exemplo, vem $p/(p-q)=-1$. *Verificação*
$$\frac{1}{2}-1=-1\times\frac{1}{2}.$$

1128 — Calcule a soma $S=2+\frac{a+b}{a\cdot b}+\frac{a^2+b^2}{a^2\cdot b^2}+\cdots+\frac{a^n+b^n}{a^n\cdot b^n}$. R: $S=2+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{a^n}=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}\right)+\left(1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\cdots+\frac{1}{b^n}\right)=\frac{1-a^{-n-1}}{1-a^{-1}}+\frac{1-b^{-n-1}}{1-b^{-2}}=\frac{a^{n+1}-1}{a^{n+1}-a^n}+\frac{b^{n+1}-1}{b^{n+1}-b^n}$.

Soluções dos n.os 1123 a 1128 de A. Sá da Costa.

MATEMÁTICAS GERAIS - ÁLGEBRA SUPERIOR - COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **I.º exame de freqüência 26-2-1942**

Ponto n. 2

a) — Produto e cociente de números complexos (formas algébrica e trigonométrica).

b) — Produto interno e produto externo de 2 vectores. Definições e expressões cartesianas.

c) — Defina: feixe e estela de planos, feixe e estela de rectas. Escreva as equações destas famílias em coordenadas cartesianas.

d) — Sistemas de geratrizes rectilíneas no hiperboloide de 1 fôlha.

1129 — Estude o sistema: $\begin{cases} x+y+z=0\\ x+2y+z=1\\ x+3y+z=1\\ x+y+3z+3. \end{cases}$

Interprete geomètricamente o estudo feito. R: *4 planos os 3 primeiros pertencem ao mesmo feixe.*

1130 — Mostre que as raízes da equação $(z+i)^m-(z-i)^m=0$ são reais. (Resolva a equação reduzindo-a a uma equação binómia pela mudança de variável $\frac{z+i}{z-i}=u$). R: $\frac{z+i}{z-i}=u\rightarrow u^m-1=0\rightarrow$
$$\rightarrow u=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{m}\quad(k=0,1,\cdots m-1)$$
$$z=-i\frac{1+u}{1-u}=-i\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{m}+i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{m}}{1-\cos\frac{2k\pi}{m}-i\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{m}}=$$
$$=\frac{\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{m}}{1-\cos\frac{2k\pi}{m}}=\mathrm{cotg}\frac{k\pi}{m}\quad(k=0,1,\cdots m-1).$$

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Exame final, Julho de 1942**

1131 — Escrever as equações da circunferência de raio $R=3$, cujo centro é um dos pontos da recta $2y=x=z$ à distância 4 da origem e cujo plano é normal à recta. R: *Seja* $C(2\alpha,\alpha,2\alpha)$ *o centro. Tem-se* $9\alpha^2=4^2$, $\alpha=\pm4/3$, *donde* $C(8/3, 4/3, 8/3)$ *e* $C'(-8/3, -4/3, -8/3)$. *Há pois duas circunferências nas condições indicadas que podem ser definidas pela intersecção das superfícies: esfera de centro* C (*ou* C′) *e raio* $R=3$ *e plano normal à recta dada passando por* C (*ou por* C′). *Assim, por exemplo, a de centro* C *tem por equações*
$$\begin{cases}(x-8/3)^2+(y-4/3)^2+(z-8/3)^2=9\\ 2(x-8/3)+(y-4/3)+2(z-8/3)=0.\end{cases}$$

1132 — Mostrar que a equação diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}-2\lambda\frac{dy}{dx}+(\lambda^2+\mu^2)y=0$ é verificada por
$$y=e^{\lambda x}(A\cos\mu x+B\,\mathrm{sen}\,\mu x).$$

1133 — Mostrar que a equação $2xy-5z=0$ representa um paraboloide hiperbólico. (Efectuar uma rotação de 45º dos eixos OX e OY em tôrno de OZ). R: *Efectuando a transformação indicada:* $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$, $z=Z$, *vem, imediatamente,* $X^2-Y^2-5Z=0$.

1134 — Determinar os máximos e mínimos da função $y=x^4-6$. Representação geométrica da função.

Soluções dos n.os 1129 a 1134 de Manuel Zaluar.

