O CÁLCULO DA SOMA DUMA SÉRIE

por A. SÁ DA COSTA

A necessidade de calcular a soma duma série surge com freqüência. Recorde-se, por exemplo, que o conhecimento do valor duma função para um valor dado da variável independente depende, muitas vezes, do cálculo da soma duma série — é o caso do logarítmo dum número do valor duma função goniométrica, etc.

1. Séries cuja soma pode calcular-se exactamente.

Só excepcionalmente a soma duma série pode calcular-se exactamente. Consideraremos dois casos apenas.

A) Séries cujos termos formam progressão geométrica.

Seja a série $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$. Tem-se $S_n=a\dfrac{1-r^n}{1-r}$ e $S=\lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{1-r^n}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}$ se $|r|<1$, $S=\infty$ se $|r|>1$ ou $r=1$, e S indeterminado se $r=-1$. Na primeira hipótese a série é convergente e a sua soma $S=\dfrac{a}{1-r}$, na segunda a série é divergente e na terceira indeterminada.

Exemplos: 1) A série de têrmo geral $u_n=(-1)^n 3/2^n$ é convergente por ser $|r|=1/2<1$ e a sua soma é $S=\dfrac{3}{1+1/2}=2$.

2) A série $1/5+2/5+4/5+\cdots+2^n/5+\cdots$ é divergente porque $r=2>1$ e a sua soma é, portanto, $S=\infty$.

3) *Estudar a série de têrmo geral* $u_n=\dfrac{a+bn}{2^n}$. *O estudo compreende a determinação da sua soma, na hipótese da convergência* (I. S. C. E. F. — Álgebra Superior — 2.º exame de freqüência, Maio de 1938).

O têrmo geral da série proposta é a soma dos termos gerais $v_n=\dfrac{a}{2^n}$ e $w_n=\dfrac{bn}{2^n}$ de duas séries convergentes — a primeira porque os seus termos formam uma progressão geométrica de razão $1/2<1$ e a segunda porque a aplicação do critério de Alembert conduz a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}<1$. Então a soma da série proposta é igual à soma das somas das séries de termos gerais v_n e w_n que representaremos por V e W. Mas, $V=\dfrac{a/2}{1-1/2}=a$ e, quanto a W, notemos que podemos escrever, sucessivamente, em virtude da série ser convergente

$$\begin{aligned}W&=b/2+2b/2^2+\cdots+nb/2^n+\cdots=\\&=b\,[1/2+(1/2^2+1/2^2)+(1/2^3+1/2^3+1/2^3)+\cdots]=\\&=b\,[(1/2+1/2^2+1/2^3+\cdots)+(1/2^2+1/2^3+\cdots)+\cdots]\end{aligned}$$

onde cada um dos parêntesis é uma série cujos termos formam uma progressão geométrica de razão $1/2<1$. Logo será

$$W=b\,[1+1/2+1/2^2+\cdots]=\frac{b}{1-1/2}=2b.$$

A soma da série proposta é $S=V+W=a+2b$.

3) *Calcular a soma da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a}{2^{3n-2}}+\dfrac{3b}{2^{3n}}\right)$.

O têrmo geral da série proposta escreve-se $u_n=\dfrac{4a+3b}{2^{3n}}$ e a soma da série é

$$S=(4a+3b)\sum_{n=1}^{\infty}1/2^{3n}=(4a+3b)\frac{1/2^3}{1-1/2^3}=\frac{4a+3b}{7}.$$

4) *Calcular as somas das séries de termos gerais* $u_n=\operatorname{sen}^n x$, $v_n=\operatorname{tg}^n x$.

As séries propostas são convergentes, respectivamente, para $x\neq 2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ e $-\dfrac{\pi}{4}<x-k\pi<\dfrac{\pi}{4}$. Só para os valores de x que veriquem estas condições se põe o problema do cálculo das somas das séries propostas e, então, será

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\quad\text{e}\quad S'=\sum_{n=0}^{\infty}v_n=\frac{1}{1-\operatorname{tg}x}.$$

B) Séries cujos termos gerais são decomponíveis na soma $\sum\limits_{i=0}^{p}a_i\,\varphi(n+i)$, com $\sum\limits_{i=0}^{p}a_i=0$.

