Tomemos agora um sistema de eixos paralelos aos anteriores, mas cuja origem se encontre no centro do quadrado, e chamemos : F à figura dada, F_1 ao quadrado *e* F_2 à semi-elipse.

Designemos ainda por A_k *a área de* F_k *e por* ξ_k *e* η_k, *respectivamente, a abcissa e ordenada — relativas aos novos eixos — de* F_k. *Temos :* $A_1=4a^2$ $A_2=\pi ab/2$ $A=A_1+A_2=a(4a+\pi b/2)$ $\xi_1=0$ $\eta_1=0$ $\xi_2=0$ $y_2=\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}+a$. *De* $\xi_1=0$ $\xi_2=0$ *conclue-se que* η *virá dado por :* $A\eta=A_1\eta_1+A_2\eta_2$, *ou seja :* $\eta a\left(4a+\frac{\pi}{2}b\right)=\frac{\pi}{2}ab\left(\frac{4}{3}\frac{b}{\pi}+a\right)$. *Como deve ser* $\eta=a$, *tem-se :*

$$4a^3+\frac{\pi}{2}a^2b=\frac{2}{3}ab^2+\frac{\pi}{2}a^2b \quad ou \quad b=a\sqrt{6}\,.$$

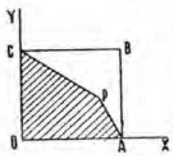
Soluções dos exercicios 1073 e 1074 de F. V. A. de Veiga de Oliveira.

Contêm pontos de segundos exames de freqüência de *Mecânica Racional* e *Física Matemática* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*» : 2, 6 e 10.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C. P. — Exame final, 14-10-1941

1075 — Um ponto P é lançado ao acaso no quadrado $OABC$ (10 cm de lado). Seja $P(x,y)$ a posição obtida, e σ a área do quadrilátero tracejado, obtido unindo P com A e C. σ pode exprimir-se em função de x e y.



a) Indicar o domínio certo N_σ. R: *a) Manifestamente é o intervalo* (0, 100).

b) Calcular a probabilidade de ser $\sigma<20\ cm^2$. R: *b) De* $\sigma=5(x+y)<20$ *resulta* $x+y<4$. *P terá caido no triângulo limitado pelos eixos e pela recta* $x+y=4$, *de área* $1/2.4.4=8cm^2$ *e a probabilidade será* $p=0{,}08$.

c) O valor médio $M(\sigma)$. R: *c)* $M(\sigma)=5M(x)+5M(y)=10M(x)=50$, *pois* $M(x)=M(y)=5$ $(T_x=T_y=1/10)$.

d) A taxa T_σ. R: *d) Poderá calcular-se efectuando a mudança de variáveis definida pelas relações* $\begin{cases}x=x\\ \sigma=5(x+y)\end{cases}$. *Obtemos* $T_{x\sigma}=\frac{1}{500}$ *donde* $T_\sigma=\frac{Nx:\sigma}{500}$. *A taxa terá duas expressões analiticas:*

$$T_\sigma=\frac{\sigma}{2500}\ se\ 0\leqq\sigma\leq 50\,;\ T_\sigma=\frac{100-\sigma}{2500}\ se\ 50\leqq\sigma\leq 100.$$

e) Verificar. R: *e) Por exemplo: utilizando* T_σ *efectuar os cálculos das alineas b) e c).*

Observ. — A notação é a de Van Deuren.

Solução do n.º 1075 de M. Gonçalves Miranda.

PROBLEMAS PROPOSTOS

A secção de problemas da «Gazeta de Matemática» só pode ser uma secção realmente viva na medida em que fôr feita pelos leitores. Por isso se pede a todos os leitores que proponham problemas, (acompanhados ou não de solução), que enviem soluções dos problemas propostos, e sobretudo que digam com tôda a franqueza aquilo que lhes agrada e aquilo que lhes não agrada.

A redacção receberá com tôda a atenção as sugestões que lhe forem feitas de alterações ou ampliações.

Temos a certeza de que muito há a esperar da boa vontade dos leitores, mas o certo é que até hoje, tendo a «Gazeta» centenas de leitores, apenas meia dúzia tem enviado problemas ou soluções. Na esperança de que o seu exemplo seja largamente seguido, publicamos aqui os seus nomes (pedindo desculpa de qualquer involuntária omissão):

Problemas — Um estudante de matemáticas (Pôrto); T. Ferreira Rato (Cabo Verde).

Soluções — José Arandes ; Emídio de Oliveira ; J. S. Faria de Abreu.

M. Alenquer

1076 — Num rectângulo $OAMB$ é $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$. Por M faz-se passar uma recta que corta os prolongamentos de OA e OB, respectivamente, em P e Q. Sendo α o ângulo $O\widehat{P}Q$, mostrar que é:

$$\overline{PQ}=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2} \text{ quando fôr: } tg^3\,\alpha=b/a\,.$$

1077 — Eliminar φ entre as equações

$$\begin{cases}x=3\cos\varphi+\cos 3\varphi\\ y=3\,\mathrm{sen}\,\varphi-\mathrm{sen}\,3\varphi\,.\end{cases}$$

1078 — Eliminar x entre as equações

$$\begin{cases}\mathrm{sen}\,x+\mathrm{tg}\,x=a\\ \mathrm{sen}\,x\,.\,\mathrm{tg}\,x=b\,.\end{cases}$$