Tomemos agora um sistema de eixos paralelos aos anteriores, mas cuja origem se encontre no centro do quadrado, e chamemos: F à figura dada, F_1 ao quadrado *e* F_2 à semi-elipse.

Designemos ainda por A_k *a área de* F_k *e por* ξ_k *e* η_k, *respectivamente, a abcissa e ordenada — relativas aos novos eixos — de* F_k. *Temos:* $A_1=4a^2$ $A_2=\pi ab/2$ $A=A_1+A_2=a(4a+\pi b/2)$ $\xi_1=0$ $\eta_1=0$ $\xi_2=0$ $y_2=\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}+a$. *De* $\xi_1=0$ $\xi_2=0$ *conclue-se que* η *virá dado por:* $A\eta=A_1\eta_1+A_2\eta_2$, *ou seja:* $\eta a\left(4a+\frac{\pi}{2}b\right)=\frac{\pi}{2}ab\left(\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}+a\right)$. *Como deve ser* $\eta=a$, *tem-se:*

$$4a^3+\frac{\pi}{2}a^2b=\frac{2}{3}ab^2+\frac{\pi}{2}a^2b \quad ou \quad b=a\sqrt{6}\,.$$

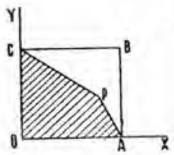
Soluções dos exercícios 1073 e 1074 de F. V. A. de Veiga de Oliveira.

Contêm pontos de segundos exames de freqüência de *Mecânica Racional* e *Física Matemática* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 2, 6 e 10.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. P. — Exame final, 14-10-1941

1075 — Um ponto P é lançado ao acaso no quadrado $OABC$ (10 cm de lado). Seja $P(x,y)$ a posição obtida, e σ a área do quadrilátero tracejado, obtido unindo P com A e C. σ pode exprimir-se em função de x e y.



a) Indicar o domínio certo N_σ. R: *a) Manifestamente é o intervalo* $(0, 100)$.

b) Calcular a probabilidade de ser $\sigma<20\ cm^2$. R: *b) De* $\sigma=5(x+y)<20$ *resulta* $x+y<4$. *P terá caído no triângulo limitado pelos eixos e pela recta* $x+y=4$, *de área* $1/2.4.4=8\,cm^2$ *e a probabilidade será* $p=0{,}08$.

c) O valor médio $M(\sigma)$. R: *c)* $M(\sigma)=5M(x)+5M(y)=10M(x)=50$, *pois* $M(x)=M(y)=5$ $(T_x=T_y=1/10)$.

d) A taxa T_σ. R: *d) Poderá calcular-se efectuando a mudança de variáveis definida pelas relações* $\begin{cases} x=x \\ \sigma=5(x+y) \end{cases}$. *Obtemos* $T_{x\sigma}=\frac{1}{500}$ *donde* $T_\sigma=\frac{Nx:\sigma}{500}$. *A taxa terá duas expressões analiticas:*

$$T_\sigma=\frac{\sigma}{2500} \text{ se } 0\leq\sigma\leq 50;\quad T_\sigma=\frac{100-\sigma}{2500} \text{ se } 50\leq\sigma\leq 100.$$

e) Verificar. R: *e) Por exemplo: utilizando* T_σ *efectuar os cálculos das alineas b) e c).*

Observ. — A notação é a de Van Deuren.

Solução do n.º 1075 de M. Gonçalves Miranda.

PROBLEMAS PROPOSTOS

A secção de problemas da «Gazeta de Matemática» só pode ser uma secção realmente viva na medida em que fôr feita pelos leitores. Por isso se pede a todos os leitores que proponham problemas, (acompanhados ou não de solução), que enviem soluções dos problemas propostos, e sobretudo que digam com tôda a franqueza aquilo que lhes agrada e aquilo que lhes não agrada.

A redacção receberá com tôda a atenção as sugestões que lhe forem feitas de alterações ou ampliações.

Temos a certeza de que muito há a esperar da boa vontade dos leitores, mas o certo é que até hoje, tendo a «Gazeta» centenas de leitores, apenas meia dúzia tem enviado problemas ou soluções. Na esperança de que o seu exemplo seja largamente seguido, publicamos aqui os seus nomes (pedindo desculpa de qualquer involuntária omissão):

Problemas — Um estudante de matemáticas (Pôrto); T. Ferreira Rato (Cabo Verde).

Soluções — José Arandes; Emídio de Oliveira; J. S. Faria de Abreu.

M. Alenquer

1076 — Num rectângulo $OAMB$ é $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$. Por M faz-se passar uma recta que corta os prolongamentos de OA e OB, respectivamente, em P e Q. Sendo α o ângulo $O\widehat{P}Q$, mostrar que é:

$$\overline{PQ}=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2} \text{ quando fôr: } tg^3\alpha=b/a\,.$$

1077 — Eliminar φ entre as equações

$$\begin{cases} x=3\cos\varphi+\cos 3\varphi \\ y=3\,\text{sen}\,\varphi-\text{sen}\,3\varphi\,. \end{cases}$$

1078 — Eliminar x entre as equações

$$\begin{cases} \text{sen}\,x+\text{tg}\,x=a \\ \text{sen}\,x\,.\,\text{tg}\,x=b\,. \end{cases}$$

1079 — Dados quatro pontos A, B, C, D de um plano, tais que o quadrilátero que os tem por vértices não seja inscritível (numa circunferência), traçar uma circunferência equidistante dêsses quatro pontos.

1080 — Determinar a hipotenusa de um triângulo rectângulo, conhecida a soma dos catectos e o comprimento da bissectriz do ângulo recto.