Prova-se que a soma duma série convergente é $S=a_0\varphi(1)+(a_0+a_1)\varphi(2)+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_p)\varphi(p)+(a_1+2a_2+\cdots+pa_p)\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)$ onde $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)$ existe e é finito, se o têrmo geral da série fôr $u_n=\sum\limits_{i=0}^{p}a_i\,\varphi(n+i)$ com $\sum\limits_{i=0}^{p}a_i=0$ (V. «Gazeta de Matemática» n.º 6, p. 16).

Exemplos: 1) *Calcule a soma da série de têrmo geral* $u_n=\varphi(n)-\varphi(n+a)$, *com a inteiro e* $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=l$.

Tem-se $S_n=\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(a)-[\varphi(n+1)+\varphi(n+2)+\cdots+\varphi(n+a)]$ e será $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{i=1}^{a}\varphi(i)-a\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=\sum\limits_{i=1}^{a}\varphi(i)-al$.

2) *Calcule a soma da série de têrmo geral* $u_n=\dfrac{1}{n(n+a)}$.

Note-se que $u_n=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a}\right)$. Então, em conseqüência do que se expoz no exercício anterior, é $S=\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{a}\right)$.

3) *Calcule a soma da série de têrmo geral* $u_n=\frac{1}{n(n-1)}$.

Note-se que $u_n=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$. Será $S=\sum_{n=2}^{\infty}u_n=1$.

4) *Prove que a soma da série de têrmo geral* $u_n=a\varphi(n)+b\varphi(n+1)+c\varphi(n+2)$, *com* $a+b+c=0$ *e* $\lim_{n\to\infty}\varphi(n)=l\neq\infty$, *é* $S=a\varphi(1)+(a+b)\varphi(2)+(a+2b+3c)l$. *Aplicação:* $u_n=\frac{3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$. R: $S=3/2$.

5) *Calcule a soma da série de têrmo geral* $u_n=1/(a+n)(a+n+1)\cdots(a+n+p)$.

Podemos escrever

$$u_n=\frac{(a+n-1)!}{(a+n+p)!}=\frac{1}{p}\left[\frac{(a+n-1)!}{(a+n+p-1)!}-\frac{(a+n)!}{(a+n+p)!}\right]$$

e caímos no caso do exercício 2). Portanto

$$S=\frac{1}{p}\left[\frac{(a-1)!}{(a+p-1)!}-\lim_{n\to\infty}\frac{(a+n)!}{(a+n+p)!}\right]=$$
$$=\frac{1}{p\,.\,a\,(a+1)\cdots(a+p-1)}.$$

2. Séries cuja soma só pode calcular-se aproximadamente.

O método para a determinação dum valor aproximado da soma duma série consiste em tomar a soma dos p primeiros termos da série, $S_p=u_1+u_2+\cdots+u_p\simeq S$. Êste procedimento implica, em geral, êrros de duas categorias — êrro sistemático resultante de ter sido desprezado o resto da série $u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots$; erros de cálculo cometidos na determinação dos p primeiros termos da série e da sua soma. Na peor das hipóteses, todos êstes êrros somar-se-ão.

Em geral, o problema apresenta-se com um enunciado equivalente ou redutível ao seguinte: calcule a soma da série de têrmo geral u_n cometendo um êrro absoluto inferior a ε.

O cálculo deve ser efectuado de modo tal que a soma do êrro sistemático com os êrros de cálculo seja inferior a ε. Na prática, procede-se de forma tal que o êrro sistemático seja inferior a $\frac{\varepsilon}{2}$ e que a soma dos êrros de cálculo seja também inferior a $\frac{\varepsilon}{2}$.

Para determinar o número de termos da série a considerar e a precisão com que êstes e a sua soma devem ser calculados, é indispensavel resolver os seguintes problemas: determinar um limite superior do êrro de cálculo quando se realiza uma operação e determinar um limite superior do êrro sistemático quando se consideram os p primeiros termos da série. Supomos que o leitor sabe resolver o primeiro problema e ocupar-nos-emos exclusivamente do segundo nos seguintes casos: séries de têrmos positivos, séries alternas.

A) Séries de termos positivos.

Suponhamos que, para o cálculo dum valor aproximado da soma S, da série $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$, considerámos os seus p primeiros termos $u_1+u_2+\cdots+u_p\simeq S$. O êrro sistemático cometido será, precisamente, a soma da série resto $R_p=u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots$ que não podemos calcular exactamente porque, doutro modo saberiamos calcular, exactamente ou cometendo apenas erros de cálculo, a soma da série proposta. Seja L um número positivo tal que $R_p\leq L$, então L será um limite superior do êrro sistemático. Vejamos como se consegue determinar um número L aceitável nestas condições. L será tanto mais aceitável quanto menor fôr a diferença $L-R_p$.

