MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1941)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 5

1013 — Resolver a inequação $(x+2)^3 > x^3-26$. R: *A inequação proposta é equivalente a* $3x^2+6x+17>0$, *inequação que é verificada para qualquer valor* x *pois as raízes do trinómio do primeiro membro são complexos.*

1014 — Qual é o número máximo de pontos em que se podem interseptar n rectas? R: $\binom{n}{2}=n(n-1)/2$.

1015 — Fazer a classificação das funções. Aplicar à função $y=2x^2+\sqrt{2}:(x-1)$. R: *A função é algébrica racional fraccionária.*

1016 — Calcular com a aproximação de 1′ os valores de α que satisfazem à equação $\operatorname{sen}\alpha=\cos^2\beta(\operatorname{sen}2\beta)^{1/2}$ para $\beta=54^\circ 45'$. R: $\log\operatorname{sen}\alpha=2\log\cos 54^\circ 45'+\frac{1}{2}\log\operatorname{sen}70^\circ 30'=2\times\bar{1},76129+\frac{1}{2}\times\bar{1},97435=\bar{1},50975$ *donde* $\alpha=n.180^\circ+(-1)^n\times[18^\circ 52']$.

1017 — O ângulo de duas tangentes tiradas de um ponto a uma circunferência é igual a 45° 13′ e a distância daquêle ponto ao centro desta é de 31,42 metros. Determinar o comprimento dos dois arcos em que é dividida a circunferência pelos pontos de tangência. R: *O raio da circunferência sendo um cateto do triângulo rectângulo cuja hipotenusa é a distância do ponto ao centro da circunferência e o outro cateto o segmento de tangente compreendido entre o ponto e a circunferência será* $r=31,42\operatorname{sen}\frac{45^\circ 13'}{2}$ *logo* $\log r=\log 31,42+\log\operatorname{sen}22^\circ 36' 30''=1,49721+\bar{1},58482=1,08203$ *donde* $r=12,18$ *e o perímetro da circunferência é então* $2\pi r=76,49$. *Como o outro ângulo agudo do triângulo rectângulo que mede* 67° 23′ 30″ *é o ângulo ao centro do arco igual a metade de um dos arcos em que a circunferência é dividida pelos pontos de tangência, êsse arco terá o comprimento* $\frac{134,78}{180}\times\pi\times 12,18=28^m,61$ *e o outro arco será por isso igual a* $76,49-28,61=47,88$.

1018 — Construir um triângulo dada a base, a altura e o ângulo oposto àquela. Discutir as soluções possíveis. R: *Dado o segmento da base* AB, *o vértice oposto* C *estará sôbre uma paralela* t *a* AB *que diste desta duma distância igual à altura dada. Por outro lado, do vértice* C *deve-se ver o segmento* AB *sob o ângulo dado, isto quere dizer que o ponto* C *deve estar sôbre o segmento capaz do ângulo dado. Assim, conforme a recta* t *não cortar, fôr tangente ou cortar em dois pontos o arco de circunferência a que pertence* C, *assim haverá zero, uma ou duas soluções.*

1019 — Quantos produtos diferentes pode obter com cinco números primos entre si, não repetindo em nenhum produto o mesmo factor? Chegava à mesma conclusão se os números não fôssem primos entre si? R: *O número de produtos diferentes que se podem obter são* ${}^5C_5+{}^5C_4+C_3+{}^5C_2=2^5-6=26$. *Se os números não fôssem primos entre si não se chegava à mesma conclusão, porque poderia haver produtos com factores diferentes e que não fôssem diferentes.*

Ponto n.º 4

1020 — Determinar os valores de m que tornam reais e do mesmo sinal as raízes da equação $mx^2+(m-1)x-3=0$. R: *Para que as raízes sejam reais é necessário e suficiente que* $(m-1)^2+12m\geq 0$, *ou* $m^2+10m+1\geq 0$, *desigualdade que é verificada para os valores* $x\geq -5+2\sqrt{6}$ *ou* $x\leq -5-2\sqrt{6}$. *Por outro lado para que as raízes sejam do mesmo sinal é necessário que* $-3/m<0$ *ou seja* $m<0$. *Logo os valores de* x *que satisfazem ao problema são dados por* $-5+2\sqrt{6}\leq x<0$ *e* $x<-5-2\sqrt{6}$.

