MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — **Exame final, Outubro de 1941**

1176 — Mostrar que dois pontos materiais P e P_1, que se atraem segundo uma lei de fôrças que é função só da distância, podem rodar uniformemente (como se estivessem rìgidamente ligados entre si) em tôrno do centro de gravidade G do sistema por êles formado. ¿Qual deve ser a velocidade angular dessa rotação uniforme?

1177 — Um fio pesado, suspenso pelas suas extremidades em dois pontos fixos A e B, tem a forma duma cicloide. Determinar a densidade e a tensão em qualquer ponto do fio.

1178 — Dada uma superfície S e dado um ponto pesado P, fora da superfície, determinar a trajectória rectilínea sôbre a qual o ponto deve ser obrigado a mover-se, sem atrito e sem velocidade inicial, para atingir a superfície no menor tempo possível.

1179 — Uma homografia vectorial transforma os vectores $\begin{cases} u=3I+2J+4K \\ v=3I-4J+2K \\ w=2I+3J-4K \end{cases}$ respectivamente em $\begin{cases} u_1=I+2J-4K \\ v_1=2I-J+2K \\ w_1=aI+2J-2K. \end{cases}$ ¿Quais são os transformados dos vectores I, J e K?

Será possível determinar a de modo que a homografia seja degenerada? ¿Será possível determinar a de modo que a homografia seja uma dilatação?

Contêm pontos de exames finais de *Mecânica Racional* e *Física Matemática* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 5, 7 e 9.

PROBLEMAS

Chamamos a atenção dos leitores, alunos dos últimos anos dos liceus e candidatos à admissão a escolas superiores, para os problemas de matemáticas elementares adiante propostos. Parece-nos útil que lhes dediquem alguma atenção, porque a selecção foi orientada pelas suas necessidades mais urgentes.

As resoluções de problemas propostos devem-nos ser remetidas até ao dia 15 do mês anterior ao do aparecimento de cada número da «Gazeta».

Pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel escrita só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados) com a indicação do nome e da morada do leitor.

Algumas resoluções de problemas propostos chegaram à redacção e não puderam ser incluidas neste número por êste se encontrar já composto.

PROBLEMAS PROPOSTOS

Matemáticas Elementares

1180 — Calcular os coeficientes a, b e c, na identidade: $a+b\cos 2x+c\cos 4x=\text{sen}^4 x$.

1181 — Sendo $A=\text{sen}\, 2x-k\,\text{sen}\, x-\cos x+k$, e $B=\cos 2x-k\cos x-\text{sen}\, x$, exprimir $\frac{A}{B}$ em função de $t=\text{tg}\frac{x}{2}$, e mostrar que é igual a $\frac{t-1}{t+1}$.

1182 — Os 3 lados de um triângulo e uma das alturas são 4 têrmos consecutivos de uma progressão geométrica. Dada uma dessas 4 quantidades, calcular as outras.

1183 — Dado o triângulo isósceles ABC rectângulo em A, e a recta XX', paralela a AC e passando por B, determinar o lugar geométrico das posições do vértice A, quando B se desloca sôbre XX', mantendo-se fixo o vértice C, e conservando-se o triângulo isósceles e rectângulo em A.

1184 — Mostrar que, se a, b e c são as medidas dos 3 lados de um triângulo, por ordem crescente de grandeza, se verifica a desigualdade:

$$a^3+b^3+c^3+3abc > (a^2+bc)(a+b+c).$$

1185 — Sendo a área da esfera circunscrita a um tronco de cone circular de bases paralelas seis veves maior do que a área da esfera inscrita no mesmo tronco, calcular a relação entre os raios das bases do tronco.

Problemas n.º 1180 a 1185 propostos por A. A. Ferreira de Macedo.

1186 — Num quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência de raio $r=5$ os lados medem respectivamente $\overline{AB}=5\sqrt{3}$, $\overline{BC}=5$ e $\overline{CD}=8$.

