GAZETA DE MATEMATICA
N.º 100 — Julho - Dezembro 1965

La géométrie, dans l'enseignement moderne de la mathématique

Papy
Bruxelles

Le programme de l'expérience belge pour les cinq premières années du cycle secondaire (12 à 17 ans) est conforme aux voeux unanimes émis par toutes les réunions de mathématiciens purs et appliqués qui se sont penchés sur le problème de l'enseignement:

1. La mathématique actuellement utile est la mathématique moderne. Elle a le plus de chances d'entrer en résonance avec l'esprit des enfants d'aujourd'hui.
2. Il faut apprendre à mathématiser des situations.
3. Les programmes du cycle secondaire doivent comporter: ensembles, relations, graphes, groupes, espaces vectoriels (y compris les vectoriels à produit scalaire euclidien), les débuts de l'analyse mathématique et du calcul différentiel et intégral.

Le point le plus central, le plus fondamental du programme précédent est sans conteste:

espaces vectoriels

La mise en évidence systématique des espaces vectoriels sous-jacents, dans les branches les plus variées, est un des traits caractéristiques du vrai visage de la mathématique d'aujourd'hui. L'étude de problèmes difficiles de topologie utilise notamment la structure d'anneau-module, qui généralise celle d'espace vectoriel.

Qui ne voit l'impossibilité actuelle de développer honnêtement un cours d'analyse mathématique sans utiliser de manière fondamentale les espaces vectoriels [D 1]. Est-il admissible de dissimuler que différentielles et intégrales sont des exemples importants d'applications linéaires?

Gustave Choquet a indiqué avec combien de force et de raison que les vectoriels à produit scalaire constituent la Voie Royale de la Géométrie. La théorie des vectoriels à produit scalaire est le cadre naturel du précieux legs de la tradition euclidienne!

Est-il possible d'étudier les espaces vectoriels sans introduire la structure de groupe... alors qu'un vectoriel est, avant tout, un groupe commutatif... et qu'apparaîtront inévitablement les groupes de transformations linéaires?

La plupart des groupes envisagés sont des groupes de permutations. Il s'agira de distinguer les permutations parmi les transformations.

L'ensemble des classes latérales de tout sous-vectoriel constitue une partition.

Et nous n'avons pas encore évoqué le champ des coefficients. Les vectoriels considérés sont réels: il s'agit donc d'introduire le champ ordonné des nombres réels, dans lequel la structure d'ordre joue un rôle tout à fait fondamental.

Inutile de prolonger cette énumération en cascade, un bon enseignement des éléments des vectoriels utilise inévitablement tous les concepts de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des groupes.

L'inscription de l'étude du vectoriel réel au programme de l'enseignement secondaire, impose les grandes lignes de ce programme que nous allons examiner ci-dessous de manière plus détaillée, en suivant l'ordre chronologique, et en polarisant nos observations sur la géométrie et le vectoriel euclidien plan.

*
* *

En 1961, au moment même où l'entreprise belge de rénovation de l'enseignement de la mathématique démarrait dans les classes de 6ème (12-13 ans), j'ai pris une classe de 3ème scientifique (élèves de 15 à 16 ans, 7 périodes de 45 min. par semaine) pour voir s'il n'y avait pas moyen d'enseigner directement la théorie des vectoriels à des élèves de 15 ans ayant suivi un enseignement traditionnel.

Cette expérience m'a amenè à la conclusion que voici:

1. L'enseignement traditionnel avant 15 ans, avait déjà conditionné les élèves dans un sens opposé à l'esprit de la mathématique moderne. De grands efforts devaient être consentis pour les désintoxiquer. Le conditionnement antérieur n'avait rien de naturel ni de spontané: des trésors de pédagogie et d'abnégation traditionnelles avaient été dépensés pour arriver à ce résultat... qu'il convenait maintenant de détruire. Quelle perte de temps et d'énergie!
2. Les notions fondamentales concernant ensembles et relations s'enseignent plus aisément à 12 ans qu'à 15. Elles embouteillent le cours de la classe de 15 ans où trop de concepts doivent s'introduire simultanément.
3. Ensembles, relations, groupes... étant enseignés dès 12-13 ans, il est possible d'utiliser harmonieusement ces concepts comme outils-moteurs de la construction même de l'édifice mathématique et en particulier de la géométrie. Il en résulte un énorme gain de temps et de motivation et la mathématique apparaît ainsi dans une vision unitaire.

