A grandeza dêstes homens não afecta, em qualquer caso, o juízo sôbre o que falta à sua inteligência: do ponto de vista fisiológico são, igualmente, deficiências que, em circunstâncias especiais, são largamente compensadas, mas, nem por isso, deixam de ser deficiências efectivas.

Entre os espíritos avessos, dêste modo, à compreensão científica, pode recordar-se o grande romântico histórico *Carlyle* que considerava ridículo que alguém pudesse ocupar-se da velocidade de deslocamento dum glaciar. *C. Darwin*, que com êle estava ligado pela amizade do irmão *Erasmo*, dizia: «Por quanto posso julgar, nunca encontrei um homem cujo espírito seja tão pouco dado à investigação científica» e, acrescentava, «as suas descrições são vivas: ¿são também exactas?»

Como acontece habitualmente com as coisas humanas, o que é capaz de suscitar os maiores entusiasmos provoca também, naturalmente, o ódio e o desprêzo dos que não sabem compreender o seu valor; por isso não pasma o juízo desfavorável que têm formulado, sôbre a matemática e sôbre a ciência em geral, alguns poetas:

«Verdadeiro deserto que dos vates é tumba». *(Monti)*.

«O ensino das matemáticas faz do homem máquina e degrada o pensamento. A alma dum povo não é êsse número mudo e morto com auxílio do qual êle conta as quantidades e mede as extensões: a toesa e o compasso fazem outro tanto» *(Lamartine)*.

«Desconfiai das bruxarias e das atracções diabólicas da geometria» *(Fenelon)*.

Owen, filósofo da natureza, pretendia constituir uma subespécie humana com o «homo mathematicus».

Ao contrário, *Sully Prudhomme* conta assim a felicidade dos geómetras: «Oh, produzir a beleza indiscutível, como a dum teorema demonstrado com uma simplicidade engenhosa, com elegância numa palavra, e dum alcance tão largo que dela depende a predição dos movimentos celestes! É-vos permitida tal coisa, a vós artistas, a vós sobretudo poetas, experimentar jamais o orgulho tranqüilo duma tal criação?»

Tradução de A. SÁ DA COSTA

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1941)

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo.

Ponto n.º 1

1091 — Determine as condições a que devem satisfazer os valores de x que verificam a desigualdade: $3+1:(x-1)>1:(2x+1)$. R: *A desigualdade proposta é equivalente a* $\frac{3x-3+1}{x-1}-\frac{1}{2x+1}>0$ *ou* $\frac{(3x-2)(2x+1)-(x-1)}{(x-1)(2x+1)}>0$ *ou ainda* $(6x^2-2x-1):[(x-1)\times(2x+1)]>0$. *Os valores de* x *pedidos são então os que tornam simultâneamente positivos ou negativos ambos os termos da fracção primeiro membro desta última desigualdade. Ora o primeiro termo é positivo para valores de* x *superiores a* $\frac{1+\sqrt{7}}{6}$ *ou inferiores a* $\frac{1-\sqrt{7}}{6}$, *e negativo para os valores de* x *compreendidos entre êstes dois valores. O segundo têrmo torna-se positivo para valores de* x *superiores a* $+1$ *ou inferiores a* $-\frac{1}{2}$, *e negativo para os valores de* x *compreendidos entre estes dois valores. Logo os valores de* x *que verificam a desigualdade proposta são os valores de* x *que verificam uma qualquer das desigualdades:* $x<-\frac{1}{2}$; $x>1$ *e* $\frac{1-\sqrt{7}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{7}}{6}$.

1092 — Forme a equação do 2.º grau cujas raízes são: $-3+2i$ e $-3-2i$. R: *A equação é* $(x+3-2i)(x+3+2i)=0$ *ou* $x^2+6x+13=0$.

1093 — Enuncie os teoremas que conhece sôbre a existência das soluções inteiras e a existência de soluções inteiras e positivas da equação do 1.º grau em x e y.