¿Qual é o comprimento da diagonal $\overline{BD}$?

1187 — É o problema d'Alhagen proposto por F. G. M. no «Cours de Géométrie Élémentaire». Consideremos num bilhar circular uma bola colocada num ponto A. ¿Em que direcção se deve lançar a bola para que torne a passar pelo ponto A, após duas reflexões sucessivas?

Problemas n.os 1186 e 1187 propostos por M. C. Guerra dos Santos (Lisboa).

Matemáticas Superiores

1188 — Para que a expressão $dz+Adx+Bdy$ admita um factor integrante independente de z é necessário e suficiente que seja da forma $dz+$ $+zd\varphi+e^{-\varphi}d\psi$ em que φ e ψ são funções só de x e y.

1189 — Ache o lugar geométrico dos centros das esferas que passam por dois pontos fixos A e B e são tangentes a um plano fixo ω. Discussão.

(Modificado de Cezar Cosnitã, *American Mathematical Monthly*, Agosto-Setembro 1937).

1190 — Mostre que os 6 planos perpendiculares às 6 arestas dum tetraedro passando pelos meios das projecções das mesmas arestas sôbre um mesmo plano têm um ponto comum.

(N. Court, *American Math. Monthly*, Junho-Julho 1937).

1191 — Em que sistema de numeração pode um número de 4 algarismos da forma (abab) ser o quadrado dum número de 2 algarismos da forma (ba)? Verifique se a solução é única.

(V. Thébault, *American Math. Monthly*, Junho-Julho 1937).

1192 — Ache a equação geral das superfícies tais que: se por um ponto M duma delas se tira a normal MN até ao plano Oxy, o comprimento MN é igual a ON. (Licenciatura, *Poitiers*, 1895).

Problema n.º 1192 proposto por M. Alenquer.

1193 — ¿Qual a fórmula da trigonometria plana análoga à fórmula fundamental da trigonometria esférica? Passar desta para aquela.

Problema n.º 1193 proposto por Heliodoro Lopes (Coimbra).

1194 — Calcular o limite da expressão:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\frac{n}{3}+\frac{n(n-1)}{2!\times 5}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\times 7}+\cdots+\right.$$
$$\left.+(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\times(2k+1)}+\cdots\right)$$

Problema n.º 1194 proposto por Rui Verdial (Lamego).

SOLUÇÕES RECEBIDAS

1006 — Mostre que a série $\sum^{\infty}(z^n+z^{-n})^{-1}$ converge em qualquer ponto z tal que $|z|\neq 1$. R: *O têrmo geral é* $u_n=(z^n+z^{-n})^{-1}=z^{-n}(1+z^{-2n})^{-1}$. *Se fôr*

$$|z|>1 \quad |u_n|^{\frac{1}{n}}=|z|^{-1}|1+z^{-rn}|^{-\frac{1}{n}}=$$
$$=|z|^{-1}\left|1-\frac{1}{n}z^{-2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|<1;$$ *logo pelo critério de Cauchy a série é convergente. Anàlogamente para* $|z|<1$ *visto que* $u_n(z)=u_n(z^{-1})$.

Solução de M. Alenquer.

1076 — Num rectângulo $OAMB$ é $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$. Por M faz-se passar uma recta que corta os prolongamentos de OA e OB, respectivamente, em P e Q. Sendo α o ângulo $O\widehat{P}Q$, mostrar que é: $\overline{PQ}=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ quando fôr: $\operatorname{tg}^3\alpha=b/a$.

R: *É:* $\overline{PQ}^2=(a+\overline{AP})^2+(b+\overline{BP})^2=(a+b\operatorname{cotg}\alpha)^2+$ $+(b+a\operatorname{tg}\alpha)^2$ *ou seja* $\overline{PQ}^2=a^2+2ab\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}+$

$$+b^2\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+b^2+2ab\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}+a^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=a^2+$$
$$+3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}+b^2=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3.$$

Logo, $\overline{PQ}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. q. c. d.