Classe de sixième

(12-13 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.) (1)

La première moitié de cette année est réservée aux ensembles et relations, enseignés en s'aidant des représentations géométriques par diagrammes de Venn et graphes multicolores.

Tous ceux qui ont procédé de la sorte — et ont pris leur temps pour cet enseignement — ont pu constater, les années ultérieures, que les principales notions de cette théorie élémentaire et naïve étaient définitivement assimilées et faisaient même partie de la connaissance acquise immédiatement disponible.

L'usage des diagrammes de Venn et des graphes apprend subsidiairement à dessiner des schémas et à schématiser des situations, ce qui est fondamental pour toutes les études ultérieures.

On aborde la géométrie au cours de la deuxième moitié de cette année en utilisant à la fois les notions ensemblistes acquises et

(1) Certaines classes belges de sixième disposent de 5 à 6 périodes hebdomanaires. C'est l'idéal. Personnellement, nous avons mené l'expérience dans des classes à quatre périodes.

la méthode axiomatique des sciences expérimentales. Le plan est regardé comme un donné que l'on idéalise de manière harmonieuse lorsque l'expérience proprement dite cesse de donner des réponses. Le maître choisit des situations qui provoquent l'expression de certaines affirmations plus ou moins descriptives. C'est parmi celles-ci que l'on choisit les axiomes d'incidence de la géométrie plane.

Il est souvent difficile de raisonner sur des figures parce que l'on y *voit* les réponses sans *raisonner*. On obvie à cet inconvénient par l'utilisation des diagrammes de VENN ([MM 1] pp. 68-71) et notamment en demandant de dessiner dans le plan des situations primitivement décrites par des diagrammes.

L'axiome des parallèles est introduit sous forme globale ([MM 1] pp. 73-75).

Les chaînes de parallélogrammes conduisent tout naturellement à la notion de couples équipollents. Le caractère arguésien du plan est contenu dans l'axiome affirmant la transitivité de l'équipollence.

Les translations ou vecteurs (classes d'équivalence de l'équipollence), apparaissent d'emblée comme permutations du plan. L'identification délibérée de vecteur et translation à une permutation du plan économise des concepts et évite des distinguos subtils mais inutiles.

En ce qui concerne la géométrie, le cours de sixième se termine par la mise en évidence du groupe commutatif des vecteurs auquel s'identifie le plan Π dès la fixation d'une origine. Les élèves effectueront des calculs dans le groupe $\Pi_0, +$ qui est en lui-même une prodigieuse situation pédagogique.

En plus des translations, on considère dans cette classe les projections parallèles du plan sur une droite et l'une des premières démonstrations dignes de ce nom consiste à prouver que les projections parallèles de couples équipollents sont équipollentes, premier pas vers le théorème de THALÈS. On utilisera, à cet effet, le moyen pédagogique des bandes dessinées pour marquer les étapes de la démonstration ([MM 1] p. 362).

Une telle présentation de la géométrie est possible parce que nos élèves ont étudié au préalable ensembles et relations, et notamment les permutations.

Classe de cinquième

(13-14 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

Cette année est presque entièrement consacrée à la genèse simultanée du champ ordonné des réels et de la structure vectorielle plane. Le fait important à retenir ici, est qu'*il existe au moins une méthode permettant d'introduire ces notions importantes, de manière à la fois rigoureuse et intuitive, à des enfants de 13 à 14 ans.*

Cet enseignement a pu réussir grâce à la présentation antérieure des éléments de géométrie sous forme ensembliste, axiomatique et relationnelle. La numération de position joue un rôle essentiel dans l'introduction de l'ensemble ordonné des réels. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé à [F1], petit ouvrage destiné aux enseignants, où à [MM2], manuel destiné aux élèves et écrit après l'expérience.