1094 — Sendo $\operatorname{tg} x=b/a$ verifique que é $a\cos 2x+b\operatorname{sen}2x=a$. R: *De* $\operatorname{tg} x=b/a$ *deduzem-se sucessivamente as igualdades* $a\operatorname{sen}x=b\cos x$; $a\operatorname{sen}^2 x=b\operatorname{sen}x\cos x$; $2a\operatorname{sen}^2x=2b\operatorname{sen}x\cos x$; $a\operatorname{sen}^2x+a\operatorname{sen}^2x=b\operatorname{sen}2x$; $a(1-\cos^2x)+a\operatorname{sen}^2x=$ $=b\operatorname{sen}2x$ *ou finalmente* $a=a\cos 2x+b\operatorname{sen}2x$.

1095 — Determine sem recorrer às tábuas os valores do seno e do coseno de um ângulo de 3º quadrante cuja tangente é igual a $3/4$. R: *como* $\operatorname{tg}x=3/4$ *é* $\operatorname{sen}^2x/\cos^2x=9/16$ *e* $25\operatorname{sen}^2x=9$ *donde* $\operatorname{sen}x=\pm3/5$ *e como o arco é de* 3º *quadrante será* $\operatorname{sen}x=-3/5$ *e* $\cos x=-4/5$.

1096 — Determine, recorrendo ao cálculo logarítmico o valor dos ângulos de um triângulo em que dois vértices são os extremos do diâmetro de uma circunferência com um raio de 11,536 metros e o terceiro vértice é o extremo da corda com o comprimento de 16,951 metros, tirada de um dos extremos do referido diâmetro. R: *O triângulo é rectângulo sendo a hipotenusa o diâmetro da circunferência, logo um dos ângulos mede* 90°. *O seno do ângulo opôsto ao cateto que mede* 16,951 *metros, será* $\operatorname{sen} B = \frac{16{,}951}{23{,}072}$ *visto a hipotenusa medir* 23,072 *metros. Então será* $\log \operatorname{sen} B = \log 16{,}951 + \operatorname{colg} 23{,}072 = 1{,}22920 + \bar{2}{,}63692 = \bar{1}{,}86612$ *e* $B = 47°17'$. *O outro ângulo agudo será* $C = 90 - B = 42° 34'$.

1097 — Determine os divisores comuns dos três números: 1800, 840 e 120. R: *Como* 120 *é o* m. d. c. *dos três números e é* $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, *os divisores comuns aos três números serão as parcelas do desenvolvimento do produto* $(1+2+4+8)(1+3)(1+5)$ *que são os números:*

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120$.

1098 — Figure duas circunferências tangentes interiormente em A. Pelo ponto B diametralmente opôsto a A na circunferência de maior raio, tire a corda BC, tangente em D à circunferência interior. Una A com C. Demonstre que a recta AD é bissectriz do ângulo BAC. R: *O triângulo* BAC *é rectângulo em* C. *Unamos* O', *centro da circunferêdcia de menor raio, com* D. O'D *é perpendicular a* BC, *logo paralela a* AC. *Os ângulos* CAD *e* ADO' *são iguais por serem alternos internos (paralelas* AC *e* DO', *secante* DA*). Por outro lado é* $\widehat{ADO'} = \widehat{DAB}$ *por serem dois ângulos da base do triângulo isósceles* ADO'. *Logo será* $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ *e portanto* AD *bissectriz do ângulo* BAC.

Curso de habilitação para professores de desenho nos liceus

Ponto n.° 1

1099 — Indique as condições a que deve satisfazer k para que a inequação $x^2 - 2kx - k^2 + x - 2k + 1 > 0$ seja verificada por qualquer valor real atribuído a x. R: *Sendo o primeiro membro um trinómio do 2.° grau em* x, *é necessário e suficiente que o seu descriminante seja negativo para o trinómio tomar, para qualquer valor real de* x, *o sinal do coeficiente do têrmo em* x^2 *que neste caso é a unidade positiva. Será então* $(2k-1)^2 + 4(k^2+2k-1) < 0$ *ou* $8k^2 + 4k - 3 < 0$; *e como as raizes dêste trinómio são* $k = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$ *os valores de* k *pedidos são os que satisfazem à dupla desigualdade* $\frac{-1-\sqrt{7}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$.

1100 — A equação $143x - 22y = 121$ admite soluções inteiras e positivas? Justifique a resposta. R: *A equação proposta é equivalente a* $13x - 2y = 11$ *a qual admite soluções inteiras por os coef. de* x *e* y *serem primos entre si, e uma infinidade de soluções inteiras e positivas em vista daqueles coeficientes serem de sinais contrários.*

1101 — Calcule $1/5 \operatorname{colog} 1000$.
R: $1/5 \operatorname{colog} 1000 = 1/5 \log 1/10^3 = 1/5 \cdot (-3) = -3/5$.