1021 — Simplificar a expressão $\frac{(a^{1/2}b^{-3}c)^2}{\sqrt{a}\,b^{2/3}c^n}$. R: $a^{1/2}b^{-20/3}c^{2-n}$.

1022 — Determinar as soluções inteiras e positivas da equação $30x-21y-6=0$. R: *A equação proposta é equivalente a* $10x-7y=2$, *equação que admite a solução inteira* $x=-4$, $y=-6$; *as soluções inteiras da equação são então dadas pelas expressões* $x=-4+7m$ *e* $y=-6+10m$, *expressões que para os valores de* $m>3/5$ *dão as soluções inteiras e positivas pedidas.*

1023 — Os comprimentos do arco e do raio de um segmento de círculo são respectivamente iguais a 105,32 e 100,25 metros. Determinar a sua área. R: *O ângulo ao centro correspondente ao arco dado tem por medida como é obvio* $360^\circ\times$

$\times 105{,}32 : (2\pi \times 100{,}25) = 60^\circ\,12'$. *A área do segmento é então dada por* $A = \dfrac{105{,}32 \times 100{,}25}{2} - 100{,}25^2 \operatorname{sen} 30^\circ\,6' \cos 30^\circ\,6' = 5279{,}16 - 4351{,}67 = 927{,}49\,\mathrm{m}^2$.

1024 — Calcular por logaritmos até à aproximação de 1′, os valores de α que satisfazem à equação $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen}^2 \beta : \sqrt{4 \cos \beta/2}$, para $\beta = 125^\circ\,12'$. R: $\log \operatorname{tg} \alpha = 2 \log \operatorname{sen} 125^\circ\,12' + 1/2 \operatorname{colog} \cos 62^\circ\,36' + \operatorname{colog} 2 = 2 \times \bar{1},91230 + 1/2 \times 0,33705 + \bar{1},69897 = \bar{1},69209$ *donde* $\alpha = 12^\circ\,46' + n \cdot 180^\circ$ *sendo* n *um inteiro qualquer.*

1025 — Conhecendo o perímetro de um triângulo e o valor dos ângulos construir o triângulo. R: *Constroi-se um triângulo* A′ B′ C′ *semelhante ao pedido* ABC, *pois se conhecem os ângulos. Como os lados do triângulo* ABC *são proporcionais aos do triângulo* A′ B′ C′, *basta decompor o segmento representativo do perímetro dado em* 3 *segmentos proporcionais aos lados do triângulo* A′ B′ C′.

1026 — Determinar todos os factores do número 280. R: *Como* $280 = 2^3 \times 5 \times 7$, *teremos como divisores de* 280 *as parcelas do desenvolvimento de* $(1+2+4+8)(1+5)(1+7)$ *ou sejam os números* 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 140 *e* 280.

Soluções dos n.os 1015 a 1026 de J. Paulo.

I. S. C. E. F. — 10 de Outubro de 1941

1027 — *a)* Defina as funções trigonométricas e dê as suas propriedades e aplicações mais importantes.

b) Resolva o seguinte problema: determinar o maior e o menor valor que pode tomar a diferença $\operatorname{sen}^4 \theta - \cos^4 \theta$. R: $f(\theta) = \operatorname{sen}^4 \theta - \cos^4 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta = -\cos 2\theta$. *a) O maior valor de* $f(\theta)$ *é* 1 *que corresponde a* $\cos 2\theta = -1$ *ou* $\theta = k\pi \pm \pi/2$; *b) O menor valor de* $f(\theta)$ *é* -1 *que se obtém quando fôr* $\cos 2\theta = +1$ *ou* $\theta = k\pi$ (k inteiro qualquer).