1081 — Mostrar que 2^{1000}, escrito no sistema decimal, termina em 76.

1082 — Mostrar que $1000!$, escrito no sistema decimal, termina em 249 zeros.

1083 — Mostrar que $1000!$ contém 1943 vezes o factor 2.

Problemas n.º 1076 a 1083 propostos por A. A. Ferreira de Macedo.

1084 — Um triângulo rectângulo tem lados cujas medidas são inteiros sem factor comum. Substituindo cada algarismo por uma letra, essas medidas são $SSWTVU$, $PTWTS$, $RRWWQ$. Calcule os lados e mostre que a solução é única.

(W. F. Cheney, *American Mathematical Monthly*, Nov. 1937)

1085 — Mostre que a soma dos quadrados das arestas dum tetraedro isósceles é igual a 4 vezes o quadrado do diâmetro da esfera circunscrita (um tetraedro é isósceles se as faces são congruentes).

J. Rosenbaum, *Am. Math. Monthly*, June-July 1937

1086 — Resolva a equação $x^7+7px^5+14p^2x^3+7p^3x+q=0$.

Vergil Claudian, *Am. Math. Monthly*, Mar. 1937

1087 — Demonstrar que o plano $x+y+z=0$ corta o cone $\frac{yz}{b-c}+\frac{zx}{c-a}+\frac{xy}{a-b}=0$ segundo 2 geratrizes que fazem o ângulo $\frac{\pi}{3}$. Mostrar que os parâmetros directores dessas geratrizes são $a-b$, $b-c$, $c-a$ e $c-a$, $a-b$, $b-c$.

Aubert et Papelier, *Ex. de Géom. Analytique*, III, p. 109

1088 — São dadas 2 circunferências C e C'. Uma tangente variável a C encontra C' em dois pontos M e N. Lugar do centro da circunferência passando por M, N e pelo centro do círculo C.

Comberousse, I, 105

1089 — O ortocentro dum triângulo circunscrito a uma parábola está sôbre a directriz.

Idem, I, 501

1090 — Achar os máximos e mínimos de $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Idem, 751

Problemas n.º 1084 a 1090 propostos por M. Alenquer.

Soluções recebidas

883 — *Seja* P *o perímetro constante dado; fazendo* r *o raio e* a *o comprimento do arco do sector, a área* S *é dada por* $S=\frac{ra}{2}$; *como* $P=2r+a$, $a=P-2r$, *substituindo em* S *vem* $S=\frac{r(P-2r)}{2}=\frac{Pr}{2}-r^2$ *donde* $\frac{dS}{dr}=\frac{P}{2}-2r$ *e* $\frac{d^2S}{dr^2}=-2$; *a condição* $\frac{dS}{dr}=0$ *conduz a* $r=\frac{P}{4}$ *que corresponde a um máximo, por ser* $\frac{d^2S}{dr^2}<0$.

Vê-se imediatamente da solução, que satisfaz ao problema o sector de abertura igual a 2 *radianos.*

887 — *Sejam* α^r, β^r, γ^r *os vectores unitários de* OA, OB, OC. *Tomemos um sistema cartesiano ortogonal* $Ox^1x^2x^3$ *em que* Ox^1x^2 *é o plano* OAB Ox^1 *coïncide com* OA *nesse sistema* g (*discriminante de forma métrica fundamental* ds^2) *é igual a* 1. *Seja agora um sistema* $O\mathbf{x}^1\mathbf{x}^2\mathbf{x}^3$ *em que* α^r, β^r, γ^r *são os vectores unitários fundamentais*

$$\begin{cases} \mathbf{x}^1=x^1 \\ \mathbf{x}^2=x^1\cos\gamma+x^2\,\mathrm{sen}\,\gamma \\ \mathbf{x}^3=x^1\cos\beta+x^2\cos\alpha\,.\,\mathrm{sen}\,\gamma+x^3\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases} \qquad \textit{donde}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\mathbf{x}^3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\gamma & \mathrm{sen}\,\gamma & 0 \\ \cos\beta & \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma & \mathrm{sen}\,\varphi \end{vmatrix}=\mathrm{sen}\,\gamma\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

ou $$\mathbf{g}=g\left[\frac{\partial(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\mathbf{x}^3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}\right]^2=\mathrm{sen}^2\gamma\,.\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

por outro lado vê-se que os $\mathbf{g}_{ik}$ *são*

$$\mathbf{g}_{ik}=\begin{Bmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos a & 1 \end{Bmatrix} \qquad \textit{donde}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}=\mathbf{g}=\mathrm{sen}^2\gamma\,.\,\mathrm{sen}^2\varphi.$$

Soluções dos n.ºs 883 e 887 de M. Alenquer.

1012 — *Sabemos que*
$D(a_1a_2\cdots a_n)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\cdots\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$; *no nosso caso é* $a_n-a_1=(n-1)r$, *logo* $D=r.2r\cdots(n-1)r\cdots r\cdots(n-2)r\cdots\cdots r=(n-1)!\,r^{n-1}.(n-2)!\,r^{n-2}\cdots 3!\,r^3.2!\,r^2\,1!\,r=(n-1)!\,(n-2)!\cdots 3!\,2!\,1!\,r^{1+2+3+\cdots(n-1)}=$

$$=(n-1)!\,(n-2)!\cdots 3!\,2!\,1!\,r^{\frac{(n-1)n}{2}}, \qquad c.\ q.\ p.$$

Solução do n.º 1012 de Manuel C. Guerra dos Santos.