1.º caso. *A convergência da série foi reconhecida pelo critério d'Alembert.*

Nestas condições, é sempre possível determinar uma série numérica de têrmos positivos e em progressão geométrica de razão $r<1$ cujo têrmo geral $v_q\geq u_{p+q}$. A esta série dá-se o nome de *majorante* do resto da série $u_1+u_2+\cdots$. A soma da majorante satisfaz às condições que caracterizam o número a que chamámos L.

Passemos à construção da majorante. Do que supozemos, resulta que, a partir duma ordem n_1 se tem $\frac{u_{n+1}}{u_n}<k<1$ portanto, para $n>p$ é $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{u_{p+1}}{u_p}=k<1$ e a majorante do resto $R_p=u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots$ será $u_{p+1}[1+k+k^2+\cdots]=\frac{u_{p+1}}{1-k}=L\geq R_p$.

Exemplos: 1) *Calcule* e, *base neperiana, cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-3}.

Sabe-se que $e=1+1/1!+1/2!+\cdots+1/n!+\cdots$. Começaremos por determinar o número de têrmos desta série a considerar para que o êrro sistemático ε_s seja inferior a 5/10000 e, seguidamente, calcularemos a soma dêstes têrmos, cometendo um êrro ε_c inferior a 5/10000. Operando dêste modo, há a garantia de que o êrro absoluto será inferior a 10^{-3}. Para $n>p$ é $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n}<\frac{u_{p+1}}{u_p}=\frac{1}{p}=k$ logo, $L=\frac{u_{p+1}}{1-1/p}=\frac{1}{p!(1-1/p)}=\frac{1}{(p-1)!(p-1)}$ e, por ser $R_p\leq L$, será $R_p<5/10000$, se fôr $L<5/10000$, para o que basta ser $p=7$.

Tem-se, por fim, $e\simeq 1+1/1!+1/2!+1/3!+1/4!+$ $+1/5!+1/6!$ $e\simeq 1+1+0{,}5+0{,}166\bar{7}+0{,}0417+0{,}0083+$ $+0{,}0014$, $e\simeq 2{,}718$.

2) *Calcule* $\log 2$, *com um êrro absoluto inferior a* 10^{-3}.

É sabido que as igualdades $\log(1+x)=x-x^2/2+$ $+\cdots+(-1)^{n+1}x^n/n+\cdots$ e $\log(1-x)=-[x+x^2/2+$ $+\cdots+x^n/n+\cdots]$ são válidas para x no intervalo aberto $(-1,1)$. Portanto, neste intervalo, é válida a igualdade $\log\frac{1+x}{1-x}=2[x+x^3/3+\cdots+x^{2n+1}/_{2n+1}+\cdots]$.

Fazendo $x=\frac{M-N}{M+N}$, onde M e N são positivos e $M>N$ virá $\log M=\log N+2\left[\frac{M-N}{M+N}+\right.$ $\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{2n+1}+\cdots\right]$ igualdade válida para $M>N>0$.

Façamos $M=2$ e $N=1$, será

$$\log 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{3^n}+\cdots\right].$$

Em virtude do que está dito, não é necessário estudar o carácter desta série para afirmar que ela é convergente. Todavia, a aplicação do critério d'Alembert mostraria a sua convergência.

Para $n>p$ é sempre $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{u_{p+1}}{u_p}=\frac{2p+1}{9(2p+3)}=k$ logo, $L=\frac{u_{p+1}}{1-k}=\frac{1}{3^{2p+1}(16p+26)}$ e, por ser $R_p\leq L$, será $R_p<5/10000$, se fôr $L<5/10000$ para o que basta ser $p=2$.

Teremos, finalmente,

$$\log 2\simeq\frac{2}{3}+\frac{2}{81}=0{,}666\bar{7}+0{,}024\bar{7}=0{,}691.$$

3) *Calcule* $\sqrt[3]{7}$ *cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-2}.

