

Sujets futurs et nouvelles méthodes de l'enseignement mathématique

W. Servais
Bruxelles

I. Situation de l'enseignement traditionnel.

La mathématique contemporaine, on le sait, a pris un essor sans pareil dans trois domaines connexes et distincts : le développement théorique, l'utilisation des machines calculatrices et le champs des applications.

L'enseignement est toujours en retard de phase sur la science. En mathématique, au niveau secondaire, ce déphasage avait pris une ampleur telle qu'on pouvait parler, il y a une douzaine d'années, d'un fossé entre l'enseignement mathématique des écoles et la mathématique elle-même.

Ainsi, aux multiples reproches adressés à l'enseignement mathématique, le plus critiqué de tous les enseignements, s'ajoutait, à juste titre, l'accusation d'être, en maints endroits, anachronique.

Les mathématiciens soulignaient la pauvreté de certaines matières figurant aux programmes par pure routine scolaire, l'absence de notions fondamentales, le manque de structure de l'édifice présenté aux élèves et le caractère douteux de la pseudo-rigueur dont s'accommodaient maintes démonstrations. Les utilisateurs, tout en déplorant le manque de vigueur de la formation mathématique générale, regrettaient en outre les lacunes en techniques essentielles.

II. Efforts de renouveau d'aujourd'hui et de demain.

Pour sauver la situation, des groupes de travail se mirent à l'oeuvre en Europe, aux États-Unis et au Japon et élaborèrent des programmes modernes de mathématique.

a. *Les ensembles et les relations :*

Le fondement de ces programmes est partout le même. Les notions sur les ensembles, les relations (en particulier équivalence et ordre) et les fonctions présentées de façon naïve mais correcte, en constituent l'essentiel.

Expérimentées d'abord dans quelques classes, ces matières prennent droit de cité dans des programmes adoptés de façon de plus en plus large. Sans aucun doute, cette place sera faite à l'avenir dans tout enseignement secondaire ; des essais satisfaisants portent à croire que, avec une didactique convenable, une première initiation à ces idées pourra être entreprise dans les classes primaires.

b. *Structures algébriques :*

Les structures les plus importantes de l'algèbre, telles que les groupes, les

anneaux, les corps, sont introduites et, dans les programmes bien organisés, elles servent à la construction de la matière enseignée.

En particulier, le corps des réels présentés à l'aide des développement binaires ou décimaux est, pour la première fois, mis vraiment à la portée des élèves. Ainsi, à l'avenir, contrairement à ce qui a été fait longtemps, on pourra se servir des réels en sachant ce qu'il sont. Un des objectifs principaux de l'enseignement élémentaire est l'algèbre linéaire. L'expérience montre qu'il est actuellement possible de faire comprendre la notion d'espace vectoriel, présentée à partir de la géométrie, et de l'utiliser dans l'étude des équations linéaires et des matrices.

c. *La géométrie :*

En géométrie, le plan et l'espace apparaissent comme des vectoriels à deux et à trois dimensions munis d'un produit scalaire.

La distinction entre les propriétés affines et les propriétés métriques de l'espace est alors aisée et ne peut manquer d'être profitable comme le prouve l'expérience pédagogique.

Enfin, la géométrie analytique a une base plus nette et est vraiment intégrée à la totalité de la géométrie. Cette dernière apparaît bien mieux qu'auparavant comme une forme abstraite susceptible de servir de modèle à des questions concrètes autres que la physique des solides ou des rayons lumineux. D'autre part, la capacité de penser géométriquement se développe et étend le pouvoir de représentation intuitive.

Cette conception, qui met au jour la structure algébrique du plan et de l'es-

pace, aura l'assentiment de nombre de mathématiciens et sera bien accueillie non seulement par les physiciens mais aussi par les utilisateurs de la mathématique dans les sciences humaines.

d. *Analyse et topologie :*

Les programmes traditionnels de beaucoup de pays comprennent, au moins dans les cours secondaires pour scientifiques, des éléments d'analyse réduits aux notions sur les limites et les fonctions continues, les dérivées et les intégrales les plus simples.

Aujourd'hui, deux tendances se marquent dans la ligne d'évolution future de l'enseignement de l'analyse élémentaire.

