MATEMÁTICAS GERAIS—ÁLGEBRA SUPERIOR—COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. C. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **Exame final, 1941**

1033 — Mostrar que todo o polinómio $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ se pode escrever com a forma

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 \cdots 0 & 0 \\ \cdots & & & \\ a_{n-1} & 0 & 0 \cdots x & -1 \\ a_n & 0 & 0 \cdots 0 & x \end{vmatrix}$$

R: *Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da primeira linha vem*

$$f(x) = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \cdots 0 & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 \cdots 0 & 0 \\ \cdots & & & \\ a_n & 0 & 0 \cdots 0 & x \end{vmatrix}$$

$f(x) = a_0 x^n + \Delta_{n-1}$.

Desenvolvendo Δ_{n-1} *segundo os elementos da primeira linha vem* $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \Delta_{n-2}$.

Procedendo para $\Delta_{n-2}, \Delta_{n-3} \cdots \Delta_2$ *como para* Δ_{n-1} *vem* $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$.

1034 — Calcular o raio do círculo de convergência da série $1 + 5z + \dfrac{5^2}{2!} z + \cdots + \dfrac{5^n}{n!} z^n + \cdots$.

R: *Aplicando o critério d'Alembert, obtêm-se*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^{n+1} z^{n+1}/(n+1)!}{5^n z^n / n!} \right| = |z| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = |z| \frac{1}{\infty}$$

logo o raio de círculo de convergência é ∞.

1035 — Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

R: *É sabido que* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+3)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)\, n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)(n+2)\cdots(2n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)\, n^n}{(n+1)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^{n+2} + 6n^{n+1} + 2n^n}{(n+1)^{n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \dfrac{6}{n} + \dfrac{2}{n^2}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} = \frac{4}{e}.$$

1036 — Se a equação $f(x)=0$ de coeficientes inteiros tem uma raiz inteira e se a e b designam dois números inteiros quaisquer, mostrar que um, pelo menos, dos números inteiros $f(a)$, $f(a+1), \cdots f(a+b-1)$ é divisível por b. R: *Depreende-se do enunciado que a equação* $f(x)=0$ *é algébrica de coeficientes inteiros e admite uma raiz inteira* k. *Então* $f(x) = (x-k) f_1(x)$ *onde* $f_1(x)$ *é um polinómio inteiro em* x *de coeficientes inteiros. Façamos nesta igualdade,* $x = a, a-1, \cdots (a+b-1)$, *vem* $f(a) = (a-k) f_1(a)$, $f(a+1) = (a-k+1) f_2(a+1), \cdots$ $f(a+b-1) = (a-k+b-1) f_1(a+b-1)$. *Dos números inteiros consecutivos* $(a-k)$, $(a-k)+1, \cdots (a-k)+b-1$, *em números de* $|b|$, *um dêles é divisível por* b. *Logo, dos números* $f(a), f(a+1), \cdots f(a+b-1)$ *um pelo menos é divisível por* b.

1037 — A que condições deve obedecer o ponto variável (α, β) para que a cónica $(\alpha-1)x^2 + 2\beta xy - (\alpha+1)y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - (\alpha+1) = 0$ represente uma parábola. R: *A equação dada representa uma parábola se* $\beta^2 + (\alpha+1)(\alpha-1) = 0$ *ou* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. *Por outras palavras, a cónica será uma parábola se no plano* $O\alpha\beta$ *o ponto* (α, β) *pertence à circunferência de centro na origem e de raio igual à unidade, será uma elipse se o ponto* (α, β) *é interior à circunferência e será uma hipérbole se o ponto é exterior à mesma circunferência.*

Qualquer que seja o género da cónica esta será degenerescente se se anular o invariante cúbico, ou, o que é o mesmo, se o ponto (α, β) *pertence à curva de equação*

$$\begin{vmatrix} \alpha-1 & \beta & \alpha \\ \beta & -\alpha-1 & \beta \\ \alpha & \beta & -\alpha-1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 2\alpha^3 + 2\beta^2\alpha + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha - 1 = 0$$

que é a recta $\alpha+1=0$ *se se trata duma parábola.*

1038 — Mostrar que as medianas de um triângulo são concorrentes. Encontrar o seu ponto de encontro. R: *Seja o triângulo* ABC. *Escolhamos para sistema de referência aquêle que é constituído por dois eixos ortogonais, contendo o eixo* xx' *o lado* AB *e pertencendo o vértice* C *ao eixo* yy'. *Sejam* a *e* b *as abscissas de* A *e* B *e seja* c *a ordenada de* C. *Então, as equações das medianas são* $2cx + (a+b)y = (a+b)c$, $cx + (2a-b)y = ac$, $cx + (2b-a)y = bc$. *Elas serão concorrentes se o sistema formado por estas equações fôr compatível ou, o que é o mesmo, se fôr nulo o característico*

$$\begin{vmatrix} 2c & a+b & (a+b)c \\ c & 2a-b & ac \\ c & 2b-a & bc \end{vmatrix} = 0.$$

Esta condição é verificada, visto que a primeira linha do determinante é a soma das duas últimas.