Observemos que $\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{2^3-1}=2\cdot\sqrt[3]{1-1/8}=2r$. Mas, $r=(1-1/8)^{1/3}=1-\frac{1}{3.8}+\frac{1/3(1/3-1)}{2!}\frac{1}{8^2}+\cdots+$ $+(-1)^n\frac{1/3(1/3-1)\cdots(1/3-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{8^n}+\cdots$ série cujos têrmos, a partir do segundo, são todos negativos. Para $n>p$ é sempre $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{u_{p+1}}{u_p}=\frac{p-1/3}{8(p+1)}=k$.

Então $L=\frac{-u_{p+1}}{1-k}=(-1)^p\frac{1/3(1/3-1)\cdots(1/3-p)(p+1)}{8^{p+1}[p+1-(1/3-p)1/8]}$ e, por ser $|R_p|\leq L$, será $|R_p|<1/400$, se fôr $L<1/400$, para o que basta ser $p=2$.

Tem-se, por fim,

$$\sqrt[3]{7}=2r\simeq 2-1/12\simeq 2-0{,}08\bar{3}\simeq 1{,}92.$$

2.º caso. *A convergência da série foi reconhecida pelo critério de Cauchy.*

Neste caso, segue-se o mesmo método que no caso anterior e a construção da majorante do resto é ainda mais simples.

A partir duma ordem n_1 é sempre $\sqrt[n]{u_n}<k<1$, portanto, para $n>p$ é $\sqrt[n]{u_n}<\sqrt[p]{u_p}=k<1$ ou $u_n<k^n$. A majorante do resto $R_p=u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots$ será $k^p+k^{p+1}+\cdots=\frac{k^p}{1-k}=L\geq R_p$.

Exemplo: Calcule a soma da série de têrmo geral $u_n=1/(n!)^n$, *cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-2}.

Para $n>p$ tem-se $\frac{1}{(n!)^n}<\frac{1}{(p!)^p}=k^p$, logo, $L=\frac{1}{(p!)^{p-1}(p!-1)}$. Por ser $R_p\leq L$, será $R_p<5/1000$ se fôr $L<5/1000$, para o que basta ser $p=4$. Teremos, portanto,

$$S\simeq 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{216}+\frac{1}{331776}\simeq 1+0{,}25+0{,}00\bar{5}\simeq 1{,}25.$$

3.º caso. *A convergência da série foi reconhecida por comparação com a série harmónica generalizada,* $u_n=1/n^\alpha$ *(Dirichlet).*

Neste caso, é possível determinar um número k tal que $L=\frac{k}{p^\alpha}>R_p$.

Reconhece-se fàcilmente que $\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{p^\alpha}<$ $<\int_1^p\frac{dx}{x^\alpha}<1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^\alpha}$ ou, o que é o mesmo, $S_p-1<\int_1^p\frac{dx}{x^\alpha}<S_{p-1}$ tomando limites quando $p\to\infty$, vem $S-1\leq\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}\leq S$. Mas, $R_p=S-S_p=(S-1)-(S_p-1)\leq\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha}-\int_1^p\frac{dx}{x^\alpha}=$ $=\int_p^\infty\frac{dx}{x^\alpha}$. Portanto $R_p\leq\frac{1}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}=\frac{p/(\alpha-1)}{p^\alpha}$ donde $k=p/(\alpha-1)$.

Exemplo: Calcule a soma da série de têrmo geral $u_n=\frac{n}{n^5+1}$, *cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-2}.

Tem-se $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} u_n=1$, se $\alpha=4$. Para $n>p$ será $R_p<\frac{1}{3p^3}=L$ e para que $L<\frac{5}{1000}$ terá de ser pelo menos $p=4$. Teremos

$$S\simeq 1/2+/233+3/244+1/256=0{,}57 .$$

B) **Séries alternas.**

Seja a série alterna convergente $u_1-u_2+\cdots+$ $+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$, onde $u_1, u_2, \cdots$ são positivos. Se considerarmos os p primeiros têrmos da série, o resto pode escrever-se $|R_p|=|u_{p+1}-(u_{p+2}-u_{p+3})-$ $+(u_{p+4}-u_{p+5})-\cdots|<u_{p+1}$ porque $u_{p+k}>u_{p+k+1}$, visto a série ser convergente. Portanto, o módulo do primeiro têrmo desprezado é um limite superior do êrro sistemático.

Exemplos: 1) *Calcule* sen $\frac{\pi}{5}$ *cometendo um êrro absoluto inferior a* 10^{-2}.

Sabe-se que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}-\left(\frac{\pi}{5}\right)^3\Big/3!+\cdots+$ $+(-1)^n\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n+1}\Big/(2n+1)!+\cdots$.