1102 — Determine, por logaritmos, o comprimento de uma corda que subtende um arco de 59°31' num círculo de raio 3,54 metros. R: $l = 2 \times 3{,}54 \times \operatorname{sen} 29° 45' 30''$ *donde é* $\log l = \log 2 + \log 3{,}54 + \log \operatorname{sen} 29° 45' 30'' = 0{,}30103 + 0{,}54900 + 1{,}69578 = 0{,}54581$ *donde* $l = 3{,}514$ metros.

1103 — Determine o valor de $\operatorname{cosec} \alpha$ sabendo que $3 \operatorname{tg} \alpha = 2 \sec \alpha$. R: *Tem-se a partir de* $3 \operatorname{tg} \alpha = 2 \sec \alpha$, $\operatorname{sen} \alpha = 2/3$ *e* $\operatorname{cosec} \alpha = 3/2$.

1104 — Dedusa o valor da razão dos volumes de um cubo e de uma esfera que tem áreas iguais. R: *Será* $6 l^2 = 4\pi r^2$ *se forem* l *e* r *a aresta do cubo e o raio da esfera; e por isso é* $l = 1/3 \sqrt{6\pi} \cdot r$: *o volume do cubo é* $V_1 = l^3 = 2\pi r^3 \sqrt{6\pi} : 9$ *e o volume da esfera* $V_2 = 4/3 \pi r^3$, *donde a razão dos volumes* $V_1 : V_2 = \sqrt{\pi/6}$.

1105 — Quanto mede em unidades sexagessimais o ângulo interno de um octogono regular. R: *mede* $180° - 360° : 8 = 135°$.

1106 — Defina triedros suplementares e indique as relações que existem entre as medidas dos seus elementos (faces e diedros).

1107 — Demonstre que se adicionar uma unidade ao produto de dois números ímpares consecutivos obtém um quadrado perfeito. R: *Sejam* $2k+1$ *e* $2k+3$ *os 2 n.os impares consecutivos; então:* $(2k+1)(2k+3) + 1 = 4k^2 + 8k + 3 + 1 = (2k+2)^2$.

Ponto n.° 5

1108 — Indique as condições a que deve satisfazer K para que as raízes da equação $x^2 + 1/4 (3 + Kx)^2 - 1 = 0$ sejam números imaginários. R: *A equação dada é equivalente a* $(4 + K^2) x^2 +$

$+6\,Kx+5=0$, *cujo descriminante* $9\,K^2-5(4+K^2)$ *deverá ser negativo, isto é* $K^2-5<0$ *logo* K *satisfará a dupla desigualdade* $-\sqrt{5}<K<\sqrt{5}$.

1109 — Determine *n* de modo que se verifique a seguinte igualdade: ${}^{n-1}A_6 : {}^{n}A_6 = 2/5$.
R: $[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)] : [n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)] = 2/5$ *ou* $(n-6) : n = 2/5$ *ou* $5n-30=2n$, $3n=30$ *e* $n=10$.

1110 — Torne racional o denominador da fracção $2/\sqrt[5]{20}$ e simplifique o resultado. R: $2/\sqrt[5]{20} = 2\sqrt[5]{20^4}/20 = \sqrt[5]{4^4 . 5^4}/10 = 2\sqrt[5]{2^3\times 5^4}/10 = \sqrt[5]{5000}/5$.

1111 — Determine, por logaritmos, a área de um triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede $23^m,12$ e em que um dos ângulos mede $49^o\,37'\,23''$. R: *A área é dada pela expressão* $a^2/4$ sen $2\,\alpha$ *sendo* a *a hipotenusa e* α *um dos ângulos. Então é* $A=23{,}12^2/4$ sen $99^o\,14'\,46''$ *e* $\log A = 2\log 23{,}12 + 2\,\mathrm{colg}\,2 + \log \mathrm{sen}\,80^o\,45'\,14'' = 2\times 1{,}36399 + \bar{1}{,}39794 + \bar{1}{,}99432 = 2{,}12024$ *donde* $A = 131{,}9^{\,m^2}$.