O ponto de encontro, cujas coordenadas se obtêm pela resolução do sistema, é $(b-a)/3$, $c/3$.

Soluções dos n.[os] 1035 a 1038 de A. Sá da Costa.

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **Exames finais, 1941 — Alguns pontos.**

1039 — Determine as equações da recta que passa pelo ponto $P(0,2,-1)$ e pelo ponto do plano π em que é $x=2$, $y=1$. Calcule o ângulo que tal recta faz com o plano π. $\pi \equiv$ plano diametral da quádrica $x^2+4y^2-3z^2+3xy+4xz+2yz+$ $+3x-y+2z-6=0$ conjugado com Oz.

R: $r=\begin{cases} x=-2y+4 \\ z=-3y+5. \end{cases}$

1040 — Escreva a equação da cónica $2y^2-4xy+$ $+5x^2-2x+2y-1=0$ referida aos seus eixos e determine as coordenadas dos seus focos.

R: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3/2}=1$, $F(\pm\sqrt{15}/2,0)$.

1041 — Deduza a equação do plano radical das esferas Σ_1, Σ_2 e verifique que a recta dos centros é perpendicular a êsse plano. Σ_1 é a esfera que passa pelos pontos $(0,1,0)$ $(-1,0,2)$, tal que a origem tem potência 3 em relação a Σ_1 e cujo centro pertence ao plano $x=2y$. A equação de Σ_2 é $x^2+y^2+z^2+4x+2y-2z-9=0$.
R: $\pi \equiv 6x+3y-z-6=0$.

1042 — Escreva na forma canónica a equação da parábola $y^2-2xy+x^2-5y-7x+3=0$, e verifique que, referida a êste sistema de eixos, o diâmetro conjugado de Oy é o eixo Oz.
R: $y^2=3\sqrt{2}\,.\,x$.

1043 — As rectas $x=0$, $y=0$, $2x-y-8=0$, $x+2y-16=0$ formam um quadrilátero inscriptível. Calcule as coordenadas do centro e o raio da circunferência circunscrita.
R: $\Sigma \equiv x^2+y^2-4x-8y=0$, $C(2,4)$, $r=\sqrt{10}$.

1044 — Deduza a equação do plano de feixe de sède em $r)\begin{cases} x=z \\ y=3 \end{cases}$ que corta a esfera x^2+y^2+ $+z^2-4x+2z-11=0$ segundo uma circunferência de raio 3. R: $x-z+\lambda(y-3)=0 \longrightarrow \lambda=\frac{9\pm\sqrt{91}}{2}$.

1045 — Determine as equações das tangentes tiradas do ponto $(7,1)$ para a circunferência que passa pelo ponto $(1,2)$ e forma com $\Sigma \equiv x^2+y^2-$ $-3x+y-2=0$ um sistema do eixo radical $e \equiv 3x-$ $-y-3=0$. R: $\Sigma_1 \equiv x^2+y^2=5$, $t_1 \equiv x-2y-5=0$, $t_2 \equiv 2x-11y-3=0$.

Nota — O problema do traçado de tangentes a uma circunferência por um ponto exterior a esta resolve-se fàcilmente considerando que uma tal tangente deverá passar por êsse ponto e a uma distância do centro da circunferência igual ao seu raio.

Soluções dos n.os 1039 a 1045 e nota do n.º 1045 de J. Pais Morais.

Contêm pontos de exames finais de *Álgebra Superior*, os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 4 e 7.

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **2.º exame de freqüência, 2 de Junho de 1942.**

1046 — Dada a função $y=x^2 . I(x)+1$, representá-la gràficamente no intervalo (0,3); indicar o contra-domínio correspondente, os pontos de descontinuïdade e os pontos em que não admite derivada; escrever a equação da tangente no ponto $x=3/2$. R: *Tem-se para* $0 \le x < 1 \rightarrow y=1$, $1 \le x < 2 \rightarrow y=x^2+1$, *e* $2 \le x < 3 \rightarrow y=2x^2+1$. *O gráfico pedido reduz-se pois a um segmento de recta e a 2 arcos de parábola. O contradominio é definido por* $y=1$, $2 \le y < 5$ *e* $9 \le y < 28$. *São pontos de descontinuïdade os de abscissa inteira. Nestes a função* y *não admite derivadas, podendo porém definir-se uma semi-derivada à esquerda e à direita.*

Para $x=3/2$ *é* $y=I(3/2).(3/2)^2+1=9/4+1=13/4$ *e* $y'_{3/2}=2.3/2+1=4$; *a tangente tem pois por equaequação* $Y-13/4=4(X-3/2)$.

1047 — Estudar a série de têrmo geral $u_n=\frac{2n}{3n^3+1}$, e no caso da convergência determinar um limite superior do êrro cometido tomando para valor aproximado da soma da série a soma dos 10 primeiros têrmos da série. R: *Tem-se* $u_n=\frac{2n}{3n^3+1}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$ *e a série dada é portanto convergente. Para a série de têrmo geral* $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$, *majorante da dada, é fácil estabelecer um limite superior do resto, limite portanto do resto da série dada. Com efeito tomando os* 9 *primeiros têrmos duma série de Derichlet convergente* $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ *um limite superior é* $\frac{1}{q^\alpha}\frac{1}{1-\frac{1}{2^\alpha}}$. *No nosso caso é* $q=10$ $\alpha=1$.