Solução de R. Verdial (Lamego).

Enviaram também soluções exactas: A. Simões (Sangalhos), M. C. Guerra dos Santos e M. R. Muginstein (Lisboa).

1077 — Eliminar φ entre as equações

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi+\cos 3\varphi \\ y=3\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}3\varphi.\end{cases}$$

R: $\begin{cases} x=3\cos\varphi+\cos 2\varphi\cos\varphi-\operatorname{sen}2\varphi\operatorname{sen}\varphi \\ y=3\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}2\varphi\cos\varphi-\cos 2\varphi\operatorname{sen}\varphi.\end{cases}$ *Ou:*

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi+(\cos^2\varphi-\operatorname{sen}^2\varphi)\cos\varphi-2\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi \\ y=3\operatorname{sen}\varphi-2\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi-(\cos^2\varphi-\operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi\end{cases}$$

donde, $\begin{cases} x=3\cos\varphi(1-\operatorname{sen}^2\varphi)+\cos^3\varphi=4\cos^3\varphi \\ y=3\operatorname{sen}\varphi(1-\cos^2\varphi)+\operatorname{sen}^3\varphi=4\operatorname{sen}^3\varphi\end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \cos^2\varphi=\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3} \\ \operatorname{sen}^2\varphi=\left(\frac{y}{4}\right)^{2/3}.\end{cases}$ *Finalmente:* $\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{4}\right)^{2/3}=1$

ou $x^{2/3}+y^{2/3}=4^{2/3}$.

Solução de R. Verdial (Lamego).

Enviaram também soluções exactas: M. C. Guerra dos Santos (Lisboa) e M. R. Muginstein (Lisboa).

1078 — Eliminar x entre as equações

$$\begin{cases} \operatorname{sen}x+\operatorname{tg}x=a \\ \operatorname{sen}x\,.\,\operatorname{tg}x=b.\end{cases}$$

R: *A equação* $u^2-au+b=0$ *determina-nos:*

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}. \end{array}\right.$$ *Daqui, tira-se:*

$(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x)(\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x) = a\sqrt{a^2-4b} = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = -\operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg}^2 x = -b^2$. *Finalmente,* $a^2(a^2-4b) = b^4$ *ou* $a^4 - b^4 = 4a^2 b$.

Solução de R. Verdial (Lamego).
Enviou também solução exacta: M. R. Muginstein (Lisboa).

1079 — Dados quatro pontos A, B, C, D de um plano, tais que o quadrilátero que os tem por vértices não seja inscritível (numa circunferência), traçar uma circunferência equidistante dêsses quatro pontos. R: *Começamos por construir a circunferência que passa por 3 dos pontos, sejam* A, B *e* C. *Tomamos então metade da distância de* D *à circunferência e aumentamos ou diminuímos o seu raio, dêste comprimento, conforme* D *fôr exterior ou interior à primitiva circunferência traçada.*

Solução de R. Verdial (Lamego).
Enviou também solução exacta: A. Simões (Sangalhos).

1080 — Determinar a hipotenusa de um triângulo rectângulo, conhecida a soma dos catectos e o comprimento da bissectriz do ângulo recto. R: *Das equações*

$$\left\{\begin{array}{l} b+c=S \\ \dfrac{m}{b}=\dfrac{n}{c}=\dfrac{m+n}{b+c}=\dfrac{a}{S} \\ m^2=b^2+B^2-bB\sqrt{2} \\ n^2=c^2+B^2-cB\sqrt{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{array}\right.$$

cujas notações são evidentes. tira-se:

$$\left\{\begin{array}{l} b^2a^2=S^2(b^2+B^2-bB\sqrt{2}) \\ c^2a^2=S^2(c^2+B^2-cB\sqrt{2}) \end{array}\right.$$ *e por soma:* $a^2 \times a^2 = S^2(a^2+2B^2-SB\sqrt{2})$. *Desta equação resulta finalmente:*

$$\left\{\begin{array}{l} a=\sqrt{\sqrt{2}\,BS} \\ a=\sqrt{S^2-\sqrt{2}\,BS}. \end{array}\right.$$

Solução de R. Verdial (Lamego).
Enviou também solução exacta: M. C. Guerra dos Santos (Lisboa).