Se considerarmos só o primeiro têrmo, cometeremos um êrro sistemático $\varepsilon_S<\frac{\pi^3}{6.5^3}<\frac{4^3}{6.5^3}=\frac{32}{375}$. Se considerarmos os dois primeiros têrmos, o êrro sistemático será $\varepsilon_S<\frac{\pi^5}{120.5^5}<\frac{4^5}{120.5^5}=\frac{128}{41875}<\frac{1}{200}$.

Então será $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\simeq\frac{\pi}{5}-\frac{\pi^3}{6.5^3}\simeq 0{,}628-0{,}041=0{,}59$.

2) *Desenvolver em série a função* $f(x)=\frac{1+x}{e^x}$. *Utilizar os três primeiros têrmos para calcular* $f\left(\frac{1}{10}\right)$ *e* $f\left(\frac{1}{5}\right)$. *Que confiança merecem os resultados?* (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—3.º exame de freqüência, Junho de 1938).

Como se reconhece imediatamente

$f(x)=(1+x)e^{-x}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{6}x^3-\frac{x^4}{8}+\cdots$ donde $f\left(\frac{1}{10}\right)\simeq 1-\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}\simeq 0{,}9953$ com um êrro absoluto $\varepsilon=\varepsilon_s+\varepsilon_c<\frac{1}{80.000}+\frac{1}{100.000}<\frac{1}{10.000}$, e $f\left(\frac{1}{5}\right)\simeq 1-\frac{1}{50}+\frac{1}{225}\simeq 1-0{,}02+0{,}0044=0{,}984$ com um êrro absoluto $\varepsilon=\varepsilon_s+\varepsilon_c<\frac{1}{5.000}+\frac{1}{10.000}<\frac{1}{1000}$.

3) *Calcule com um êrro absoluto inferior a* 10^{-} *o* log 1,005.

A igualdade $\log(1+x)=x-x^2/2+\cdots+(-1)^{n-1}x^n/n+\cdots$ é válida para x tal que $x^2<1$. Portanto, $\log 1{,}005=\frac{5}{1000}-\frac{25}{2.000.000}+\cdots$.

Se considerarmos um têrmo da série, cometeremos um êrro sistemático

$$\varepsilon_s<\frac{25}{2.000.000}=\frac{1}{80.000}>\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}.$$

Se considerarmos dois têrmos, o êrro sistemático $\varepsilon_s<\frac{125}{3.10^9}=\frac{1}{24.10^6}<\frac{1}{2}\cdot 10^{-7}$.

Portanto, $\log 1{,}005\simeq 0{,}005-0{,}0000125=0{,}0050125$.

3. **Exercícios propostos.**

1) Calcular a soma da série de termo geral $u_n=\frac{n^3}{n!}$ [Note-se que, para $n\geq 3$, é $u_n=\frac{1}{(n-1)!}+$ $+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-3)!}$. A soma é $S=5e$.

2) Calcular a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an}{br^n}$.

3) Estudar e representar geomètricamente a função $y=e^{1-1/x}$. As ordenadas dos pontos notáveis (máximos e mínimos ou pontos de inflexão, se houver) serão calculadas com um êrro inferior a 10^{-3}, utilizando o desenvolvimento em série de e^x (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—2.º exame de freqüência, Junho de 1941. V. *Gazeta de Matemática* n.º 10, p. 18).

4) Utilizar o desenvolvimento em série para o cálculo, com um êrro inferior a 10^{-3}, das ordenadas dos pontos de inflexão da curva de equação $y=e^{-2x^2}$ (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—2.º exame de freqüência, Junho de 1940. V. *Gazeta de Matemática* n.º 6, p. 10).

5) Calcular quatro têrmos do desenvolvimento em série da função $y=\frac{e^{x^2}}{1+x^2}$. Calcular $y\left(\frac{1}{2}\right)$ com um êrro inferior a 10^{-3} (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—Exame final, Julho de 1940).

6) Estudar e representar geomètricamente a função $y=e^{\operatorname{sen} x}$. Estudar a sua inversão. Utilizar o seu desenvolvimento em série para calcular o valor da função para $x=-\frac{\pi}{6}$ com um êrro inferior a 10^{-3} (I. S. C. E. F.—Álgebra Superior—Exame final, Julho de 1939).