1048 — Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação em tôrno do eixo das ordenadas da curva de equações: $(y-1)^2+$ $+(z-3)^2-4=0$, $x=0$. Escrever as equações dos paralelos de menor raio e de maior ordenada. R: *A superfície pedida é um toro. A equação* *obtém-se pela substituïção na equação da geratriz (situada no plano* $x=0$*) de* z *por* $\sqrt{x^2+z^2}$*; vem:* $(y-1)^2+(\sqrt{x^2+z^2}-3)^2-4=0$*, ou* $(x^2+y^2+z^2-2y+6)^2-4(x^2+z^2)=0$*. O paralelo de menor raio é o gerado pelo ponto* $(0,1,1)$ *e tem por equações, por exemplo,* $y=1$, $x^2+z^2=1$*; o de maior ordenada é o gerado pelo ponto* $(0,3,3)$ *e tem por equações:* $y=3$, $x^2+z^2=9$.

Soluções dos n.os 1046 a 1048 de Manuel Zaluar.

I. S. A. — 2.º Exame de freqüência, 28-5-1942

1049 — Determine, pelo método de resolução das equações numéricas as raízes da equação $2x^3-x^2+2x-1=0$. R: *São os seguintes, os resultados da resolução numérica da equação dada. A equação não tem raizes inteiras porque os divisores do têrmo independente* ± 1 *não satisfazem a equação proposta. A transformada da equação em* $y=2x$ *é* $y^3-y^2+4y-4=0$*, cujo têrmo independente admite como divisores* ± 1, ± 2, ± 4*. Dêstes só poderá ser raiz da transformada* $+1$ *visto que um limite superior das raizes positivas é* 2 *(método de Bret) e a equação transformada em* $z=-y$ *é* $z^3+z^2+4z+4=0$*, cujo primeiro membro não tem variações. O divisor* $+1$ *é de facto raiz. A equação* $y^3-y^2+4y-4=0$ *desembaraçada da raiz* $+1$ *reduz-se a* $y^2+4=0$ *cujas raizes são* $\pm 2i$*. Portanto, as raizes da equação proposta são* $1/2, \pm i$.

1050 — *a)* Defina coordenadas cartezianas rectangulares e coordenadas esféricas de um ponto no espaço. Indique quais são os lugares geométricos das equações que se obtêm igualando a zero cada uma das seis coordenadas indicadas. *b)* Determine, pela aplicação do Teorema de Rouché, as posições relativas dos três planos $x-2y+3z-1=0$, $2x+3=0$, $4x-4y+3z-2=0$. R: *O sistema de equações lineares, constituído pelas equações dos três planos, é compatível e indeterminado de grau* 1*, visto que a matriz dos coeficientes e a dos coeficientes e dos têrmos independentes têm ambas caracteristica* 2*. Portanto, os três planos formam feixe.*

1051 — Determine a equação do plano que passa pelo ponto $P(1,2,0)$ e é paralelo às rectas de equações $\begin{cases} x=z+1 \\ y=3z \end{cases}$ $\begin{cases} x-2z+1=0 \\ y+z-3=0. \end{cases}$ R: *Seja* $Ax+By+Cz+D=0$ *a equação do plano. A introdução das condições contidas no enunciado conduz ao sistema de equações lineares e homogêneas em* A, B, C, D $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A+2B+D=0 \\ A+3B+C=0 \\ 2A-B+C=0 \end{cases}$ *o qual admitirá soluções não nulas se fôr* $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$ *ou* $4x+y-7z+6=0$*. É esta a equação do plano.*

1052 — Figure os traços dum plano π oblíquo em relação aos dois planos de projecção e as projecções duma recta r também oblíqua em relação aos mesmos planos de projecção. Determine gràficamente o ângulo φ de r com π.

Contêm pontos de segundos exames de freqüência de *Matemáticas Gerais* e *Álgebra Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2, 6 e 10.

I. S. C. E. F. — Exame final, 17-7-1941

1053 — Fazer o estudo e o traçado da curva de equação $y^2-\operatorname{sen} 2x=0$. Verificar que as funções definidas por esta equação satisfazem à relação $y(xy'+y''')+3y'y''=0$. R: *A curva é simétrica em relação ao eixo* xx'*, porque* $y=\pm\sqrt{\operatorname{sen} 2x}$*. A curva não tem pontos cujas abscissas pertençam aos intervalos abertos* $[k\pi, (2k+1)\pi/2]$ *onde* k *é um número inteiro positivo ou negativo. Também não tem pontos cujas ordenadas pertençam a qualquer dos intervalos abertos* $(-\infty,-1)$ *e* $(1,\infty)$*. Qualquer das funções definidas por* $y=\pm\sqrt{\operatorname{sen} 2x}$ *é periódica de periodo* π*. Em virtude da simetria e da periodicidade, o estudo e o traçado reduzem-se ao estudo e ao traçado da curva de equação* $y=+\sqrt{\operatorname{sen} x}$ *para* $0\le x\le \pi/2$*. Por serem*