1086 — Resolva a equação $x^7+7px^5+14p^2x^3+7p^3x+q=0$. R: *Pela transformação* $x=yp^{1/2}$ *a equação dada* (1) *reduz-se à forma*

$$(2) \qquad y^7+7y^5+14y^3+7y+r=0$$

em que $r=qp^{-7/2}$; *fazendo agora* $y=z-z^{-1}$ *temos*

$$(3) \qquad z^7-z^{-7}+r=0$$

ou

$$(3') \qquad z^{14}+rz^7-1=0;$$

fazendo $z^7=u$ *temos uma equação do 2.º grau*

$$(4) \qquad u^2+ru-1=0$$

cujas raízes serão v *e* $w=-v^{-1}$. *As raízes de* (3') *serão pois* $z=v^{1/7}e^{2ki\pi/7}$, $z=w^{1/7}e^{2li\pi/7}$. *As raízes de* (2) *serão então* $y=v^{1/7}e^{2ki\pi/7}-v^{-1/7}e^{-2ki\pi/7}=v^{1/7}e^{2ki\pi/7}+w^{1/7}e^{-2ki\pi/7}$ *e esta expressão simétrica em* v *e* w *dá-nos as 7 raízes de* (2) *donde se tiram imediatamente as 7 raízes da proposta* (1).

1089 — O ortocentro dum triângulo circunscrito a uma parábola está sôbre a directriz. R: *Seja a parábola* $y^2=2px$. *Consideremos o triângulo circunscrito cujos lados são as rectas* $T_i\,(i=1,2,3)$ *tangentes à curva nos pontos de ordenada* y_i, *e cujos vértices são os pontos* V_i *(oposto a* T_i*). É fácil ver que a equação de* T_i *é*

$$2pX-2y_iY=y_i^2-2py_i. \qquad (T_i)$$

De T_i *e* T_j *pela regra de Cramer tira-se* V_k *de coordenadas*

$$\left\{\begin{array}{l} x_k=\dfrac{y_iy_j}{2p} \\ y_k=\dfrac{y_i+y_j-2p}{2}. \end{array}\right.$$

O suporte da altura H_k *correspondente ao vértice* V_k *terá a equação*

$$\frac{X-x_k}{2p}=\frac{Y-y_k}{-2y_k} \quad \textit{ou} \quad y_kX+pY=\frac{y_1y_2y_3}{p}+\frac{p(y_i+y_j)-2p^2}{2} \qquad (H_k).$$

Para achar o ortocentro tomemos as rectas H_k *e* H_j. *Subtraindo as respectivas equações vem* $(y_k-y_j)X=+\dfrac{P(y_j-y_k)}{2}$ *ou* $X=-\dfrac{P}{2}$ *que exprime que o ortocentro está sôbre a directriz.*

Soluções dos n.os 1086 e 1089 de M. Alenquer.

RECTIFICAÇÕES

Os enunciados correctos dos problemas números 1010 e 1090 são:

1010 — São dados um plano ω e um ponto O dêsse plano. Pede-se a equação geral das superfícies Σ tais que, sendo M um ponto de Σ, MN a normal em M $(N \in \omega)$, MP a perpendicular a ω $(P \in \omega)$, seja igual a uma constante dada a^2 a área do triângulo ONP. Com os mesmos dados fazer $N\widehat{O}P = constante$.

1090 — Achar os máximos e mínimos de $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ em que x, y, z verificam a equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.