1112 — Exprima $\cot(3/2\,\pi - x)$ numa função circular do ângulo x. Justifique a resposta.
R: $\cot(3/2\,\pi - x) = \cot(\pi/2 - x) = \mathrm{tg}\,x$.

1113 — É dado um triângulo equilátero ABC; trace pelos seus vértices A, B e C rectas perpendiculares aos lados AB, BC e CA, respectivamente, de modo a formar um outro triângulo. Prove que êste é equilátero e deduza o valor da razão da sua área e da do triângulo dado. R: *Seja* A′B′C′ *o novo triângulo em que* A′B′ *é a perpendicular a* AB, B′C′ *perpendicular a* BC *e* A′C′ *perpendicular a* CA; *então será* $A'\hat{B}'C' = A\hat{B}C$; $B'\hat{C}'A' = B\hat{C}A$ *e* $C'\hat{A}'B' = C\hat{A}B$, *porque são ângulos que têm os lados perpendiculares e são da mesma natureza. Assim, se o primeiro triângulo é equilátero o segundo também o é. Se fôr* 1 *o lado do primeiro calculemos a razão de semelhança dos dois triângulos. Para isso calculemos o lado* A′B′ *do triângulo maior. Êste lado é dividido pelo vértice* A *em dois segmentos* AA′ *e* B′A = CA′ *que são a hipotenusa e um cateto do triângulo* AA′C *rectângulo em* C, *e semelhante a um dos triângulos que se determinam em* ABC *quando se baixa a altura relativa a qualquer dos lados, e medindo a altura* $1\sqrt{3}/2$ *será* $1 : AA' = 1\sqrt{3}/2 : 1$ *donde* $AA' = 2\,1\sqrt{3}/3$. *Por outro lado é* $4\,1^2/3 = 1^2 + A'C^2$ *e* $A'C = 1\sqrt{3}/3$; *finalmente* $A'B' = 2\,1\sqrt{3}/3 + 1\sqrt{3}/3 = 1\sqrt{3}$. *Como a razão das áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança e esta é* $1\sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$ *temos que a razão pedida é igual a* 3.

1114 — Qual é a posição, em relação ao centro de homotetia, de duas figuras homotéticas quando a razão de homotetia é igual à unidade negativa. R: *São simétricas, pois a homotetia de razão* $r=-1$ *é uma simetria em relação ao centro da homotetia.*

1115 — Qual é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de dois pontos dados. R: *É o plano perpendicular ao meio no segmento que une os dois pontos.*

1116 — Defina fracções iguais e enuncie a condição necessária e suficiente para que as duas fracções o sejam. R: *Duas fracções são iguais quando medem a mesma grandeza. É condição necessária e suficiente, para que duas fracções* a/b *e* c/d *sejam iguais que se verifique a igualdade* ad = bc.

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 2

1117 — As distâncias de um ponto às duas faces de um angulo diedro de $65^o\,35'$ são iguais a $5^m,32$ e $3^m,65$. Calcule a distância do mesmo ponto à aresta do diedro. R: *Seja* d *a distância pedida* α *o ângulo que forma a recta sôbre a qual se conta* d *com a recta sôbre a qual se marca a distância* $5^m,32$ *do ponto a uma das faces do diedro; o ângulo formado pela recta sôbre a qual se marca* $3^m,65$, *distância do ponto à outra face com a perpendicular baixada do ponto para a aresta do diedro medirá* $(180^o - 65^o\,35') - \alpha = 114^o\,25' - \alpha$. *Por isso será* $d = 5{,}32\cos\alpha$ *ou* $d = 3{,}65\cos(114^o\,25' - \alpha)$ *donde* $5{,}32\cos\alpha = 3{,}65\,[\cos 114^o 25' \cos\alpha + \mathrm{sen}\,114^o 25'\,\mathrm{sen}\,\alpha]$ *e* $5{,}32 : 3{,}65 = \cos 114^o\,25' + \mathrm{sen}\,114^o\,25'\,\mathrm{tg}\,\alpha$ *e portanto* $\mathrm{tg}\,\alpha = [5{,}32/3{,}65 - \cos 114^o\,25'] : \mathrm{sen}\,114^o\,25'$ *ou* $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}47\,\mathrm{cosec}\,66^o\,35' + \mathrm{cotg}\,65^o\,35' = 1{,}47\times 1/0{,}911 + 0{,}454 = 1{,}614 + 0{,}454 = 2{,}068$ *e* $\alpha = 64^o\,11'$ *e finalmente* $d = 5{,}32\cos 64^o\,11' = 5{,}32\times 0{,}435 = 2^m,31$.