$$y'=\cos 2x/\sqrt{\operatorname{sen} 2x}, \quad y''=-\frac{\operatorname{sen}^2 2x+1}{(\operatorname{sen} 2x)^{3/2}} \quad e$$

$$y'''=\frac{\cos 2x\,(3-\operatorname{sen}^2 2x)}{(\operatorname{sen} 2x)^{5/2}},$$

o ponto $(\pi/4, 1)$ *é de máximo para* y*, que é crescente no intervalo* $(0,\pi/4)$ *e decrescente no intervalo* $(\pi/4, \pi/2)$ *e a concavidade da curva está voltada no sentido dos* yy *negativos no intervalo* $(0,\pi/2)$.

1054 — Estudar no ponto $x=1$, a derivada da função $y(x)$ assim definida: $y(1)=0$, para $x\neq 1 \to y=(x-1)/(1+e^{1/x-1})$. R: *A função é contínua no ponto* $x=1$ *porque* $y(1)=0$ *por definição e* $\lim_{x\to 1-0} y(x)=-0$ $\lim_{x\to 1+0} y(x)=+0$*. A derivada de* $y(x)$ *para* $x\neq 1$ *é* $y'(x)=x-1/(1+e^{1/x-1})$ *e* $\lim_{x\to 1-0} y'(x)=0$, $\lim_{x\to 1+0} y'(x)=1$*. Logo o ponto* $x=1$ *é de descontinuïdade finita de 1.ª espécie para a* *derivada* $y'(x)$ *e será um ponto anguloso para a curva de equação* $y=y(x)$. *Equações das tangentes no ponto* $x=1 : y=0$ *e* $y=x-1$.

1055 — Determinar com um êrro inferior a $1/10$ as raízes da equação $P(x) \equiv x^4+3x-11=0$. R: *A equação proposta não admite raízes inteiras porque dos três números* $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ *nenhum é divisível por* 3. *Não admite raízes racionais fraccionárias porque o coeficiente de* x^4 *é igual à unidade. Da aplicação do Teorema de Descartes decorre a afirmação de que a equação proposta admite uma raiz real positiva e outra real negativa. O limite superior das raízes positivas é* 3 *e o inferior das raízes negativas é* -3. *Para* $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, $P(x)$ *toma valores cujos sinais são, respectivamente,* $+ - - \; - - + +$. *Logo as raízes reais pertencem aos intervalos* $(-3, -2)$ *e* $(1, 2)$. *O estudo dos sinais dos valores que* $P(x)$ *toma para* $x=-3;\ -2{,}9;\ -2{,}8;\ -2{,}7;\ -2{,}6;\ -2{,}5;\ -2{,}4;\ -2{,}3;\ -2{,}2;\ -2{,}1;\ -2$ *e para* $x=1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4;\ 1{,}5;\ 1{,}6;\ 1{,}7;\ 1{,}8;\ 1{,}9;\ 2$ *mostra que aquelas raízes pertencem aos intervalos* $(-2{,}1;\ -2)$ *e* $(1{,}5;\ 1{,}6)$. *Os extremos dêstes intervalos são valores aproximados, por defeito e por excesso, das raízes reais da equação proposta, nas condições do enunciado.*

I. S. T. — Exame final

1056 — Sendo $x \cdot y \cdot \sqrt[x]{e}=1$, calcular os verdadeiros valores de y para $x=+0$ e $x=-0$. R: *Tem-se* $y=1/x \cdot \sqrt[x]{e}$. *Portanto* $\lim\limits_{x\to+0} y =$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{e^{1/x}}=\lim_{x\to+0}\frac{-1/x^2}{-1/x^2 \cdot e^{1/x}}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{e^{1/x}}=0$$

$$\lim_{x\to-0} y=-\lim_{x\to+0}\frac{e^{1/x}}{x}=-\infty .$$

1057 — Traçar a cónica $11x^2+84\,xy-24y^2=156$ e calcular a sua excentricidade.

1058 — Mostrar que a função $y=\dfrac{ax-11}{x+a-12}$ é sempre crescente, ou decrescente ou constante. Determinar os valores de a correspondentes a cada um dêsses três casos. R: *Tem-se* $y'=\dfrac{a^2-12a+11}{(x+a-12)^2}$. *Portanto, o sinal da derivada depende só do numerador. A discussão do trinómio* $a^2-12a+11$, *cujas raízes são* 1 *e* 11, *mostra que a derivada é nula para* $a=1, 11$, *é positiva para* $a<1$ *ou* $a>11$ *e negativa para* $1<a<11$. *Logo a função é crescente se* $a<1$ *ou* $a>11$, *é decrescente se* $1<a<11$ *e é constante se* $a=1, 11$.

1059 — Seja uma recta r e dois pontos P e Q que se projectam sôbre r em P' e Q' respectivamente. Seja $\overline{P'Q'}=c$, $\overline{PP'}=a$, $\overline{QQ'}=b$. Calcular o limite de $\overline{MP}-\overline{MQ}$ quando M, colocado em r, se afasta ao infinito num sentido ou noutro.