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Outros pontos de exames finais de 1942**

1135 - Mostrar que a superfície de equação $(z-1)^3-(x^2+y^2)^2=0$ é de revolução. Escrever as equações do paralelo e as do meridiano que passam pelo ponto (1, 0, 2).

1136 — O polinómio $P(x)$ é do 5.º grau, é divisível por x^2+1, anula-se para $x=0$, admite a raiz real dupla -4 e toma o valor 100 para $x=1$. Determiná-lo.

1137 — Dada a circunferência de equações: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-10y=0\\ x-2z=0\end{cases}$ determinar: *a)* as equações da recta que passa pelo centro e é normal ao seu plano; *b)* as equações das esferas de raio 7 que contêm a circunferência; *e)* a equação da projecção sôbre o plano $z=0$; *d)* uma representação paramétrica da curva dada.

1138 — Indicar o domínio de definição da função real de variável real $y=\sqrt{\cos x}+x$ e determinar os máximos e mínimos da função, se os houver.

F. C. L. — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA — **Exame de freqüência, 31 de Maio de 1941**

A — *a)* Espaço algébrico e sub-espaço algébrico dum espaço. Definições e exemplos. *b)* isomorfismo de dois espaços. *c)* definição de espaço algébrico grupo. Exemplos. B — Substituïções lineares ortogonais. Definição e propriedades.

1139 — Determine o período da permutação $P=\begin{pmatrix}7&3&6&2&1&4&5\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}$, a permutação inversa, e a transformada de P por $T=\begin{pmatrix}5&7&1&6\\1&5&6&7\end{pmatrix}$.

1140 — Determine os valores próprios da matriz $A=\begin{Vmatrix}1&5\\4&2\end{Vmatrix}$. Verifique se são, ou não, permutáveis as matrizes A e $B=\begin{Vmatrix}1&0\\3&-1\end{Vmatrix}$.

1141 — Equação do feixe de circunferências passando por $(2,1)$ e $(4,0)$. Determine as curvas da família tangentes à recta $x+y=5$.

F. C. L. — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA — **Exame de freqüência, 9 de Junho de 1941**

A — *a)* Defina produto e soma de conjuntos. *b)* O conjunto A é a estela de planos de centro P, o conjunto B é a estela de planos de centro Q (distinto de P). ¿Que representa o conjunto $A\cap B$? R: *O feixe de planos de eixo* PQ.

B — Homomorfismo de um espaço sôbre outro. Propriedades. ¿A relação de homomorfismo é uma relação de equivalência? Justifique a resposta.

C — Substituïções lineares e matrizes. Definições. Tipos especiais.

1142 — ¿Que representa em geometria plana a equação $\frac{x^2}{3+\lambda}+\frac{y^2}{5+\lambda}=1$?

Determine as equações das curvas da família que passam pelo ponto $A(1,1)$ e faça o seu traçado gráfico aproximado. Prove analìticamente que as 2 curvas se cortam ortogonalmente. ¿Que representa a equação dada em geometria a 3 dimensões? R: *Uma família de cónicas homofocais* $\lambda=1\to\frac{1}{3+\lambda}+\frac{1}{5+\lambda}=1\to\lambda^2+6\lambda+7=0$ *donde* $\lambda_1=-3+\sqrt{2}$, $\lambda_2=-3-\sqrt{2}$, *valores a que correspondem uma elipse e uma hipérbole. Os coeficientes angulares das tangentes às duas curvas em* A(1,1) *são respectivamente* $-(\sqrt{2}+1)$ *e* $(\sqrt{2}-1)$ *cujo produto é* -1, *c. q. p.*

No espaço a equação dada representa uma família de superfícies cilíndricas de 2.ª ordem de geratrizes paralelas a OZ *e cujas directrizes são as cónicas homofocais citadas.*

Solução do n.º 1142 de M. Zaluar.

F. C. L. — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA E DE G. A. — **Alguns pontos dos exames finais, Julho de 1941**

1143 — O conjunto A do plano é definido por $4\le x^2+(y-1)^2\le 9$ e o conjunto B por $2\le x\le 4$, $y\ge 0$, e $y-x\le 0$. Represente gràficamente A e B e determine os conjuntos $A\cap B$ e $A\cup B$.