1118 — Indique gràficamente como varia a secante de um ângulo, quando êste varia de 0^o a 360^o.

1119 — Simplifique a expressão:
$(x^2-1-x^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha) : [(y^2x-x)(x-1)]$.

R: $$\frac{x^2-1-x^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{(y^2x-x)(x-1)} = \frac{x^2-1-\cos^2\alpha(x^2-1)}{x(y^2-1)(x-1)} = \frac{(x^2-1)(1-\cos^2\alpha)}{x(y^2-1)(x-1)} = \frac{\mathrm{sen}^2\alpha\,(x+1)}{x(y^2-1)}.$$

1120 — Diga o que entende por combinações de 5 objectos 3 a 3. Forme essas combinações com as cinco primeiras letras do alfabeto e verifique o seu número pela respectiva fórmula.

1121 — Em que se baseia a prova dos 9 da multiplicação? Demonstre-o, Pondo fora de discussão a possível maior simplicidade da prova dos 9 sôbre a prova dos 3, apresenta ela outra vantagem? R: *A prova dos* 9 *baseia-se no seguinte teorema: «o produto dos restos da divisão de dois ou mais números por um dado divisor e o produto dos números quando divididos por êsse divisor dão restos iguais.»*

Seja $a\times b=p$ *e* $a=\dot{d}+r_1\ b=\dot{d}+r_2$ *então é* $(\dot{d}+r_1)\ (\dot{d}+r_2)=p$ *ou* $\dot{d}+r_1\,r_2=p$ *o que prova o teorema.*

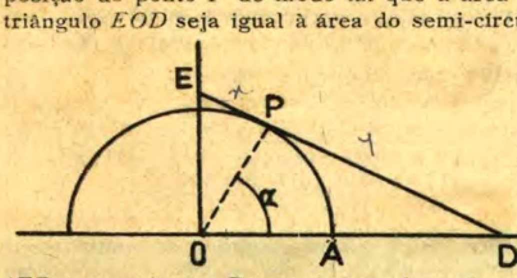
Teòricamente as duas provas são equivalentes simplesmente a prova pelo divisor 3 *não assinalando todos os êrros que a prova pelo divisor* 9 *não assinala, não dá conta ainda dos êrros que sejam múltiplos de* 3 *ou de* 6 *que não sejam de* 9.

1122 — Diga como traça uma recta cujas distâncias a, b e c a três pontos fixos A, B e C não colineares formem uma progressão geométrica de razão 2. Diga ainda quantas soluções tem o problema (principie por considerar apenas dois pontos e estudar as propriedades das rectas que satisfazem às condições do problema assim fraccionado). R.: *Sejam dois pontos* A *e* B; *as rectas que satisfazem ao problema são as tangentes comuns exteriores e interiores às duas circunferências de centros* A *e* B *e raios* a *e* b. *Neste caso poderá haver* 4, 2 *ou* 0 *soluções. No caso dos três pontos é necessário que a terceira circunferência de centro* C *e raio* c *seja tangente a uma das rectas anteriormente determinadas, para que o problema tenha solução e vê-se fàcilmente que poderá haver* 3, 2, 1 *ou* 0 *soluções.*

Soluções dos n.os 1091 a 1122 de J. Paulo.