D'une part, est proposée une amplification de la matière enseignée allant, dans certaines vues extrêmes (1), jusqu'au calcul différentiel et intégral à plusieurs variables, aux séries de FOURIER, aux équations intégrales, aux fonctions de GREEN, etc. . . .

D'autre côté, s'affirme un souci d'introduire dans les classes supérieures les notions essentielles de la topologie (ouverts, fermés, adhérence, continuité) tout au moins en ce qui concerne les espaces métriques et, spécialement, le plan et l'espace euclidiens. Peut-être serait-il possible de donner une idée des espaces topologiques non métriques.

En général se manifeste la volonté de faire descendre dans l'enseignement secondaire des matières et des idées considérés jusqu'ici comme appartenant aux mathématiques dites supérieures. Compte tenu du temps qui sera consacré aux études mathématiques l'expérience seule permettra de déterminer le niveau susceptible d'être atteint.

e. *Logique :*

L'accent mis sur une meilleure présentation mathématique conduit à des exigences logiques qui étaient souvent ignorées jusqu'ici dans l'enseignement.

La familiarité avec les notions d'implication, d'équivalence logique et des conjonctions «et» et «ou», l'usage des quantificateurs, en langage véhiculaire ou en notations symboliques, des éclaircissements sur la négation d'une proposition complexe, sur les contrapositions d'une implication, etc., se montrent très utiles pour faire comprendre le contenu des énoncés et les méthodes de démonstrations.

Au niveau plus élémentaire, les diagrammes de VENN relatifs aux ensembles donnent déjà une figuration très efficace de la logique en extension. A part quelques timides essais d'enseignement de la logique des propositions, il n'y a guère eu jusqu'ici de traitement autonome de la logique formelle dans les écoles secondaires. D'ailleurs, ce qui est tout d'abord nécessaire est une logique en action assez consciente de ses démarches et pouvant être notée avec un symbolisme réduit.

Il est souhaitable que, dans les prochaines années, nous mettions au point une utilisation plus nette et plus explicite de la logique mathématique. Dans la mesure où cette pratique deviendra plus commune, l'enseignement secondaire de la mathématique réalisera mieux un objectif souvent annoncé mais plus rarement atteint dans le passé : la formation logique de l'esprit.

f. *Probabilité et statistique :*

Les probabilités et la statistique apparaissent de plus en plus comme la partie de

la mathématique qui est la plus largement utile dans les sciences biologiques et humaines. Elles sont aussi, faut-il le dire, d'une importance capitale pour le physicien et l'ingénieur, lesquels, s'ils ne sont plus les seuls utilisateurs de la mathématique, en restent les plus grands consommateurs.

En dehors de leurs emplois techniques, les probabilités et la statistique ont une grande valeur culturelle : elles introduisent et exercent un mode de pensée inconnu de la mathématique classique traditionnelle : le jugement et l'inférence aléatoires.

Plus que les autres innovations en matière d'enseignement, les probabilités et la statistique prendront à l'avenir une place primordiale. Leur étude requerra un soin pédagogique particulier car il faudra, par des expériences concrètes, faire reconnaître la permanence statistique de certain caractère et, du point de vue abstrait, présenter une mise en forme mathématique des probabilités. Heureusement les notions sur les ensembles permettent un abord clair des probabilités définies à partir de la mesure des événements dans l'espace des épreuves (Sample space).

Quelques essais ont été faits entre autres aux Pays-Bas (2) et aux États-Unis (3) mais ce sont sans doute les Pays scandinaves qui ont accompli l'effort le plus décisif en introduisant ces matières dans leurs programmes secondaires (4). Ils envisagent d'ailleurs de conduire une initiation concrète aux faits statistiques dès l'école primaire.

En fait, ceux qui enseignent les éléments de probabilités dans les études supérieures savent combien est longue et malaisée l'acquisition de la tournure d'esprit stochastique. Faut-il y voir une réelle difficulté intrinsèque des modes

de la pensée aléatoire ou plutôt, tout au moins en partie, comme nous le croyons, l'effet du conditionnement prolongé à la logique à deux valeurs de l'enseignement traditionnel ?

