermédio dos seus sacerdotes, a sua *tiraniazinha* sôbre a pobre massa académica.

Há entre nós mais *sacerdotes do manipanso* do que parece à primeira vista, e o Dr. Sebastião Silva, ao sugerir que os alunos do Liceu construam uma táboa de 4 decimais — o que se assemelha mais a um castigo em regime de trabalhos forçados do que a um exercício de classe — não está muito longe dessa posição. E não são as comparações mais ou menos arbitrárias, nem o palavreado mais ou menos sonoro e floreado, nem a invocação de Pasteur e da humanidade sonhadora que o afastam dessa posição.

Na nota que escrevi no n.º 11 da «Gazeta», a propósito da sua 3.ª interrogação, discordei da sua sugestão para se ensinasse no Liceu a construir uma táboa de logaritmos. Os motivos da discordância foram, como escrevi então:

a) Que o processo pelo qual as táboas são *efectivamente* construídas não está ao alcance do ensino do Liceu.

b) Que o tempo que se levaria a ensinar *como se pode fazer mas se não faz* é precioso para ensinar coisas mais importantes. Lembrei nessa altura o manejo da régua de cálculo e da máquina de calcular; lembro agora tôdas aquelas matérias que indevidamente foram cortadas dos programas, como a importantíssima questão das aproximações no cálculo numérico, a resolução de triângulos não rectângulos etc. e ainda aquelas que nunca lá figuraram mas que na vida contemporânea têm uma importância tal que devem ser ensinadas a todos; estão neste caso, por exemplo, a noção de probabilidade e os rudimentos da estatística.

c) Que não há vantagem em mostrar *como se pode construir mas não se construe* um instrumento que encontramos já construido no mercado.

d) Que o estudo detalhado da questão poderia interessar aqueles que mais tarde se destinem à construção de tábuas de logaritmos (quantos serão?) mas não a todos.

O Dr. Sebastião Silva parece ter lido essa nota com uma estranha lente que o fêz ver coisas que lá não estão. Efectivamente, no seu artigo acusa-me, com o auxílio de algumas *citaçõezinhas*, de cair em grave contradição por preconizar o ensino do manejo da régua de cálculo sem o conhecimento dos logaritmos, contradição essa que deve radicar na minha ignorância do que seja uma régua de cálculo. O Dr. Sebastião Silva podia ter *reflectido maduramente* em que a primeira coisa a fazer quando se pretende atacar a posição de alguém é conhecê-la. ¿Onde é que eu digo nessa nota que sou contra o ensino dos logaritmos no Liceu? Ou, para o Dr. Sebastião Silva ¿é a mesma coisa saber o que é um logaritmo e saber construir uma tábua de logaritmos?

VIII — Causou estranheza a várias pessoas a minha interrogação, na nota do n.º 11 da *Gazeta*, sôbre a vantagem de mostrar como se pode construir um instrumento que encontramos construído no mercado.

Entendamo-nos. Que um profissional deve possuir a fundo, não só a essência e o manejo, mas os segredos da construção dos instrumentos que usa, é evidente, e nunca o puz em dúvida. Mas o ensino liceal não se destina à formação de profissionais, como disse no comêço.

Que todo o cidadão deva ser capaz de improvisar aqueles instrumentos de que na sua vida mais necessita, também é fora de dúvida. ¿Mas está a tábua de logaritmos nesse caso? Quantas vezes tem, aquele que se não dedica a uma carreira de profissional da Matemática, que recorrer na sua vida a uma tábua de logaritmos? ¿E está-se vendo um indivíduo, com um cociente ou um raiz a calcular urgentemente, pôr-se a calcular prèviamente uma tábua de logaritmos? ¡Quantas outras coisas mais importantes, e interessando incomparàvelmente mais a vida do cidadão, há a conhecer — uma tábua de mortalidade, por exemplo — e de que no ensino liceal nem sequer se fala!

Uma vez que a tábua de logaritmos desempenha na vida do cidadão um papel reduzidíssimo — e cada vez mais reduzido, pela generalização do emprêgo da régua de cálculo e da máquina de calcular — o perder um tempo precioso com a maneira pela qual ela se pode construir e não se construe só se justificaria por qualquer destas razões: ou por ser um objecto duma raridade extrema, o que não é verdade; ou porque êsse modo hipotético de construção lançasse luz sôbre algum método importante da Matemática que pedagògicamente conviesse pôr em relêvo por êsse meio, o que também não é verdade; ou ainda porque êsse processo fôsse de tal modo atraente que pudesse contribuir para fazer amar a Matemática pelos estudantes, o que ainda é menos verdade.

Então, para quê?

IX — Resumindo, a minha opinião a respeito dos logaritmos no ensino secundário é a seguinte:

Que se mantenha nos programas o ensino dos logaritmos mas a partir de duas progressões, como indico em II.

Que, em relação com o problema da inserção de meios, se dêem alguns exemplos em que o logaritmo é racional e se ponham os alunos em face do problema da irracionalidade.

Que, após estes conhecimentos teóricos, se ensine o manejo dos dois instrumentos, tábua de logaritmos e régua de cálculo, mostrando os inconvenientes e vantagens de cada um em relação ao outro, dentro do problema das aproximações no cálculo numérico e da necessidade que o homem-de-todos-os-dias naturalmente virá a ter de um e de outro.

Que o tempo a tomar com êsse ensino seja proporcionado à sua importância dentro do problema do cálculo numérico e à dêste dentro do ensino secundário, das suas exigências e dos seus objectivos.

Nota — O Dr. Sebastião Silva diz na nota final do seu artigo que me apoia na atitude que tenho tomado dentro da Comissão Pedagógica da Sociedade Portuguesa de Matemática por uma reforma do ensino secundário. Como nunca tinha dado por isso, apesar de nos termos muitas vezes encontrado em ocasiões e locais em que êle poderia ter dado a êsse movimento a cota parte do seu esfôrço, registo agora o facto com satisfação.