I. S. C. E. F. — 29 de Julho de 1942

1123 — *a)* Dê a definição e as propriedades da semelhança de triângulos. *b)* Dada a semi-circunferência de raio r da figura junta, determine a posição do ponto P de modo tal que a área do triângulo EOD seja igual à área do semi-círculo



(ED é tangente em P à semi-circunferência e OE é perpendicular a OD). ¿Para que posição de P é mínima a área do triângulo? ¿E qual é êsse mínimo? R: *Área do semi-círculo* $\pi r^2/2$. *Área do triângulo* EOD $\overline{ED}\times\overline{OP}/2=(\overline{EP}+\overline{PD})r/2=|tg\alpha+cotg\alpha|\ r^2/2$. *Igualando vem* $tg\alpha+cotg\alpha=\pi$ *donde* $tg^2\alpha-\pi\,tg\alpha+1=0$ *e* $tg\alpha=(\pi\pm\sqrt{\pi^2-4})/2$. *A área do triângulo* EOD *será mínima quando fôr mínimo* $|tg\alpha+cotg\alpha|=\frac{sen^2\alpha+cos^2\alpha}{|sen\alpha\cdot cos\alpha|}=\frac{2}{|sen\,2\alpha|}$ *por conseqüência, para* $|sen\,2\alpha|=1$ *ou* $2\alpha=\pi/2+k\pi$ *donde* $\alpha=\pi/4+k\pi/2$. *O valor dêsse mínimo é* r^2.

1124 — Determine a, b e c de modo que a função $y=ax^2+bx+c$ tome para $x=1$, $x=2$, $x=3$ respectivamente, os valores $y=1$, $y=2$, $y=7$. R: *Tem-se*

$$\begin{cases} a+b+c=1\\ 4a+2b+c=2\\ 9a+3b+c=7\end{cases}\quad \begin{cases} a+b+c=1\\ 3a+b=1\\ 5a+b=5\end{cases}\quad \begin{cases} a+b+c=1\\ 3a+b=1\\ a=2\end{cases}\quad \begin{cases} a=2\\ b=-5\\ c=4\end{cases}$$

$$y=2x^2-5x+4.$$

1125 — Dadas duas circunferências concêntricas de raios 18,37 metros e 25,43 metros, calcule a área da porção da corôa determinada por dois raios formando entre si um ângulo de 58° 18′. R: *Área duma porção de corôa circular determidada por dois raios cujo ângulo mede* α *graus é*

$$S=\frac{\alpha}{360}\cdot\pi(R^2-r^2)=\frac{\alpha}{360}\cdot\pi(R+r)(R-r).$$ *Substituindo valores e notando que* $58°\,18'=58°,3$

$$S=\frac{58,3}{360}\times 3,14\times 43,8\times 7,06.$$ *Cálculo de* S:

log 58,3	=1,7656686
colog 360 (log 360=2,5563025)	$=\bar{3},4436975$
log 3,14	=0,4969296
log 43,8	=1,6414741
log 7,06	=0,8488047
	log S=2,1965745

log S=2,1965745 S=157,24 metros
1965630 15724

1126 — *a)* Defina simetria em relação a um ponto e a um plano; enuncie algumas propriedades importantes. *b)* É dado um paralelipípedo cujas faces são losangos dos quais uma das diagonais é igual ao lado a. Calcule o volume dêsse paralelipípedo em função de a. R: *O paralelipípedo pode decompor-se em seis tetraedros regulares de aresta* a. *Logo* $V=6v$ *onde* $v=\frac{1}{3}b\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot ah_b\,h=\frac{1}{6}a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\cdot$ *Então será*

$$V=a^3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1127 — Prove que $sec^2\alpha+cosec^2\alpha=sec^2\alpha\cdot cosec^2\alpha$. Usando esta identidade, determine um par de números racionais cuja soma seja igual ao seu produto. R: $\frac{sen^2\alpha+cos^2\alpha}{sen^2\alpha\cdot cos^2\alpha}=\frac{1}{sen^2\alpha\cdot cos^2\alpha}\cdot$ *Seja* $sec^2\alpha=p/q$. *Substituindo na identidade obtém-se* $cosec^2\alpha=p/(p-q)$. *Portanto, para* $p/q=1/2$, *por* *exemplo, vem* $p/(p-q)=-1$. *Verificação* $\frac{1}{2}-1=-1\times\frac{1}{2}$.

1128 — Calcule a soma $S=2+\frac{a+b}{a\cdot b}+\frac{a^2+b^2}{a^2\cdot b^2}+\cdots+\frac{a^n+b^n}{a^n\cdot b^n}$. R: $S=2+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{a^n}=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}\right)+\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\cdots+\frac{1}{b^n}\right)=\frac{1-a^{-n-1}}{1-a^{-1}}+\frac{1-b^{-n-1}}{1-b^{-1}}=\frac{a^{n+1}-1}{a^{n+1}-a^n}+\frac{b^{n+1}-1}{b^{n+1}-b^n}$.