Un patient cheminement nous a conduit des axiomes originels de caractère intuitif à la structure de vectoriel réel de dimension deux. Au fur et à mesure du développment du cours, on invoque de moins en moins les axiomes originels et les propositions intermédiaires et de plus les propriétés qui caractérisent la structure de vectoriel réel du plan.

Le cours *culmine* par la mise en évidence de cette structure et se *termine* par son utilisation systématique. On prépare ainsi le retournement psychologique du début de la classe de troisième où la structure vectorielle est la base axiomatique de départ.

Classe de quatrième

(14-15 ans) (4 périodes hebdomadaires de 45 min.)

«Le cadre du vectoriel euclidien plan est la voie royale pour l'enseignement de la géométrie». Encore convenient-il d'accéder sans heurt à cette voie. Tel est le but de notre enseignement de la géométrie métrique dans la classe de quatrième.

A partir de la notion bien intuitive de symétrie orthogonale, on introduit ou l'on retrouve déplacements (rotations ou translations) et retournements (symétries glissées ou non).

Le moyen pédagogique des droites numérotées facilite l'accès au groupe des isométries et à celui des déplacements ([GP] et [MM3]).

L'utilisation simultanée de ces groupes et des repères affins des droites introduit la notion de distance sous sa forme moderne comme application de $\Pi \times \Pi$ dans R^+, ce qui sousentend le choix préalable de l'unité. Il n'y a aucune objection à la fixation de celle-ci, puisque le changement d'unité pose un problème dont la solution est banale.

Le groupe commutatif des rotations de centre donné conduit au groupe des angles. Comme la mesure des angles ne joue aucun rôle en géométrie élémentaire, le problème que pose son introduction est reporté à la classe de seconde où il est résolu dans le cadre de la théorie des fonctions circulaires. La préhension numérique de l'angle se fera d'abord par l'intermédiaire du cosinus.

Distance et cosinus introduisent le produit scalaire. Sa commutativité et sa bilinéarité entraînent, théorème de PYTHAGORE, inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ et inégalité triangulaire.

Le cours *culmine* par la mise en évidence de la structure de vectoriel euclidien plan et se *termine* par son utilisation systématique.

Clase de troisième scientifique

(15-16 ans) (7 périodes hebdomadaires de 45 minutes)

Les élèves ont eu l'occasion de se rendre compte de l'importance de la structure de vectoriel ce qui motive une petite étude intrinsèque dont le point crucial est le théorème de la base :

Si un vectoriel admet une base de n éléments
Alors toute base de ce vectoriel comprend n éléments.

Ce théorème est mis à la portée des élèves de 15 ans grâce à un moyen pédagogique qui matérialise les subtitutions dans le passage d'une base à une autre. Ce procédé est décrit de manière schématique dans [F2] pp 32-33.

Ce point acquis, le moment est venu d'effectuer le retournement psychologique auquel nous avons déjà fait allusion. La fin des cours des clases de cinquième et de quatrième a déjà appris à se servir, en fait, des axiomes de définition de la structure de vectoriel euclidien plan.

Les élèves qui ont parcouru avec nous le chemin menant des axiomes originels à cette structure ont souvent une certaine angoisse à l'idée de ne pas retenir le détail de l'itinéraire parcouru. Le retournement psychologique vient à son heure : il est apaisant et réconfortant de savoir que l'on a le droit de ne plus retenir que les axiomes de définition des réels et ceux de la structure de vectoriel euclidien plan.

La dimension n'intervient pas dans les démonstrations concernant le carré scalaire d'une somme et le théorème de PYTHAGORE. On fait d'une pierre deux coups, puisque ces résultats restent valables dans l'espace.

La plus grande partie du cours de troisième, en ce qui concerne la géométrie, est néanmoins consacrée à une étude plus systématique du vectoriel euclidien plan. Il serait navrant de n'utiliser cette importante structure que pour établir de manière nouvelle des résultats déjà acquis dans l'enseignement antérieur et notamment dans la classe de quatrième. Le déroulement du cours de troisième doit convaincre les élèves que le vectoriel euclidien plan est une formidable base de départ pour la conquête de notions absolument fondamentales de la mathématique de toujours.

La linéarité des projections parallèles, des homothéties et des symétries parallèles (et orthogonales) mise en évidence dans les classes de 5ème et 4ème, motive l'étude des transformations linéaires du vectoriel plan.