1144 — Sã odadas a substituïção linear $y_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j\ (i=1,2,3)$ de matriz $A=\begin{Vmatrix}2&1&5\\-1&0&3\\1&-1&4\end{Vmatrix}$ e a substituïção $x_k=\sum_{l=1}^{3}b_{kl}z_l\ (k=1,2,3)$ de matriz $B=\begin{Vmatrix}1&0&0\\2&5&0\\3&-1&2\end{Vmatrix}$. Determine a substituïção produto da matriz AB e a substituïção transformada de A por B.

1145 — A cónica γ é a projecção sôbre o plano $z=0$ da curva $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2y-6z+9=0\\2x+3y-z=0.\end{cases}$

Indique o género de γ e reduza a respectiva equação à forma canónica utilizando o método dos invariantes.

1146 — Determine a transformação afim que transforma o elipsoide de equação $16(x-4)^2+y^2+4(z+1)^2=16$ na esfera de equação $(x-4)^2+y^2+(z+1)^2=16$. Determine o volume limitado pelo elipsoide.

I. S. C. E. F. — **Exame final, 6-12-1941**

1147 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=\operatorname{sen}x+\sqrt{3}.\cos x$. R: *A função é definida no intervalo* $(-\infty,+\infty)$ *e é periódica de período* 2π. *Tem-se* $y'=\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen}x$, $y''=-(\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x)=-y$, $y'''=-(\cos x-\sqrt{3}\operatorname{sen}x)=-y'$. *A equação* $y'=0$ *é equivalente a* $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}/3$ *donde* $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$. *Destas,* $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

correspondem a máximos para a função cujo valor é $y=2$; $x=-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi$ *correspondem a mínimos cujo valor é* $y=-1$. *A função é crescente nos intervalos* $\left(\frac{\pi}{6}+(2k-1)\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$ *e descrescente nos intervalos* $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi\right)$. *A equação* $y''=0$ *é equivalente a* $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ *donde* $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$, *a estes valores da variável independente correspondem pontos de inflexão para a curva representativa de* y *que toma o valor* $y=0$. *A concavidade da curva está voltada no sentido dos* yy *positivos nos intervalos* $\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+(2k+1)\pi\right)$ *e no sentido dos* yy *negativos nos intervalos* $\left(\frac{2\pi}{3}+(2k-1)\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right)$.

1148 — Calcular os primeiros quatro têrmos do desenvolvimento em série da função $y=\frac{1-x^4}{\cosh x}$. R: *Seja* $y=a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots$, *visto a função ser par. De* $y.\cosh x=1-x^4$ *resulta* $(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots)(1+x^2/2!+x^4/4!+\cdots)=1-x^4$ *ou* $a_0+(a_0/2!+a_2)x^2+(a_0/4!+a_2/2!+a_4)x^4+(a_0/6!+a_2/4!+a_4/2!+a_6)x^6+\cdots=1-x^4$ *e identificando* $a_0=1$, $a_0/2!+a_2=0$, $a_0/4!+a_2/2!+a_4=-1$, $a_0/6!+a_2/4!+a_4/2!+a_6=0$, *donde* $a_0=1$, $a_2=-1/2$, $a_4=-19/24$, $a_6=11/180$. *Tem-se finalmente,* $y=1-x^2/2-19x^4/24+11x^6/180+\cdots$.

1149 — Dada a função $y=\varphi\left(\log\frac{1}{x}\right)$ calcular $x^3.y'''-2x^2y''-3xy'$. R: *Por ser* $y'=-\varphi'\left(\log\frac{1}{x}\right)\Big/x$,

$$y''=\left[\varphi'\left(\log\frac{1}{x}\right)-\varphi''\left(\log\frac{1}{x}\right)\right]\Big/x^2,$$

$$y'''=-\left[\varphi'''\left(\log\frac{1}{x}\right)-3\varphi''\left(\log\frac{1}{x}\right)+2\varphi'\left(\log\frac{1}{x}\right)\right]\Big/x^3$$

é $x^3.y'''-2x^2y''-3xy'=-\varphi'''\left(\log\frac{1}{x}\right)+5\varphi''\left(\log\frac{1}{x}\right)-\varphi'\left(\log\frac{1}{x}\right)$.