1060 — Sendo y uma função de x definida pela equação $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, mostrar que é $y''=1/3\, x^{-4/3} \cdot y^{-1/3}$ sendo y'' a 2.ª derivada de y em ordem a x.

1061 — Dados os dois planos $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ e $(\gamma-\beta)x+(\alpha-\gamma)y+(\alpha-7\beta)z+4\alpha-8\beta-2\gamma=0$, determinar os coeficientes α, β, γ de modo que estes planos sejam paralelos. Achar-se-ão três soluções, os planos correspondentes, dois a dois paralelos formam um paralelipípedo. Achar o volume dêste paralelipípedo. R: *Os dois planos serão paralelos se*

$$\frac{\alpha}{\gamma-\beta}=\frac{\beta}{\alpha-\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha-7\beta}=\lambda \quad \textit{donde} \quad \begin{cases} \alpha+\lambda\beta-\lambda\gamma=0 \\ \lambda\alpha-\beta-\lambda\gamma=0 \\ \lambda\alpha-7\lambda\beta-\gamma=0 \end{cases}$$

sistema homogéneo que admitirá soluções não nulas se

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -\lambda \\ \lambda & -1 & -\lambda \\ \lambda & -7\lambda & -1 \end{vmatrix}=0 \quad \textit{ou} \quad 6\lambda^3-7\lambda^2+1=0 \quad \textit{donde} \quad \lambda=-1/3, 1/2, 1 .$$

Para cada um dos valores do parâmetro λ *o sistema fornece, por exemplo,*

$$\alpha=1, 3, 1 \quad \beta=-2, -1, 0 \quad \gamma=-5, 5, 1$$

e as equações dos três pares de planos paralelos são

$$x-2y-5z=0 \quad 3x-y+5z=0 \quad x+z=0$$
$$x-2y-5z=10 \quad 3x-y+5z=-15 \quad x+z=-2 .$$

Os pontos $(0, 0, 0)$, $(-15/13, -45/13, 15/13)$, $(25/13, 10/13, -25/13)$, $(-15/13, -20/13, -11/13)$ *são os vértices do paralelipípedo pertencentes a três arestas concorrentes em* $(0, 0, 0)$. *Então o volume do paralelipípedo é*

$$V=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 13/15 \\ 5 & 2 & -5 & 13/15 \\ -15 & -20 & -11 & 13 \end{vmatrix} \times \left(\frac{15}{13}\right)^2 \cdot \frac{1}{13}=\frac{338\times 15^2}{13^3}.$$

1062 — Calcular as raízes racionais da equação $3x^5-5x^4-11x^3+27x^2-20x-10=0$. R: *A equação admite uma única raiz racional* $-1/3$. *Das restantes raízes, uma é irracional negativa e as outras três ou são irracionais positivas ou duas são complexas e uma irracional positiva.*

Contêm pontos de exames finais de *Álgebra Superior*, os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 4 e 7.

I. S. T. — 2.os exames de freqüência — Alguns pontos

1063 — Achar a equação da esfera que é tangente ao plano xOy no ponto $(2, 4, 0)$ e passa pelo ponto $P(0, 0, 4)$. R: *A equação geral das* *esferas tangentes ao plano* xOy *no ponto* $(2, 4, 0)$ *é* $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-r)^2=r^2$ *onde* r *é o raio. Se a esfera passa pelo ponto* P $(0, 0, 4)$, *as coordenadas de* P *satisfarão à sua equação, isto é,* $4+16+(4-r)^2=r^2$ *donde* $r=9/2$ *e a equação da esfera é* $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-9/2)^2=81/4$.

1064 — Dado o ponto $A\,(2, 4)$ e a recta $y=x-3$, determinar sôbre esta recta dois pontos B e C tais que o triângulo ABC seja rectângulo em A e isósceles. Fazer a representação gráfica. R: *Determinemos a intersecção da recta* $y=x-3$ *com a perpendicular baixada de* A *sôbre ela:*

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y-4=2-x \end{cases} \quad \begin{cases} x=9/2 \\ y=3/2 \end{cases}.$$

Calculemos a distância do ponto A *à recta* $y=x-3$:

$$|d| = \left| \frac{2-4-3}{\sqrt{1+1}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Os pontos B *e* C *são as intersecções da circunferência de centro em* $(9/2, 3/2)$ *e raio igual a* $5/\sqrt{2}$, *com a recta dada, isto é:*

$$\begin{cases} y=x-3 \\ (x-9/2)^2+(y-3/2)^2=25/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-1 . \end{cases}$$

1065 — Desenhar os lugares geométricos de equações a) $(x^2+y^2)^2=4$ b) $x^3-y^3=0$.
R: a) *A equaçao* $(x^2+y^2)^2=4$ *desdobra-se em duas das quais é o produto* $x^2+y^2=2$ *e* $x^2+y^2=-2$. *A primeira representa uma circunferência de centro na origem e de raio* $\sqrt{2}$; *a segunda uma circunferência de centro na origem e de raio* $\sqrt{2}i$. b) *A equação* $x^3-y^3=0$ *decompõe-se em duas* $x-y=0$, $x^2+xy+y^2=0$. *A primeira representa a bissectriz dos quadrantes ímpares; a segunda é uma cónica género elipse que degenera nas rectas conjugadas* $2x+(1\pm\sqrt{3}i)\,y=0$.