Toute transformation linéaire est déterminée par l'image des éléments d'une base. On devine aussitôt le bénéfice que l'on pourra tirer d'une utilisation adéquate de la méthode des graphes, dont l'intérêt rebondit ici de manière subite. A chacun de ces graphes partiels est associée la matrice de la transformation dans la base considérée. Cette étude met en évidence l'anneau des transformations linéaires (et subsidiairement celui des matrices $R^{2\times 2}, +, \cdot)$ et le groupe linéaire général (voir [A7], Ch 2).

On a vu, dans les classes antérieures, que les isométries centrées sont linéaires. D'où le problème inverse: quelles sont les transformations orthogonales (ou transformations linéaires qui conservent le produit scalaire)? On est heureux d'établir que les seules transformations orthogonales sont celles que l'on connaît déjà: symétries et rotations. L'étude des matrices de ces transformations dans une base orthonormée conduit au cosinus d'une rotation ainsi qu'au demi-tour et aux *deux* quarts de tour.

Le groupe des similitudes et le sous-groupe des similitudes directes s'obtiennent en composant homothéties et transformations orthogonales. On établit enfin que l'ensemble des similitudes directes est un champ (ou corps commutatif).

Une des manières d'*orienter* le vectoriel consiste à décider d'appeler i l'un des quarts de tour. Toute similitude directe s'identifie au nombre complexe $a+bi$. La partie réelle a ne dépend pas de l'orientation contrairement au signe de sa partie imaginaire b. Dans le plan orienté, on définit le sinus d'une rotation ou d'un angle.

Les angles sont introduits comme éléments d'un groupe additif isomorphe au groupe compositionnel des rotations ou au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Il est facile de déduire les quelques formules trigonométriques importantes des propriétés des nombres complexes.

Pour plus de détails, nous renvoyons au bel ouvrage [D] de JEAN DIEUDONNÉ écrit à l'intention des enseignants intrépides et à [GP] directement destiné aux élèves.

Dans la classe de seconde (16-17 ans), la géométrie dans l'espace est développée à partir du vectoriel euclidien de dimension trois.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages

1. [A] ARTIN, *Géometric Algebra.* (Interscience Publishers, New-York, 1957).
— *Algèbre Géométrique.* (Gauthier-Villars, 1962).

2. [D 1] DIEUDONNE, *Foundations of Modern Analysis.* (Academic Press inc., New-York, 1960).
— *Fondements de l'Analyse Moderne.* (Gauthier-Villars, Paris, 1963).

3. [D 2] Dieudonne, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire.* (Herman, Paris, 1964).

4. [G] Papy, *Groupes.* (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles — Dunod, Paris, 1961).
— *Groups.* (Macmillan, London, 1964).
— *I gruppi.* (Feltrinelli Editore, Milano, 1964).

5. [EE] Papy, *Erste Elementen der Moderne Mathematik.* (Otto Salle Verlag, Frankfurt-Hamburg, 1962-1963).

6. [F 1] Papy-Debbaut, *Géométrie affine plane et nombres réels.* (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles — Gauthier-Villars, Paris, 1962).
— *Ebene Affine Geometrie und reelle Zahlen.* (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965).

7. [F 2] Papy, *Initiation aux Espaces Vectoriels.* (Presses Universitaires de Bruxelles, Bruxelles — Gauthier-Villars, Paris, 1963).
— *Einführung in die Vectorraumlehre.* (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1965).

8. [MM 1] Papy, *Mathématique Moderne 1.* (Editions Didier, Bruxelles — Paris, 1963).
— *Moderne Wiskunde 1.* (Didier, Bruxelles — Paris, 1965).
— *Matematica Moderna 1.* (Edutura Tineretului, Bucaresti, 1965).
— *Modern Mathematics 1.* (Collier-Macmillan, London — New-York, 1965).

9. [MM 2] Papy, *Mathématique Moderne 2.* (Didier, Bruxelles — Paris, 1965).