I. S. C. E. F. — Exame Final, 11-10-1941

1150 — Estudar, representar geomètricamente e inverter a função $y=(\log x)^2$. R: *A função é definida no intervalo aberto* $(0,\infty)$. *Para* $x=1$ *é* $y=0$ *e êste valor é um mínimo para a função visto que* $y\geq 0$ *qualquer que seja* x *no intervalo* $(0,\infty)$. *A função é decrescente no intervalo* $(0,1)$ *e crescente no intervalo* $(1,\infty)$ *por ser* $y'=2\log x/x$. *O ponto* $x=e$, $y=1$ *é de inflexão porque* $y''=2(1-\log x)/x^2$ *é nula para* $x=e$ *e* $y'''=2(2\log x-3)/x^3$ *toma o valor* $-2/e^3\neq 0$ *para* $x=e$. *A curva, imagem geométrica da função, tem a concavidade voltada no sentido dos* yy *positivos no intervalo* $(0,e)$ *e no sentido dos* yy *negativos no intervalo* (e,∞) *porque* y'' *é positiva no primeiro intervalo e negativa no segundo. A curva admite como assintota o eixo* Oy *porque* $\lim_{x\to 0}(\log x)^2=+\infty$. *A função é invertível nos intervalos* $(0,1)$ *e* $(1,\infty)$ *nos quais é monotónica decrescente e crescente, respectivamente. As expressões analíticas das funções inversas são* $y=e^{-\sqrt{x}}$ *e* $y=e^{+\sqrt{x}}$, *por esta ordem e uma vez repostos os eixos.*

1151 — Calcular as derivadas de 1.ª e 2.ª ordens da função $y=\sec x$ em ordem à função $u=\operatorname{tg} x$. R: *Sabe-se que* $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ *donde* $\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\Big/\frac{du}{dx}$. *Portanto,* $\frac{dy}{du}=\sec x.\operatorname{tg} x/\sec^2 x=\operatorname{sen} x$ *e*

$$\frac{d^2y}{du^2}=\left(\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\right)\Big/\frac{du}{dx}=\cos x/\sec^2 x=\cos^3 x.$$

1152 — Calcular as ordenadas dos pontos de inflexão da curva de equação $y=e^{-2x^2}$ com um êrro inferior a $10^{-4}/2$, utilizando o desenvolvimento em série de potências. R: *Tem-se* $y=e^{-2x^2}=1-2x^2+\frac{4x^4}{2!}-\frac{8x^6}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{2^n.x^{2n}}{n!}+\cdots$, $y'=-4xe^{-2x^2}$, $y''=-4e^{-2x^2}(1-4x^2)$ *e* $y'''=-4e^{-2x^2}(16x^3-12x)$. *As raízes da equação* $y''=0$ *são* $x=\pm 1/2$ *que correspondem a pontos de inflexão visto que* $y'''=0$ *tem por raízes* $x=0, \pm\sqrt{3}/2$. *Então* $y\left(\frac{1}{2}\right)=y\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2!\,2^2}-\frac{1}{3!\,2^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!\,2^n}+\cdots$. *O êrro sistemático cometido desprezando todos os têrmos da série a partir do 7.º é inferior ao módulo dêste por se tratar duma série alterna. Isto é,* $\varepsilon_s<1/46.080$ *com* $y\left(\frac{1}{2}\right)=y\left(-\frac{1}{2}\right)\simeq 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{48}+\frac{1}{384}-\frac{1}{3840}\simeq 1-0,5+0,125-0,020833+0,002604-0,00026\simeq 0,606511$, *sendo* $\varepsilon_c<1/50.000$. *O êrro absoluto é* $\varepsilon\leq\varepsilon_s+\varepsilon_c<\frac{1}{46.080}+\frac{1}{50.000}<10^{-5}<10^{-4}/2$.