De toute façon, il faudra dans les prochaines années aménager une initiation aux probabilités et à la statistique dans les écoles secondaires afin de fournir un instrument conceptuel indispensable à la compréhension du monde d'aujourd'hui.

g. *Le calcul et les machines :*

Le calcul avec les machines mérite aussi une attention particulière. Jusqu'ici, malgré les demandes pressantes des utilisateurs, le calcul organisé n'a pas trouvé la place qui lui revient dans les programmes.

Des éléments sont cependant étudiés qui pourront contribuer à la mise au point de cette question. Tout d'abord, le calcul binaire joue un rôle important dans la représentation des nombres réels par des développements binaires illimités. L'application des réels à la mesure des grandeurs est ainsi facilitée puisqu'il suffit d'admettre que l'on puisse opérer indéfiniment le partage de la grandeur en deux parties équivalentes.

L'amélioration de l'aspect logique des opérations est aussi favorable. Dans les Pays anglo-saxons, les élèves commencent à être initiés à la codification de la séries d'opérations d'un programme à l'aide de «flow charts». Celles-ci permettront en outre de rendre explicite la structure de maints algorithmes classiques (5).

En ce qui concerne le calcul aux machines proprement dit, dans certaines classes élémentaires anglaises, les élèves sont entraînés à l'usage de machines de

bureaux (5); en Suisse, les élèves du cycle supérieur de certaines écoles (6) sont dotés de petites machines cylindriques. Par ailleurs des textes élémentaires sont écrits sur les calculatrices pour des élèves de 12 à 13 ans (7). C'est en Russie, semble-t-il, que l'éducation au calcul mécanique a été poussée de façon la plus systématique puisque récemment ont été créées, dans l'enseignement secondaire, des sections spéciales pour former des calculateurs. Cette veine sera sans doute développée à l'avenir.

h. *La mathématique appliquée :*

Nous ne voudrions pas clore ces indications sur les futurs sujets pour l'enseignement mathématique sans insister avec force sur la nécessité de compléter les cours théoriques d'un assortiment d'applications significatives.

Dans l'enseignement classique, lorsque le professeur, pour répondre à la question tant de fois posée par les élèves: «A quoi cela sert-il en pratique?», donnait des applications des théories étudiées, il s'agissait de quelques problèmes souvent stéréotypes et livresques, empruntés à la vie courante ou à la physique élémentaire. Ce serait donner une image tronquée de la mathématique que de ne pas en montrer, de façon tangible, le large champ d'applications actuelles. Quelques ouvrages récents (8) fournissent des matériaux utilisables à cet effet. Un cours élémentaire de probabilités et de statistique permettra de présenter tout un échantillonnage d'exemples très variés.

Cependant, tout développement de mathématique appliquée demandera une collaboration active entre les professeurs

de divers branches scientifiques : mathématique, physique, chimie, biologie, géographie, sociologie.

Une coordination intéressante ne pourra être mise en oeuvre que si l'enseignement des sciences a atteint un niveau suffisant et si les responsables des diverses disciplines sont décidés à tirer parti des ressources des instruments que leur offre la mathématique.

III. Méthodes nouvelles d'éducatons mathématique.

Jusqu'ici nous avons parlé de l'évolution à venir de l'enseignement en termes de matières et de programmes. Cette manière d'envisager la modernisation est insuffisante si l'on veut améliorer le rendement de l'étude de la mathématique.

On pourrait affirmer sans paradoxe qu'un enseignement des notions modernes basé sur une didactique ancienne risquerait d'être plus traumatisant et moins efficace que sur l'enseignement traditionnel.

Il ne peut y avoir de véritable renouveau de l'éducation mathématique sans une pédagogie aussi moderne que la mathématique elle-même.

Sans doute est-il plus expéditif d'enseigner souvent ex-cathedra les sujets modernes que de mettre au point une méthodologie qui permette une assimilation réelle des notions proposées. C'est pourquoi certaine modernisation s'est effectuée dans le second cycle de l'enseignement secondaire, en descendant, de manière à faire usage, dans toute la mesure du possible, des méthodes expositives traditionnellement de mise dans l'enseignement supérieur.

Certes, la meilleure qualité mathématique des exposés peut avoir d'heureux effets. Mais les élèves ainsi conditionnés sont-il à

même de comprendre et de maîtriser les notions nouvelles ? La puissance, la rigueur et netteté de celles-ci, présentées sans initiation adéquate, peuvent-elles avoir toutes les vertus que leur reconnaissent les novateurs impatientes ?