7) Calcular o integral $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^4}}$ com três casas

decimais exactas (I. S. T.—Cálculo Infinitesimal —1.º exame de freqüência, 1927-28).

A função integranda pode escrever-se

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^4}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^4}{4}\right)^{-1/2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{1/2(1/2-1)}{2.2!}\cdot\frac{x^8}{4^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{2.n!}\cdot\frac{x^{4n}}{4^n}+\cdots$$

sendo a última igualdade válida no intervalo $(-\sqrt{2},+\sqrt{2})$ no qual a série é uniformemente convergente e que contém o intervalo $(0,1)$ de integração. Logo,

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^4}}=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2.2.4}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1/2(1/2-1)}{2.2!\,4^2}\cdot\frac{x^9}{9}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{2.n!\,4^n}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\cdots\right]_0^1.$$

Resta calcular a soma da série numérica de têrmos positivos $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2.4.5}-\frac{1/2(1/2-1)}{2.2!\,4^2.9}+\cdots+(-1)^n\frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{2.n!\,4^n(4n+1)}+\cdots$ com a aproximação requerida.

8) Mostrar que a série de têrmo geral $u_n=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ para $x=0,1$ é convergente e calcular a sua soma com 6 decimais exactos (I. S. T.—Matemáticas Gerais—2.º exame de freqüência, 1939-40. V. *Gazeta de Matemática* N.º 6, p. 11).

9) Sendo $\operatorname{tgh} x=0,75$, calcular x com 4 casas decimais (I. S. T.—Matemáticas Gerais—1.º exame de freqüência—1938-39).

4. Bibliografia.

Émile Gau—*Calculs Numériques et Graphiques,* A. Colin—Paris 1932, p. 87-103.

Ugo Cassina—*Calcolo Numerico,* Zanichelli—Bologna 1928.

Giuseppe Belardinelli—*Esercizi di Algebra Complementare,* Zanichelli—Bologna 1923, p. 37-65, 101-122.

CLUBES DE MATEMÁTICA

por ANTÓNIO MONTEIRO

Os Clubes de Matemática desempenham um papel muito importante no ensino da matemática nos Estados Unidos. Os Clubes de Matemática têm por objectivo promover e desenvolver o gôsto pelo estudo da matemática, entre os estudantes das escolas secundárias e superiores, pondo em evidência, em reüniões especialmente destinadas a êsse fim, a beleza desta ciência e a utilidade da sua aprendizagem para a vida moderna. Além disso, os Clubes de Matemática constituem um poderoso auxiliar do ensino e da formação cultural e moral dos seus componentes.

Um dos primeiros Clubes de Matemática dos Estados Unidos foi fundado em 1903 na *Shattuck School,* uma escola particular de rapazes em Faribault, Minesota. Do princípio do século até hoje, os Clubes de Matemática têm-se espalhado por tôdas as escolas dos Estados Unidos, e a importância dêste movimento é unânimemente reconhecida pelos professores americanos. Basta dizer que a revista da Associação dos Professores de Matemática dos Estados Unidos *The American Mathematical Monthly* publica uma secção especialmente dedicada aos Clubes de Matemática dirigida pelo grande matemático E. H. C. Hildebrandt do *New Jersey State Teachers College.*

A actividade dêsses clubes despertou, por certo, o gôsto pelo estudo das matemáticas a muitos dos cientistas que forjaram em anos de trabalho continuado, a glória da escola matemática americana.

À luz desta experiência estamos no direito de pensar que a criação de Clubes de Matemática na maioria das nossas escolas secundárias e superiores, é susceptível de determinar uma corrente vital de interêsse pela matemática, entre os jovens estudantes, que contribuirá de uma maneira eficaz para o ressurgimento das matemáticas portuguesas.

É claro que a criação dêsses Clubes dependerá em grande parte do interêsse e espírito de iniciativa de professores e estudantes.

Nas escolas em que houver um grupo, muito embora pequeno, de pessoas capazes de fundar um Clube de Matemática, estou certo que elas arrastarão atraz de si a grande maioria dos estudantes interessados pela matemática, na medida em que a actividade do Clube corresponder às aspirações culturais actualmente existentes entre essas camadas.

Tôdas as informações que tenho do nosso meio, mostram que existe uma verdadeira ânsia de cultura entre os estudantes das nossas escolas superiores.

Nas escolas superiores dos Estados Unidos os estudantes respondem a essas inquietações culturais no campo das ciências matemáticas, fun-