Soluções dos n.os 1147 a 1152 de A. Sá da Costa.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — 1.º exame de freqüência — 1941-1942

Ponto I

1153 — GEOMETRIA DE MONGE — Apoiar uma paralela à L. T. em duas rectas enviezadas. Uma destas rectas é de perfil e a outra é frontal. R: *Aplique-se o método geral. Como plano auxiliar tome-se o plano que é paralelo à L. T. e contém a recta de perfil.*

1154 — GEOMETRIA DE MONGE — Determinar a distância de um ponto ao segundo plano bissector. R: *Mude-se de plano vertical de projecção para qualquer plano de perfil.*

1155 — GEOMETRIA COTADA — As projecções de quatro pontos A, B, C e D, de cotas –1,4 m., 0,8 m., 2,7 m., e 3,6 m., são vertices de um quadrado de 10 m. de lado. Determinar o ângulo da recta AB com o plano de escala de declive CD (Escala 1:200). R: *O ângulo pedido é o complemento do ângulo da recta* AB *com a perpendicular conduzida por um dos seus pontos ao plano dado. Estas duas rectas pertencem ao mesmo plano projectante; o seu ângulo determina-se introduzindo um plano vertical de traço paralelo ao do plano projectante que as contém.*

Ponto II

1156 — GEOMETRIA DE MONGE — Conduzir por um ponto do segundo plano bissector a recta que se apoia em duas rectas enviezadas paraletas a êsse mesmo plano.

1157 — GEOMETRIA DE MONGE — Determinar o ângulo de uma recta de perfil com o primeiro plano bissector. R: *Conduz-se por um ponto da recta de perfil uma perpendicular ao primeiro plano bissector. O ângulo destas duas rectas (complemento do ângulo pedido) determina-se mudando de plano vertical de projecção para o plano de perfil que as contém.*

1158 — GEOMETRIA COTADA — São dados: um plano de declive 2 e um ponto A de cota 5,2 m. Conduzir pelo ponto as rectas de declive 1 paralelas ao plano. (Escala 1:50). R: *O problema tem duas soluções. Conduza-se pelo ponto um plano paralelo ao plano dado. A circunferência de raio* 1 *e centro na projecção do ponto* A, *intersecta a horisontal de cota 6,2 m. do plano em dois pontos que definem com o ponto dado as rectas pedidas.*

F. C. C. — 2.º exame de freqüência — 1941-1942

Ponto I

1159 — GEOMETRIA COTADA — Determinar a distância de um ponto 3,5 m. de cota a uma recta de declive 1/2. O ponto e a recta pertencem ao mesmo plano vertical. (Escala 1:50). R: *Basta rebater os dados sôbre o plano de comparação.*

1160 — PLANOS TANGENTES — Conduzir por um ponto do segundo plano bissector os planos tangentes à superfície de revolução gerada por um rectângulo, assente num plano horisontal, que roda em tôrno de um dos seus lados. Êsse lado faz com a L. T. um ângulo de 30°. R: *Aplique-se o método geral, rebatendo a base do cilindro para lhe conduzir as tangentes pelo ponto de intersecção do seu plano com a paralela às generatrizes que passa pelo ponto dado.*

1161 — SUPERFÍCIES — Determinar os pontos de intersecção de uma recta do segundo plano bissector com uma esfera de 4 cm. de raio, dada pelos contornos aparentes. O centro da esfera é um ponto do segundo plano bissector.

Ponto II

1162 GEOMETRIA DE MONGE — São dadas duas rectas enviezadas, uma do primeiro plano bissector e outra do segundo. Apoiar-lhes uma paralela a uma frontal dada.

1163 — TRIEDROS — É dado um plano vertical que faz com o plano vertical de projecção um ângulo de 70°. Conduzir por um ponto dado a recta que faz com o plano vertical dado e com a L. T. ângulos de 60° e de 40°, respectivamente. R: *A recta pedida faz um ângulo de 30° com qualquer horizontal perpendicular ao plano dado.*
(Veja-se o n.º 10 da G. de M., probema n.º 973).

1164 — PLANOS TANGENTES — Representar os planos perpendiculares a uma recta dada que distam 4 cm. do seu traço no segundo plano bissector. R: *Os planos pedidos são os planos perpendiculares à recta dada e tangentes à esfera de 4 cm. de raio e centro naquele traço.*

F. C. C. — Exame final — 1941-1942

Ponto I

1165 — GEOMETRIA DE MONGE — Dados dois pontos do mesmo plano de perfil, representar o plano mediador do segmento que definem. R: *Basta* *mudar de plano vertical de projecção para o plano de perfil que contém a recta.*

1166—PLANOS TANGENTES—É dada uma superfície cónica de revolução de eixo horisontal. Conduzir-lhe os planos tangentes perpendiculares ao primeiro plano bissector. R: *Conduza-se pelo vértice uma recta perpendicular ao primeiro plano bissector e determinem-se os planos tangentes à superfície que contém essa recta.*