1028 — Determinar p e q de modo que o polinómio $x^3 + px + q$ seja divisível por $(x-1)^2$. R: *Efectuando a divisão obtém-se o resto* $R(x) = (p+3)\,x + q - 2$ *que deverá ser identicamente nulo; portanto* $p + 3 = 0$, $q - 2 = 0$ *ou* $p = -3$, $q = 2$.

1029 — Calcular $x = \sqrt{\dfrac{a}{b^3}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{c^4}}$ onde $a = 3{,}4724$, $b = \operatorname{tg} 218^\circ\,28'$, $c = (1{,}05)^{-2}$. R: *A expressão proposta pode escrever-se*: $x = a^{1/2} \cdot b^{-3/2} \cdot c^{-4/3}$ *ou substituindo valores* $x = (3{,}4724)^{1/2} \cdot (\operatorname{tg} 38^\circ\,28')^{-3/2} \cdot (1{,}05)^{8/3}$. *Aplicando logaritmos*:

$$\log x = \begin{cases} 1/2 \log 3{,}4724 = 1/2 \cdot 0{,}540628 & = 0{,}27031 \\ +3/2 \operatorname{colog} \operatorname{tg} 38^\circ\,28' = 3/2 \cdot 0{,}09991 & = 0{,}14987 \\ +8/3 \cdot \log 1{,}05 = 8/3 \cdot 0{,}02119 & = 0{,}05651 \end{cases}$$

$$\log x = 0{,}47669$$
$$x = 2{,}997.$$

1030 — Calcular o volume dum tronco de cone circunscrito a uma esfera conhecendo o raio r da esfera e a aresta l do tronco. R: *O volume dum tronco de cone de revolução de altura* h *e raios das bases* R_1 *e* R_2 *é dado por* 1) $V = \dfrac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$. *No problema em questão, a altura* h *do tronco de cone é um diâmetro da esfera, logo* $h = 2r$. *Como se sabe, num trapézio circunscrito a uma circunferência, a soma das bases é igual à soma dos lados não paralelos, portanto* $R_1 + R_2 = l$. *Considerando* $R_1 > R_2$, *a aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo de hipotenusa* l *e de catetos* $(R_1 - R_2)$ *e* h, *conduz a* $(R_1 - R_2)^2 + h^2 = l^2$. *Portanto:* $R_1 - R_2 = \sqrt{l^2 - 4r^2}$, $R_1 + R_2 = l$, *sistema que admite a solução:* $R_1 = \dfrac{l + \sqrt{l^2 - 4r^2}}{2}$, $R_2 = \dfrac{l - \sqrt{l^2 - 4r^2}}{2}$. *Substituindo estes valores em* 1) *e simplificando virá:* $V = 2/3 \cdot \pi r (l^2 - r^2)$.

1031 — Das relações

$x = r \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$, $y = r \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$, $z = r \cos \beta$

tirar r, α, β em função de x, y, z. (Indicação: começar por quadrar e somar ordenadamente). R: *Quadrando e somando ordenadamente, virá:* $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 [(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta] = r^2$ *ou* $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Dividindo a segunda relação pela primeira, obtém-se:* $\operatorname{tg} \alpha = y/x$ *ou* $\alpha = \operatorname{arc\,tg} y/x$. *Da 3.ª relação deduz-se* $\cos \beta = \dfrac{z}{\pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ *ou* $\beta = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{z}{\pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

1032 — Dividir o número 12 em três partes proporcionais a 1/2, 1/3, 1/4. R: *Reduzindo as fracções propostas ao menor denominador comum, tem-se:* 6/12, 4/12, 3/12. *Dividir-se-á portanto,* 12 *em partes directamente proporcionais aos números* 6, 4, 3, *isto é:* $12/13 = x/6 = y/4 = z/3$, *donde* $x = 72/13$, $y = 48/13$ *e* $z = 36/13$.

Soluções dos n.os 1027 a 1032 de O. Morbey Rodrigues.

Contêm pontos da prova de matemática dos *exames de aptidão* de anos lectivos anteriores todos os números da «*Gazeta de Matemática*».