10. [A 7] Papy, (avec la collaboration des Assistants du C. B. P. M.).
— *Arlon 7. Documentation pour l'enseignement du Vectoriel euclidien plan.* (Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique—183, Avenue Brugmann, Bruxelles 6).

11. [GP] Papy, *Géométrie Plane.* (Labor Bruxelles — Nathan, Paris, 1966).

12. [MM 3] Papy, *Mathématique Moderne 3.* (Didier, Bruxelles — Paris, 1966).

Articles

13. Papy, *Introduction aux espaces vectoriels.* (La math. du 20e siècle. Vol. II, Bruxelles, 1961) (33 pages).

14. Papy, *Méthodes et techniques de présentation des nouveaux concepts de mathématiques dans les classes du premier cycle de l'enseignement secondaire.* (Mathématique moderne. OCDE Athènes, 1963).
— *Médios y técnicas para exponer los conceptos de matematica moderna.* (Elementos n.º 9, Nov. Dic. 1964, pp. 73-80, n.º 10, En. Feb. 1965, pp. 99-104, n.º 11, Mar. Abr. 1965, pp. 127-130).
— *Methods and techniques of explaining new mathematical concepts in the lower forms of secondary schools.* (The Mathematics Teacher, Vol. LVIII, n.º 4, April, 1965, pp. 345-352, n.º 5, May, 1965, pp. 448-453).

15. Papy, *Comment introduire les notions d'ensembles et de relations.* (Publications de l'Unesco).

16. Papy, *L'enseignement de la géométrie aux enfants de 12 à 15 ans.* (Publications de l'Unesco).

NOTES METHODOLOGIQUES RELATIVES AU PROGRAMME DE 6ème (11-12 ans)

Le passage des élèves de l'enseignement primaire à l'enseignement moyen marque pour eux une étape importante. Ils ont l'impression d'entrer dans une phase nouvelle au cours de laquelle on leur enseignera des choses nouvelles sur des sujets nouveaux. Ceux d'entre eux qui conservent un souvenir amer de certains points du programme de l'enseignement primaire ont l'impression vivifiante qu'il prennent un nouveau départ et que leurs insuccès passés n'hypothèquent pas leur avenir scolaire. Ils se trouvent ainsi dans une disposition d'esprit réceptive pour les idées neuves.

Leur âge est celui de l'imagination. Dans la vie courante, ils affectionnent enrichir leur langage de vocables appartenant à des domaines dans lesquels ils pénètrent avec joie.

C'est l'âge aussi où le raisonnement abstrait prend plus de vigueur et où l'expression verbale, qui a gardé toute sa fraîcheur, s'adapte aisément à l'expression spontanée.

Quelle déception pour ces enfants d'aborder cette phase de l'enseignement de la mathématique par une revision des notions déjà étudiées à l'école primaire! Une telle revision, conduite par des maîtres expérimentés, connaissant les lacunes de leurs recrues habituelles, s'attache fatalement aux notions points douloureux de l'enseignement primaire, et tout spécialement aux notions qui inhibent et bloquent les élèves.

Nous suggérons en conséquence d'éviter autant que possible dans le programme de sixième un rappel explicite et une utilisation systématique des notions rencontrées à l'École Primaire. Les méthodes qui ont échoué pour certains élèves dans le primaire ont décidément peu de chances d'être efficaces pour ces mêmes élèves dans le secondaire.

Nous suggérons donc de partir de bases nouvelles et d'aborder éventuellement certaines notions déjà rencontrées, sous un angle nouveau, ce qui donnera aux moins favorisés une nouvelle chance de mieux comprendre.

L'acquisition et la fixation des notions mathématiques se font non seulement par l'exercice de démarches rationnelles, mais encore par le canal des activités sensori-motrices. Enseigner de la mathématique, c'est cependant toujours enseigner une abstraction, et finalement, faire comprendre et dominer une situation abstraite aux possibilités infinies par la connaissance d'un nombre fini des résultats. On fournira donc aux enfants des modèles concrets pour autant qu'ils y puissent substituer des modèles abstraits, qui soient les supports d'un raisonnement effectif.