Contêm pontos de segundos exames de freqüência de *Álgebra Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2, 6 e 10.

Soluções dos n.os 1049 a 1065 de A. Sá da Costa.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — CÁLCULO **— Exame final, Junho de 1941**

1066 — Determinar as curvaturas principais das secções normais da superfície $x^3y^2+y^3+z^3-3y+1=0$ no ponto $(0, 1, 1)$.

1067 — Integrar a equação

$$y' - \frac{x^4+4x^2-1}{x(x^4-1)}\,y = \frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2 \operatorname{arc\,tg} x}.$$

1068 — A linha (l) é representada pelas equações $\begin{cases} x=\varphi(\alpha) \\ y=\psi(\alpha) \end{cases}$ em que α é o ângulo que a tangente em M faz com ox. Escrever as expressões das coordenadas X e Y de um ponto P do plano situado sôbre a normal em M a uma distância $MP=a$ em que a é uma constante. Relacionar a diferencial dS do arco de curva (L), lugar dos pontos P, com ds; por integração relacionar os arcos $\widehat{P_0P}$ (P_0 ponto de (L) sôbre ox) e $\widehat{OM}$ supondo $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$; e calcular o comprimento do arco P_0P em função de α supondo que (l) é a cicloide: $x=r(t-\operatorname{sen} t)$, $y=r(1-\cos t)$.

F. C. P. — CÁLCULO **— 2.º exame de freqüência, Maio de 1941**

Ponto n.º 2

1069 — Integrar a equação: $x^2y''+xy'+4y=32\cos(2\log x).\log x$. R: *Fazendo a mudança de variável independente* $x=e^t$ *vem*. $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=32t\cos 2t$ *ou* $\frac{d^2y}{dt^2}+4y=32t=16t\,(e^{2it}+e^{-2it})$.
Integral geral da equação sem 2.º membro: $y=C_1\operatorname{sen}2t+C_2\cos 2t$. *Integrais particulares:*

$$y_1=16\,\frac{t}{(D+2i)^2+4}\cdot e^{2it}=\left(-2it^2+t+\frac{i}{4}\right)e^{2it} \quad e$$

$$y_2=\left(2it^2+t-\frac{i}{4}\right)e^{-2it}.$$ *Integral geral:*

$$y=C_1\operatorname{sen}2t+C_2\cos 2t+4t^2\operatorname{sen}2t+2t\cos 2t-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t.$$

Integral geral da equação dada: $y=C_1\operatorname{sen}2(\log x)+C_2\cos 2(\log x)+4(\log x)^2\operatorname{sen}2(\log x)+2(\log x)\cos 2(\log x)-\frac{1}{2}\operatorname{sen}2(\log x)$.

1070 — Calcular $\iint_D \frac{dx\,dy}{xy}$. O domínio D situado no 1.º quadrante é limitado pelas linhas $x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$; $y=x$ e $y=\sqrt{3}\,x$. R: *Calculemos o integral em coordenadas polares:*

$$y\iint \frac{2\rho\,d\rho\,d\theta}{\rho^2\operatorname{sen}2\theta}=2\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{d\theta}{\operatorname{sen}2\theta}\int_1^2\frac{d\rho}{\rho}=\frac{1}{2}\cdot\log 2\,.\log 3.$$

1071 — Determinar as curvaturas principais da superfície $2xy+x^3-y^3+\log(z+1)=0$, no ponto $(0, 0, 0)$. R: *Cálculo de* p, q, r, s, t.

$$\left\{\begin{aligned} &2y+3x^2+p\,\frac{1}{z+1}=0 \\ &2x-3y^2+q\,\frac{1}{z+1}=0 \end{aligned}\right. \quad \left|\begin{aligned} &p=0 \\ &q=0, \end{aligned}\right.$$

$$6x - \frac{p^2}{(z+1)^2} + \frac{r}{z+1} = 0, \quad 2 - \frac{pq}{(z+1)^2} + \frac{s}{z+1} = 0,$$

$-6y + \frac{q^2}{(z+1)^2} + \frac{t}{z+1} = 0$. *No ponto* $(0,0,0)$ *temos:* $r=0$, $s=-2$, $t=0$. *Equação de condição:* $sm^2 + (r-t)\,m - s = 0$, $\;-2m^2+2=0 \therefore m = \pm 1$.

$$C_n = \frac{r+2sm+tm^2}{1+m^2} = \frac{-4m}{1+m^2}. \quad C_1=-2, \quad C_2=2.$$

1072 — Determinar a equação cartesiana da linha (L) tal que a distância de M ao centro da curvatura C_1 da evoluta seja igual ao quadrado do raio da curvatura de (L) em M.