Ponto II

1167 - GEOMETRIA DE MONGE—Determinar o ângulo de dois planos dados pela sua recta de intersecção, que é uma recta de perfil, e um ponto de cada um. R: *Transformando a recta de perfil numa recta de tôpo por mudanças de planos de projecção, os planos dados ficam sendo de tôpo e o seu ângulo é o dos seus traços.*

1168 PLANOS TANGENTES—Dados: Uma esfera de 4 cm. de raio e centro no segundo plano bissector, e uma recta dêsse mesmo plano; representar os planos tangentes à esfera e perpendiculares à recta dada. R: *Os planos pedidos são os planos tangentes à esfera nos pontos de intersecção dessa superfície com a paralela à recta dada conduzida pelo centro.*

Soluções dos n.os 1155 a 1168 de L. M. de Albuquerque.

CÁLCULO INFINITESIMAL E ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — CÁLCULO — Exame final, Outubro de 1941

1169—Calcular $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$. R: *Fazendo* $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ *e integrando por partes:*

$$I = \frac{1}{8} \left\{ 2x^2 - 2x \operatorname{sen} 2x - \cos 2x \right\} + c .$$

1170 — Integrar a equação $x^2 y'' + xy' + 4y = (\log x) \operatorname{sen}(2 \log x)$. R: *Fazendo* $x = e^t$ *tem-se* $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = t \operatorname{sen} 2t$.

Integral geral da equação sem 2.º membro:

$$y = c_1 \operatorname{sen} 2t + c_2 \cos 2t .$$

Integrais particulares:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \left(-\dfrac{t^2}{16} - \dfrac{i}{32} t + \dfrac{1}{128} \right) e^{2it} \\ y_2 = \left(-\dfrac{t^2}{16} + \dfrac{i}{32} t + \dfrac{1}{128} \right) e^{-2it} \end{array} \right.$$

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{64} \left\{ -8t^2 \cos 2t + 4t \operatorname{sen} 2t + \cos 2t \right\} .$$

Integral geral:

$$y = c_1 \operatorname{sen} 2t + c_2 \cos 2t + \frac{1}{64} \left\{ -8t^2 \cos 2t + 4t \operatorname{sen} 2t + \cos 2t \right\} \quad ou \quad y = \left(c_1 + \frac{1}{16} t\right) \operatorname{sen} 2t + \left(c_3 - \frac{1}{8} t^2\right) \cos 2t$$

em que $t = \log x$.

1171 — Dada uma fôlha rectangular $ABCD$ em que $\overline{AB} = a$, dobra-se pela recta MN (M ponto de $\overline{AB}$ e N de $\overline{BC}$) de modo que o vértice B venha a cair na recta AD. Determinar a distância $\overline{MB}$ de modo que $\overline{MN}$ seja máximo ou mínimo. R: *Seja* K *o ponto de* AD *com o qual* B *vai coincidir quando dobramos a fôlha por* MN. *Fazendo* $\overline{MN} = L$, $\overline{MB} = x$ *e* $N\hat{M}B = \theta$ *vem* $a = \overline{BK} \operatorname{sen} \theta$, $x = L \cos \theta$ *e* $\dfrac{\overline{BK}}{2} = x \operatorname{sen} \theta$, *donde:* $\dfrac{a}{2} = x \operatorname{sen}^2 \theta$, $\operatorname{sen}^2 \theta = \dfrac{a}{2x}$ *e* $x^2 = L^2 \left(1 - \dfrac{a}{2x}\right) = L^2 \dfrac{2x-a}{2x}$. *Logo* $L^2 = \dfrac{2x^3}{2x-a}$ *donde* $L = \sqrt{2}\, x^{3/2} (2x-a)^{-1/2}$.

Tem-se ainda:

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{2} \left\{ \frac{3}{2} x^{1/2} (2x-a)^{-1/2} - x^{3/2} (2x-a)^{-3/2} \right\} = 0$$

$$\frac{3}{2}(2x-a) - x = 0, \quad x = \frac{3a}{4}$$

$$L = \sqrt{2} \frac{3a\sqrt{3a}}{8} \sqrt{\frac{2}{a}} = \frac{3a}{4} \sqrt{3} .$$

Soluções dos n.os 1169 a 1171 de Jaime Rios de Sousa.