Nous pensons que les idées nouvelles doivent être introduites, de façon adéquate, dès que l'enfant y est accessible.

Pour trouver une pédagogie capable d'apprendre la mathématique, il importe de prendre conscience de la nature de celle-ci.

Tous ceux qui créent ou utilisent la mathématique savent qu'elle est une activité spécifique s'exerçant dès qu'une situation provoque la mise en oeuvre de ses moyens de schématisation, de structuration, de déduction et de contrôle.

L'enseignement doit proposer des situations susceptibles d'engager et de développer l'apprentissage de l'activité mathématique. Il ne s'agit pas, comme on l'a cru trop longtemps, de transmettre sans plus des concepts et des résultats acquis. On le sait, ainsi que l'a explicité P. M. VAM HIELLE (9), dans son élaboration, la pensée mathématique passe par des niveaux successifs qui vont de la perception à l'organisation logique consciente. Celui qui enseigne doit connaître ces niveaux et savoir auquel n'entre eux se situe un élève. L'apprentissage aura pour objet d'asseoir assez chaque niveau pour permettre de passer sans encombre d'un stade au suivant. L'une des tâches de la didactique est de rendre cette transition plus aisée et plus rapide tout en respectant l'échelle des niveaux.

A chaque niveau, ce qui importe, c'est de motiver une activité personnelle de l'élève qui soit significative à ce niveaux. Il en sera ainsi lorsque l'enseignant pourra offrir une situation assez riche abordable de plain-pied et qui provoquera une investigation au cours de laquelle des structures de la situation seront inventoriées. Les constatations résultantes seront explicitées dans le langage

propre au stade atteint. Il faudra ensuite exercer l'élève à se retrouver dans le champ connu et l'aider à synthétiser les résultats acquis en aperçu global. Une illustration d'un enseignement conduit d'après cette progression a été donné à propos du pavage de plan à l'aide de polygones par Madame VAN HIELE-GELDOLF dans sa thèse (10).

Parmi les nombreux travaux consacrés à l'enseignement de la mathématique aux États-Unis, un des plus significatifs est celui réalisé par le Madison project sous la direction de ROBERT B. DAVIS (11). Ce groupe a mis au point un abondant matériel destiné à susciter l'activité de l'élève et à lui permettre de découvrir par lui-même des propriétés algébriques. De la sorte, disparaît la barrière d'autorité qui s'interpose souvent dans l'enseignement traditionnel entre l'élève et la tâche ou le but proposé. La pédagogie des situations a été mise à profit par F. et G. PAPY dans leur ouvrage destiné aux enfants à partir de 12 ans (12). Ce livre original présente, de façon unitaire, les ensembles, les relations et fonctions, les nombres entiers naturels et relatifs, la numération binaire et les premières notions de géométrie affine du plan (projection parallèle, translation, symétrie axiale et centrale). Il contient d'une manière très attrayante une initiation à l'usage des graphes qui constituent, grâce à l'emploi des couleurs, une figuration et une langage des ensembles et des relations. Les premières démonstrations y sont illustrées par des bandes présentant successivement les étapes de faire la déduction.

Grâces au matériel semi-abstrait des diagrammes et des graphes, les élèves sont entraînés à abstraire tout naturellement sans être, dès le début, embarrassés par des difficultés d'expression en langue véhiculaire. Le livre ne donne qu'une idée de la vie mathématique que ces méthodes sont capables de régner dans les classes.

Avec une tournure d'esprit, l'équipe de

ST. DUSTAN'S COLLEGE, sous la direction de G. MATHEWS, écrit de petits ouvrages (13) destinés à être lus, pour une bonne part, par les élèves de 12 à 13 ans qui sont ainsi appelés à déchiffrer par eux-mêmes de nouveaux textes mathématiques. Evidemment, ces textes sont écrits de manière attrayante; par exemple, les matrices sont introduites par un procédé de codage.

À côté de la littérature mathématique se développe tout un ensemble de modèles conçus pour porter les notions mathématiques et dont certains peuvent être construits par les élèves: jeux de réglettes en couleur pour le calcul, modèles géométriques, jeux de cartes perforées, systèmes de circuits électriques, films, etc.