As constantes de integração devem considerar-se nulas. R: *Equação de condição:* $\overline{C_1M} = R^2$. *Sendo* C *o centro de curvatura em* M, *tem-se:* $\overline{C_1M}^2 = \overline{C_1C}^2 + \overline{CM}^2$ *ou* $R^4 = \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 + R^2$. *Integrado vem:* $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{R} = \alpha - \theta$, *donde* $R = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}$.

Para $\alpha=0$ *vem:* $R = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$. *Mas* $R = \frac{ds}{d\theta}$.

$$\begin{cases} dx = \cos\theta\, ds = R\cos\theta\, d\theta \\ dy = \operatorname{sen}\theta\, ds = R\operatorname{sen}\theta\, d\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta \\ dy = -d\theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\log\operatorname{sen}\theta \\ y = -\theta. \end{cases}$$

Logo $x = -\log\operatorname{sen}(-y)$ *ou* $\operatorname{sen}(-y) = e^{-x}$ *ou* $\operatorname{sen} y + e^{-x} = 0$.

Soluções dos números 1066 a 1072 de Jaime Rios de Sousa.

Contêm pontos de exames finais de *Cálculo Infinitesimal* e de *Análise Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 4, 7, 8 e 9.

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. L. — MECÂNICA — **2.º exame de freqüência, 1-II-1941**

1073 — Um ponto material, de massa unidade, está submetido à acção da fôrça: $\mathbf{F} = x(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Determinar o seu movimento nas seguintes condições iniciais: $P_0(0,0)$ $\mathbf{v}_0 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. Determinar o trabalho efectuado pelo campo, quando o ponto se desloca desde $P_0(0,0)$ a $P_1(3,3)$ no seu movimento. R:

1) $\quad x'' = x, \quad y'' = x.$

É então: $y'' = x''$; *logo:*

2) $\quad y = x + C_1 t + C_2.$

Da 1.ª equação 1) *vem:*

3) $\quad x'' - x = 0$

equação diferencial linear de coeficientes constantes, cujo integral geral é $x = C_3 e^t + C_4 e^{-t}$ *e atendendo a* 2) $y = C_3 e^t + C_4 e^{-t} + C_1 t + C_2$. *Temos então:*

4) $$\begin{cases} x = C_3 e^t + C_4 e^{-t} \\ y = C_3 e^t + C_4 e^{-t} + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

e derivando

5) $$\begin{cases} x' = C_3 e^t - C_4 e^{-t} \\ y' = C_3 e^t - C_4 e^{-t} + C_1. \end{cases}$$

Como — condições iniciais — para $t=0$, *é:* $x=0$ $y=0$ $x'=2$ $y'=2$ *vem, introduzindo estes valores em* 4) *e* 5): $0 = C_3 + C_4$, $0 = C_3 + C_4 + C_2$, $2 = C_3 - C_4$, $2 = C_3 - C_4 + C_1$, *ou seja:* $C_3 = 1$, $C_4 = -1$, $C_1 = 0$ *e* $C_2 = 0$. *O movimento do ponto, nas condições iniciais dadas, é* $x = e^t - e^{-t}$ $y = e^t - e^{-t}$ *e efectua-se ao longo da recta* $y = x$, *afastando-se o ponto indefinidamente para o lado direito desta.*

O campo de fôrças dado não deriva dum potencial, visto que: $\frac{\partial X}{\partial y} \neq \frac{\partial Y}{\partial x}$. *Para calcular o trabalho pedido temos então que integrar* $\mathbf{F}$. $dP = X\,dx + Y\,dy$ *ao longo da trajectória do ponto. Teremos*

$$\tau = \int_{\widehat{P_0P_1}} x\,dx + y\,dy$$ *e como* $y = x$ *ao longo dessa trajectória, tem-se:* $$\tau = \int_0^3 2x\,dx = 9.$$

1074 — Uma área plana e homogênea, é constituída por um quadrado de lado $2a$, encimado por uma semi-elipse de semi-eixos a e b. Determinar b de modo que o centro de gravidade da área considerada esteja sôbre o lado do quadrado que é eixo da semi-elipse. R: *O centro de gravidade do quadrado encontra-se no centro dêste. Calculemos a posição do centro de gravidade da semi-elipse. Para referir esta posição, tomemos um sistema de 2 eixos ortogonais com origem no centro da elipse, e dirigidos segundo os eixos desta. As coordenadas do centro de gravidade da semi-elipse, serão* $\xi = 0$ $\eta = \frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}$ *onde*

$\iint dx\,dy =$ área da semi-elipse $= \pi ab/2$. *Tem-se*

$$\iint y\,dx\,dy = \int_{-a}^{+a} dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\,dx = \frac{2ab^2}{3}$$ *e, portanto,* $$\eta = \frac{2ab^2/3}{\pi ab/2} = \frac{4}{3}\frac{b}{\pi}.$$

Tomemos agora um sistema de eixos paralelos aos anteriores, mas cuja origem se encontre no centro do quadrado, e chamemos : F à figura dada, F_1 ao quadrado *e* F_2 à semi-elipse.