I. S. T. — Exame final, Outubro de 1941

1172 — Determinar os pontos em que a binormal da curva $\left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 4x^2 \\ z = 3x^2 - xy + 2y^2 \end{array} \right.$ é paralela ao plano xy.

1173 — Mudar as variáveis independentes na equação $x \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ sendo $x = \dfrac{1}{t}$ $y = \dfrac{ut}{2}$.

1174 — Integrar a equação $p(1 + 4y - p) = y(1+4y)$ $(p = y')$.

1175 — Integrar a equação $p(px - 2y) + 4x = 0$.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — **Exame final, Outubro de 1941**

1176 — Mostrar que dois pontos materiais P e P_1, que se atraem segundo uma lei de fôrças que é função só da distância, podem rodar uniformemente (como se estivessem rìgidamente ligados entre si) em tôrno do centro de gravidade G do sistema por êles formado. ¿Qual deve ser a velocidade angular dessa rotação uniforme?

1177 — Um fio pesado, suspenso pelas suas extremidades em dois pontos fixos A e B, tem a forma duma cicloide. Determinar a densidade e a tensão em qualquer ponto do fio.

1178 — Dada uma superfície S e dado um ponto pesado P, fora da superfície, determinar a trajectória rectilínea sôbre a qual o ponto deve ser obrigado a mover-se, sem atrito e sem velocidade inicial, para atingir a superfície no menor tempo possível.

1179 — Uma homografia vectorial transforma os vectores $\begin{cases} u=3I+2J+4K \\ v=3I-4J+2K \\ w=2I+3J-4K \end{cases}$ respectivamente em $\begin{cases} u_1=\ \ I+2J-4K \\ v_1=2I-\ \ J+2K \\ w_1=aI+2J-2K. \end{cases}$ ¿Quais são os transformados dos vectores I, J e K?

Será possível determinar a de modo que a homografia seja degenerada? ¿Será possível determinar a de modo que a homografia seja uma dilatação?

Contêm pontos de exames finais de *Mecânica Racional* e *Física Matemática* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 5, 7 e 9.

P R O B L E M A S

Chamamos a atenção dos leitores, alunos dos últimos anos dos liceus e candidatos à admissão a escolas superiores, para os problemas de matemáticas elementares adiante propostos. Parece-nos útil que lhes dediquem alguma atenção, porque a selecção foi orientada pelas suas necessidades mais urgentes.

As resoluções de problemas propostos devem-nos ser remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da «Gazeta».

Pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel escrita só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados) com a indicação do nome e da morada do leitor.

Algumas resoluções de problemas propostos chegaram à redacção e não puderam ser incluidas neste número por êste se encontrar já composto.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Matemáticas Elementares

1180 — Calcular os coeficientes a, b e c, na identidade: $a+b\cos 2x+c\cos 4x=\operatorname{sen}^4 x$.

1181 — Sendo $A=\operatorname{sen} 2x-k\operatorname{sen} x-\cos x+k$, e $B=\cos 2x-k\cos x-\operatorname{sen} x$, exprimir $\frac{A}{B}$ em função de $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, e mostrar que é igual a $\frac{t-1}{t+1}$.

1182 — Os 3 lados de um triângulo e uma das alturas são 4 têrmos consecutivos de uma progressão geométrica. Dada uma dessas 4 quantidades, calcular as outras.

1183 — Dado o triângulo isósceles ABC rectângulo em A, e a recta XX', paralela a AC e passando por B, determinar o lugar geométrico das posições do vértice A, quando B se desloca sôbre XX', mantendo-se fixo o vértice C, e conservando-se o triângulo isósceles e rectângulo em A.

1184 — Mostrar que, se a, b e c são as medidas dos 3 lados de um triângulo, por ordem crescente de grandeza, se verifica a desigualdade:

$$a^3+b^3+c^3+3abc>(a^2+bc)(a+b+c).$$

1185 — Sendo a área da esfera circunscrita a um tronco de cone circular de bases paralelas seis veves maior do que a área da esfera inscrita no mesmo tronco, calcular a relação entre os raios das bases do tronco.

Problemas n.º 1180 a 1185 propostos por A. A. Ferreira de Macedo.