Nous allons entrer maintenant dans le détail de nos suggestions. Est-il besoin de dire que si l'on ne peut à plaisir modifier l'ordre d'enseignement de tous les sujets que nous proposons, l'enchaînement que nous suivrons ci-dessous n'a dans notre esprit rien d'absolu. De plus, bien souvent, le professeur pourra faire empiéter l'enseignement de certaines des notions. Ceci est même à conseiller fortement et nous semble inévitable dans un enseignement actif. Chaque fois que l'occasion s'en présentera, on isolera les concepts le plus importants.

Si l'espace d'EUCLIDE a pu pendant longtemps servir de cadre à une exposé unifié de la mathématique de base, il n'en est plus ainsi aujourd'hui et ce rôle peut être rempli maintenant par l'*univers ensemblistes*.

Comme il a été prouvé d'autre part, par des expériences effectuées tant en Amérique, en Angleterre, en Russie, en Pologne, que dans notre pays, que l'enseignement des *notions élémentaires sur la théorie naïve des ensembles* intéresse vivement les jeunes élèves, il semble inévitable de proposer ce sujet comme *point de départ* dans l'enseignement secondaire. On partira d'exemples concrets, mais on fera acquérir les véritables notions abstraites sans utiliser cependant aucun jargon pédant.

Tous les élèves du début du secondaire ont une notion vague d'ensemble. Il ne s'agit donc pas de leur inculquer cette notion mais de l'affiner de façon à en faire un concept mathématique naïf que l'on utilisera immédiatement pour fonder la géometrie.

On mettra bien en évidence la notion d'appartenance d'un élément à un ensemble. Ou insistera sur le fait qu'un ensemble est défini quand on sait pour tout objet s'il est ou non un élément de cet ensemble et qu'un «morceau» d'un élément de cet ensemble n'est pas nécessairement un élément de cet ensemble.

Les diagrammes de VENN permettent de mettre ce fait en évidence de manière frappante.

Les diagrammes de VENN qui s'introduisent d'une manière presque spontanée constituent un moyen pédagogique fondamental, d'ailleurs utilisé de manière courante par tous les mathématiciens.

Nous conseillons de faire dessiner aux enfants des diagrammes où la couleur est utilisée de manière suggestive. Ces dessines doivent être grands et l'utilisation des crayons à mèche est recommandée.

On introduira les symbolea $\in$ et $\subset$. Des situations familières conduisent tout naturellement au singleton et à l'ensemble vide qui sera noté $\emptyset$.

Des exemples simples révèleront qu'il est naturel de regarder certains ensembles comme des éléments. Toute droite est un ensemble de points, et un élément de l'ensemble $\mathscr{D}$ des droites du plan.

On pourra parler de *l'ensemble des parties d'un ensemble et rechercher* l'ensemble des parties de certains ensembles sans s'attarder sur la définition formalisée.

Si l'on prend soin d'écrire l'ensemble des parties de l'ensemble de quatre éléments distincts $\{a, b, c, d\}$ sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \\ \{a,b,c\}, \{d\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}, \\ \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\} \end{array}\right.$$

on révèlera naturellement la formule du nombre de parties d'un ensemble de n éléments (2^n).

Les situations concrètes et les diagrammes de VENN introduisent tout naturellement les opérations *d'intersection, de réunion, de différence* de deux ensembles. On utilisera les signes $\cap$, $\cup$, $\setminus$

Des situations comprenant un grand nombre d'ensembles conduisent à représenter un ensemble par des assemblages différents ne comportant que des lettres désignant les ensembles initiaux et les signes $\cap$, $\cup$, $\setminus$.

C'est un moment propice pour introduire les signe $=$ et pour souligner la signification de *l'égalité* dans tous les cas où elle a été rencontrée. En utilisant les diagrammes de VENN, on établira les lois *d'associativité*, de *commutativé*, de *distributivité*, ainsi que le rôle de *l'ensemble vide*.

Il nous semble dangereux de vouloir formaliser des démonstrations de telles propriétés. Sans doute est-il préférable de considérer ces résultats comme fournis par des diagrammes, ce qui permettra beaucoup plus tard de regarder la logique elle-même comme une extrapolation d'un jeu de propositions fournies ici par l'expérience.