Designemos ainda por A_k *a área de* F_k *e por* ξ_k *e* η_k, *respectivamente, a abcissa e ordenada — relativas aos novos eixos — de* F_k. *Temos :* $A_1=4a^2$ $A_2=\pi ab/2$ $A=A_1+A_2=a(4a+\pi b/2)$ $\xi_1=0$ $\eta_1=0$ $\xi_2=0$ $y_2=\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}+a$. *De* $\xi_1=0$ $\xi_2=0$ *conclue-se que* η *virá dado por :* $A\eta=A_1\eta_1+A_2\eta_2$, *ou seja :* $\eta a\left(4a+\frac{\pi}{2}b\right)=\frac{\pi}{2}ab\left(\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}+a\right)$. *Como deve ser* $\eta=a$, *tem-se :*

$$4a^3+\frac{\pi}{2}a^2b=\frac{2}{3}ab^2+\frac{\pi}{2}a^2b \quad \textit{ou} \quad b=a\sqrt{6}\,.$$

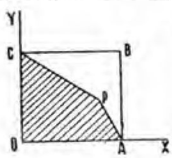
Soluções dos exercicios 1073 e 1074 de F. V. A. de Veiga de Oliveira.

Contêm pontos de segundos exames de freqüência de *Mecânica Racional* e *Física Matemática* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*» : 2, 6 e 10.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. P. — Exame final, 14-10-1941

1075 — Um ponto P é lançado ao acaso no quadrado $OABC$ (10 cm de lado). Seja $P(x,y)$ a posição obtida, e σ a área do quadrilátero tracejado, obtido unindo P com A e C. σ pode exprimir-se em função de x e y.



a) Indicar o domínio certo N_σ. R : *a) Manifestamente é o intervalo* $(0, 100)$.

b) Calcular a probabilidade de ser $\sigma<20\text{ cm}^2$. R : *b) De* $\sigma=5(x+y)<20$ *resulta* $x+y<4$. *P terá caído no triângulo limitado pelos eixos e pela recta* $x+y=4$, *de área* $1/2 . 4 . 4=8\text{cm}^2$ *e a probabilidade será* $p=0{,}08$.

c) O valor médio $M(\sigma)$. R : *c)* $M(\sigma)=5\,M(x)+5\,M(y)=10\,M(x)=50$, *pois* $M(x)=M(y)=5$ $(T_x=T_y=1/10)$.

d) A taxa T_σ. R : *d) Poderá calcular-se efectuando a mudança de variáveis definida pelas relações* $\begin{cases} x=x \\ \sigma=5(x+y)\end{cases}$. *Obtemos* $T_{x\sigma}=\frac{1}{500}$ *donde* $T_\sigma=\frac{Nx:\sigma}{500}$. *A taxa terá duas expressões analiticas:*

$$T_\sigma=\frac{\sigma}{2500} \;\textit{ se }\; 0\leqq\sigma\leq 50\,;\quad T_\sigma=\frac{100-\sigma}{2500} \;\textit{ se }\; 50\leqq\sigma\leq 100.$$

e) Verificar. R : *e) Por exemplo: utilizando* T_σ *efectuar os cálculos das alineas b) e c).*

Observ. — A notação é a de Van Deuren.

Solução do n.º 1075 de M. Gonçalves Miranda.

PROBLEMAS PROPOSTOS

A secção de problemas da «Gazeta de Matemática» só pode ser uma secção realmente viva na medida em que fôr feita pelos leitores. Por isso se pede a todos os leitores que proponham problemas, (acompanhados ou não de solução), que enviem soluções dos problemas propostos, e sobretudo que digam com tôda a franqueza aquilo que lhes agrada e aquilo que lhes não agrada.

A redacção receberá com tôda a atenção as sugestões que lhe forem feitas de alterações ou ampliações.

Temos a certeza de que muito há a esperar da boa vontade dos leitores, mas o certo é que até hoje, tendo a «Gazeta» centenas de leitores, apenas meia dúzia tem enviado problemas ou soluções. Na esperança de que o seu exemplo seja largamente seguido, publicamos aqui os seus nomes (pedindo desculpa de qualquer involuntária omissão):

Problemas — Um estudante de matemáticas (Pôrto); T. Ferreira Rato (Cabo Verde).

Soluções — José Arandes ; Emídio de Oliveira ; J. S. Faria de Abreu.

M. Alenquer

1076 — Num rectângulo $OAMB$ é $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$. Por M faz-se passar uma recta que corta os prolongamentos de OA e OB, respectivamente, em P e Q. Sendo α o ângulo $O\widehat{P}Q$, mostrar que é:

$$\overline{PQ}=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2} \quad \text{quando fôr:} \quad \operatorname{tg}^3\alpha=b/a\,.$$

1077 — Eliminar φ entre as equações

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi+\cos 3\varphi \\ y=3\,\text{sen}\,\varphi-\text{sen}\,3\varphi\,. \end{cases}$$

1078 — Eliminar x entre as equações

$$\begin{cases} \text{sen}\,x+\operatorname{tg}x=a \\ \text{sen}\,x\,.\operatorname{tg}x=b\,. \end{cases}$$