Tous ont, quels que soient les moyens employés, un objectif commun: favoriser l'activité de représentation, de combinaison et de substitution des élèves de manière à leur fournir, par cette activité même, un monde de structures mentales sur lequel pourra faire fond l'organisation mathématique.

L'engagement réel des élèves dans leur travail ne pourra être acquis que par une motivation adéquate à leur niveau: plaisir du jeu et de la compétition, intérêt pour les applications, satisfaction de l'appétit de découverte, goût pour la mathématique en elle-même.

Afin de tenir compte des différences d'aptitude et de rythme personnels, il conviendra de faire une place suffisante au travail individuel au sein du travail collectif qui, seul, permet les échanges fructueux au sein du groupe et justifie, de façon fonctionnelle, les moyens d'expression et la rigueur du langage.

Le maître devra parler une langue véhiculaire et une langue mathématique correctes sans exiger trop tôt des élèves une expression parfaite quand la compréhension traduite par les actes est suffisante. Toute exigence prématurée de rigueur peut entraîner

une véritable inhibition et un blocage intellectuel.

Les erreurs des élèves sont inévitables en période d'apprentissage. Elles permettent de dépister les idées et les démarches incorrectes et justifient les mises au point et les éclaircissements. Les élèves ont le droit de tromper, il est souhaitable qu'ils le fassent pour mieux livrer leur pensée et mieux comprendre. L'essentiel est que se développent chez eux des réflexes de contrôle, de vérification et d'auto-correction.

Avec les méthodes et les moyens nouveaux, le maître parle et enseigne moins pour observer et comprendre afin de mieux guider l'apprentissage personnel de ses élèves.

En quelques années est ainsi apparue dans l'enseignement une tendance vraiment nouvelle: au lieu de conditionner les élèves à des procédés mathématiques routiniers dont ils comprennent rarement le sens et la portée, on tente de leur faire acquérir, par eux-mêmes, une capacité à mathématiser des situations et à élaborer leur mathématique, c'est-à-dire un pouvoir rationnel et raisonné du pensée et d'action.

REFERENCES

- [1] Voir par exemple *Goals for School mathematics (analysis for grades 11 and 12)*, Educational Service Inc., Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., p. 46.

- [2] Cf. L. N. H. BUNT (Ed.) *Statistik*, J. B. Wolters, Groningen, 1956.
- [3] *Probability, A first course*, F. MOSTELLER et al., Addison-Wesley Publ. Comp., 1961.
- [4] Cf. Les programmes Danois et Suédois récemment entrés en vigueur; s'adresser à M. MATTS HASTAD, Secrétaire du Comité Nordique pour l'Enseignement des Mathématiques, 16, Hostigen, Stocksund. Suède.
- [5] T. J. FLETCHER (ED.), *Some Lessons in Mathematics, a Handbook on the Teaching of "Modern" Mathematics*, by Members of the Association of Teachers of Mathematics, Cambridge University Press, 1964.
- (6) Par exemple, le Gymnase Cantonal de Neuchâtel.
- [7] F. B. LOVIS, *Computers*, Contemporary School Mathematics Series, Edward Arnold, London, 1964.
- [8] Cf. J. G. KEMENY, J. L. SNELL and G. L. THOMPSON, *Introduction to Finite Mathematics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. et loc. cit. *Some Lessons in Mathematic*. [5]
- [9] De problematiek van het inzicht: La signification des niveaux de pensée dans l'enseignement par la méthode déductive, *Mathematica et Paedagogia*, N.° 16 (1958-1959).
- [10] *De didaktiek van de meetkund in de eerste klas van het V. H. M. O.*, J. M. MEULENHOF, Amsterdam. 1957.
- [11] R. DAVIS, *Discovery in Mathematics (Teacher's edn)*, Addison-Wesley Pub. Comp., 1964.
- [12] PAPPY, *Mathématique moderne*, I. DIDIER, Bruxelles-Paris. 1963.
- [13] G. MATTHEWS, *Matrices I*; C. A. R. BOILEY, *Sets and Logic I*; J. A. REYNOLDS, *Shape, Size and Place*; F. B. LOVIS, *Computers. I*. All these titles are published in the Contemporary School Mathematics Series, Edward Arnold, London.