Néanmoins, il será particulièrement fécond de désigner *l'implication* par le symbole $\Rightarrow$ (entraîne ou implique) et la bi-implication ou équivalence logique par le signe $\Leftrightarrow$ (si et seulement si) qui seront introduits comme de simples abréviations sténographiques. Quand l'occasion s'en présentera, on pourra utiliser les quantificateurs $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe), $\exists\,!$ (il existe un et un seul).

A titre d'exercice, on pourra introduire la *différence symétrique*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

On remarque que $A \triangle B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à un et un seul des ensembles A, B: autrement dit,

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

On recherchera les propriétés de $\triangle$ et l'on remarquera (sans parler explicitement de *groupe*) que $\triangle$ érige l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E en un *groupe commutatif*. Sans doute s'agit-il d'un des exemples de groupes les plus simples.

On sait que la mathématique actuellement enseignée dans le secondaire ne peut éviter l'utilisation explicite des notions de *relation, fonction, bijection, équivalence, ordre.*

N'est-il pas étrange que nos exposés traditionnels de signalent pas aux élèves que l'homothétie est une fonction (d'ailleurs continue). La relation «a comme père» est un autre exemple de fonction. Porquoi superposer aux difficultés du début de l'analyse celle de l'acquisition de la notion de fonction?

Nous suggérons d'introduire la *notion de relation* à partir d'exemples concrets. Certains situations suggérent elles-mêmes aux élèves de représenter les relations par des graphes (une flèche va du point a vers le point b chaque fois que le couple (a, b) est dans la relation considérée).

Quand les graphes de plusieurs relations ont été dessinés, certains élèves feront des comparaisons et émettront des commentaires qui sont un début de classification. Les diagrammes de VENN et les graphes ne sont pas des modèles intuitifs approchés mais un langage rigoureux et clair traduisant une situation mathématique. Les propriétés de réflexité, de symétrie, de transitivité, de antiréflexivité et d'antisymetrie s'enseignent aisément au moyen des graphes.

La notion d'équivalence liée à celle de partition est fondamentale dans toute activité rationnelle.

Les notions de fonctions et les notions satellites telles que les permutations, qui jouent un rôle fondamental dans toute la mathématique aussi bien en géometrie qu'en analyse ou en calcul combinatoire, seront dégagés à partir de situations familières.

Il faut bien admettre que la terminologie concernant les fonctions n'est pas entièrement fixée. Nous suggérons d'appeler fonction toute relation dont 2 couples distints n'ont jamais même origine. Autrement dit, est fonction, toute relation telle que de tout point du graphe part au plus une flèche.

Un avantage de cette définition réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas la mise en évidence souvent artificielle d'ensemble de départ et d'en ensemble d'arrivée.

On appellera «application de A dans B», en notation $f: A \to B$ toute relation f dont le graphe jouit des propriétés suivantes:

1) Toutes les flèches partent de points de A et aboutissent en des points de B.
2) de tout point de A part une et une seul flèche.

L'expression

«f est une fonction de A dans B»

est synonime de l'expression

«f est une application de A dans B».

En mathématique, comme dans le langage courant, il est parfois inévitable et souvent commode de disposer de synonimes.

Le mot application a l'avantage d'être doublé du verbe appliquer mais l'usage mathématique impose le mot fonction dans certains circonstances.

On appelera transformation de l'ensemble A, toute application $A \longrightarrow A$.

On consacrera un soin tout particulier aux notions à la fois riches et simples d'ordre et d'ordre total.

On sait que l'édificie d'EUCLIDE péchait surtout par l'absence de références à ces notions. Il en est résulté que dans l'enseignement traditionnel, toutes les notions relatives à l'ordre et en particulier au calcul des inégalités, constituent une pierre d'achoppement.

Dégagées des notions familières, les notions d'ordre et d'ordre total seront utilisées de manière systematique en géometrie.

Un graphe étant donné, il est tout naturel de considérer le graphe obtenu en retournant toutes ses flèches, ce qui conduit à la notion tout à fait simple et fondamental de réciproque d'une relation.

On notera que la représentation des relations par des tableaux ou par les méthodes cartésiennes rend cette notion plus difficile. L'avantage des graphes est ici très net.

