MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de Aptidão às Escolas Superiores (1941)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

Ponto n.º 5

1013 — Resolver a inequação $(x+2)^3 > x^3-26$. R: *A inequação proposta é equivalente a* $3x^2+6x+17>0$, *inequação que é verificada para qualquer valor* x *pois as raízes do trinómio do primeiro membro são complexos.*

1014 — Qual é o número máximo de pontos em que se podem interseptar n rectas? R: $\binom{n}{2}=n(n-1)/2$.

1015 — Fazer a classificação das funções. Aplicar à função $y=2x^2+\sqrt{2}:(x-1)$. R: *A função é algébrica racional fraccionária.*

1016 — Calcular com a aproximação de $1'$ os valores de α que satisfazem à equação $\operatorname{sen}\alpha=\cos^2\beta(\operatorname{sen}2\beta)^{1/2}$ para $\beta=54^\circ 45'$. R: $\log\operatorname{sen}\alpha=2\log\cos 54^\circ 45'+\frac{1}{2}\log\operatorname{sen}70^\circ 30'=2\times\bar{1},76129+\frac{1}{2}\times\bar{1},97435=\bar{1},50975$ *donde* $\alpha=n.180^\circ+(-1)^n\times[18^\circ 52']$.

1017 — O ângulo de duas tangentes tiradas de um ponto a uma circunferência é igual a $45^\circ 13'$ e a distância daquêle ponto ao centro desta é de 31,42 metros. Determinar o comprimento dos dois arcos em que é dividida a circunferência pelos pontos de tangência. R: *O raio da circunferência sendo um cateto do triângulo rectângulo cuja hipotenusa é a distância do ponto ao centro da circunferência e o outro cateto o segmento de tangente compreendido entre o ponto e a circunferência será* $r=31,42\operatorname{sen}\frac{45^\circ 13'}{2}$ *logo* $\log r=\log 31,42+\log\operatorname{sen}22^\circ 36' 30''=1,49721+\bar{1},58482=1,08203$ *donde* $r=12,18$ *e o perímetro da circunferência é então* $2\pi r=76,49$. *Como o outro ângulo agudo do triângulo rectângulo que mede* $67^\circ 23' 30''$ *é o ângulo ao centro do arco igual a metade de um dos arcos em que a circunferência é dividida pelos pontos de tangência, êsse arco terá o comprimento* $\frac{134,78}{180}\times\pi\times 12,18=28^m,61$ *e o outro arco será por isso igual a* $76,49-28,61=47,88$.

1018 — Construir um triângulo dada a base, a altura e o ângulo oposto àquela. Discutir as soluções possíveis. R: *Dado o segmento da base* AB, *o vértice oposto* C *estará sôbre uma paralela* t *a* AB *que diste desta duma distância igual à altura dada. Por outro lado, do vértice* C *deve-se ver o segmento* AB *sob o ângulo dado, isto quere dizer que o ponto* C *deve estar sôbre o segmento capaz do ângulo dado. Assim, conforme a recta* t *não cortar, fôr tangente ou cortar em dois pontos o arco de circunferência a que pertence* C, *assim haverá zero, uma ou duas soluções.*

1019 — Quantos produtos diferentes pode obter com cinco números primos entre si, não repetindo em nenhum produto o mesmo factor? Chegava à mesma conclusão se os números não fôssem primos entre si? R: *O número de produtos diferentes que se podem obter são* ${}^5C_5+{}^5C_4+C_3+{}^5C_2=2^5-6=26$. *Se os números não fôssem primos entre si não se chegava à mesma conclusão, porque poderia haver produtos com factores diferentes e que não fôssem diferentes.*

Ponto n.º 4

1020 — Determinar os valores de m que tornam reais e do mesmo sinal as raízes da equação $mx^2+(m-1)x-3=0$. R: *Para que as raízes sejam reais é necessário e suficiente que* $(m-1)^2+12m\geq 0$, *ou* $m^2+10m+1\geq 0$, *desigualdade que é verificada para os valores* $x\geq -5+2\sqrt{6}$ *ou* $x\leq -5-2\sqrt{6}$. *Por outro lado para que as raízes sejam do mesmo sinal é necessário que* $-3/m<0$ *ou seja* $m<0$. *Logo os valores de* x *que satisfazem ao problema são dados por* $-5+2\sqrt{6}\leq x<0$ *e* $x<-5-2\sqrt{6}$.

1021 — Simplificar a expressão $\frac{(a^{1/2}b^{-3}c)^2}{\sqrt{a}\,b^{2/3}c^n}$. R: $a^{1/2}b^{-20/3}c^{2-n}$.

1022 — Determinar as soluções inteiras e positivas da equação $30x-21y-6=0$. R: *A equação proposta é equivalente a* $10x-7y=2$, *equação que admite a solução inteira* $x=-4$, $y=-6$; *as soluções inteiras da equação são então dadas pelas expressões* $x=-4+7m$ *e* $y=-6+10m$, *expressões que para os valores de* $m>3/5$ *dão as soluções inteiras e positivas pedidas.*

1023 — Os comprimentos do arco e do raio de um segmento de círculo são respectivamente iguais a 105,32 e 100,25 metros. Determinar a sua área. R: *O ângulo ao centro correspondente ao arco dado tem por medida como é obvio* $360^\circ\times$