Soluções dos n.os 1123 a 1128 de A. Sá da Costa.

MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **1.º exame de freqüência 26-2-1942**

Ponto n. 2

a) — Produto e cociente de números complexos (formas algébrica e trigonométrica).

b) — Produto interno e produto externo de 2 vectores. Definições e expressões cartesianas.

c) — Defina: feixe e estela de planos, feixe e estela de rectas. Escreva as equações destas famílias em coordenadas cartesianas.

d) — Sistemas de geratrizes rectilíneas no hiperboloide de 1 fôlha.

1129 — Estude o sistema: $\begin{cases} x+y+z=0\\ x+2y+z=1\\ x+3y+z=1\\ x+y+3z+3. \end{cases}$

Interprete geomètricamente o estudo feito.
R: *4 planos os 3 primeiros pertencem ao mesmo feixe.*

1130 — Mostre que as raízes da equação $(z+i)^m-(z-i)^m=0$ são reais. (Resolva a equação reduzindo-a a uma equação binómia pela mudança de variável $\frac{z+i}{z-i}=u$). R: $\frac{z+i}{z-i}=u\to u^m-1=0\to$

$$\to u=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{m}\quad(k=0,1,\cdots m-1)$$

$$z=-i\frac{1+u}{1-u}=-i\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{m}+i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{m}}{1-\cos\frac{2k\pi}{m}-i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{m}}=$$

$$=\frac{\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{m}}{1-\cos\frac{2k\pi}{m}}=\mathrm{cotg}\frac{k\pi}{m}\quad(k=0,1,\cdots m-1).$$

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Exame final, Julho de 1942**

1131 — Escrever as equações da circunferência de raio $R=3$, cujo centro é um dos pontos da recta $2y=x=z$ à distância 4 da origem e cujo plano é normal à recta. R: *Seja* $C(2\alpha,\ \alpha,\ 2\alpha)$ *o centro. Tem-se* $9\alpha^2=4^2$, $\alpha=\pm 4/3$, *donde* $C(8/3, 4/3, 8/3)$ *e* $C'(-8/3,\ -4/3,\ -8/3)$. *Há pois duas circunferências nas condições indicadas que podem ser definidas pela intersecção das superfícies: esfera de centro* C (*ou* C′) *e raio* $R=3$ *e plano normal à recta dada passando por* C (*ou por* C′). *Assim, por exemplo, a de centro* C *tem por equações*

$$\begin{cases}(x-8/3)^2+(y-4/3)^2+(z-8/3)^2=9\\ 2(x-8/3)+(y-4/3)+2(z-8/3)=0.\end{cases}$$

1132 — Mostrar que a equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}-2\lambda\frac{dy}{dx}+(\lambda^2+\mu^2)y=0$ é verificada por

$$y=e^{\lambda x}(A\cos\mu x+B\,\mathrm{sen}\,\mu x).$$

1133 — Mostrar que a equação $2xy-5z=0$ representa um paraboloide hiperbólico. (Efectuar uma rotação de 45º dos eixos OX e OY em tôrno de OZ). R: *Efectuando a transformação indicada:* $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$, $z=Z$, *vem, imediatamente,* $X^2-Y^2-5Z=0$.

1134 — Determinar os máximos e mínimos da função $y=x^4-6$. Representação geométrica da função.

Soluções dos n.os 1129 a 1134 de Manuel Zaluar.

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Outros pontos de exames finais de 1942**

1135 — Mostrar que a superfície de equação $(z-1)^3-(x^2+y^2)^2=0$ é de revolução. Escrever as equações do paralelo e as do meridiano que passam pelo ponto (1, 0, 2).

1136 — O polinómio $P(x)$ é do 5.º grau, é divisível por x^2+1, anula-se para $x=0$, admite a raiz real dupla -4 e toma o valor 100 para $x=1$. Determiná-lo.

1137 — Dada a circunferência de equações: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-10y=0\\ x-2z=0\end{cases}$ determinar: *a)* as equações da recta que passa pelo centro e é normal ao seu plano; *b)* as equações das esferas de raio 7 que