Aprés l'assimilation de ces importants notions, on veillera à en traduire la définition sous les formes les plus diverses, en langage ordinaire et en langage plus ou moins formalisé.

Les relations de parenté conduisent tout naturellement à la composition des relations, dont la composition des fonctions et des applications est un cas particulier.

La construction du graphe de la composée de 2 relations représentées par des graphes de couleurs différentes est un excellent exercice.

Le comportement des élèves devant ces problèmes élémentaires est extrêmement instructif. L'expression du résultat s'effectue ici sans recours au langage verbal. Ce facteur est donc éliminé dans les causes d'échec.

Tous ceux qui ont utilisé les graphes comme moyen pédagogique signalent le lien affectif des enfants pour ces dessins abstraits et multicolores.

Comme est instructive aussi pour les élèves la situation fournie par un ensemble de points représentatifs et que structure peu à peu l'apparition successive des diverses flèches du graphe.

La composition successive de 3 relations pose aussitôt le problème immédiatement résolu de l'associativité de la composition. Il est essentiel de rendre les enfants conscients le plus tôt possible de l'associativité de la composition des relations qui est utilisée sans cesse dans tout exposé mathématique.

Deux ensembles A et B étant donnés, on recherchera quelle est la plus grande relation de A vers B, ce qui fournit le *produit* $A \times B$. On *établira la distributivité de ce produit par rapport à la réunion.*

Les bijections entre ensembles introduisent les notions d'équipotence et de cardinal (ou nombre d'éléments d'un ensemble). Les ensembles finis fournissent les nombres naturels.

Les ribambelles mettent en évidence, de manière intuitive, la notion d'ensemble infini.

Les enfants connaissent les propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication des entiers naturels.

On éveille leur intérêt en leur demandant de déduire ces propriétés des notions ensemblistes ce qui leur imposera de rechercher une définition ensembliste de l'addition et de la multiplication.

Les propriétés fondamentales des nombres naturels se déduisent alors sans formalisme superflu des propriétés des opérations ensemblistes. Cette méthode de présentation ouvre la voie à des généralisations ultérieures et facilitera plus tard l'étude de l'analyse combinatoire.

Les problèmes de dénombrement posant celui *des systèmes de numération,* il nous a toujours semblé très difficile d'intéresser les élèves à étudier une nouvelle fois le système décimal avec les chiffres arabes.

Nous suggèrons d'étudier le système utilisé par les grandes calculatrices électroniques: le *système binaire.*

Des actions antagonistes présentées dans certaines situations simples, permettent d'introduire tout naturellement le groupe $Z, +$.

Ainsi que Caleb Gattegno l'a fait remarquer, les élèves proposent spontanément ou admettent volontiers *l'extension de la multiplication* de ω à Z par une sorte d'extension de la loi d'associativité qui permet d'écrire $(-a)b = -(ab)$. On établira les propriétés qui traduisent le fait que $Z, +, \cdot$ *est un anneau.*

Comme les élèves ont été habitués dès le début de cet enseignement à représenter les objets les plus divers et les ensembles par des lettres, la signification du calcul algébrique littéral leur apparaît immédiatement. Dans l'anneau $Z, +, \cdot$ on effectuera des calculs gradués et variés qui permettent d'introduire puissances et exposants, et notamment les produits remarquables dans

$Z, +, \cdot$ On attachera un soin tout particulier à la résolution d'équations dans $Z, +, \cdot$ On soulignera que la solution d'une équation fournit, en fait, la même information que l'équation elle-même. Le progrès unique, mais important réside dans la forme de cette information.

Géométrie.

La connaissance à la fois logique et intuitive de la géométrie plane reste fondamentale dans la mathématique actuelle.

Grâce aux notions ensemblistes et relationnelles que possèdent les élèves, l'étude de la géométrie pourra se faire de manière nette. L'intuition géométrique aidera le raisonnement sans jamais se substituer insidieusement à lui.

Chaque fois qu'un ensemble d'informations est donné, on peut distinguer les premières informations communiquées et toutes celles qui s'en déduisent. On appelle les premières, axiomes et les autres, propositions ou théorèmes. Il est facile de faire voir aux enfants q'un même ensemble d'informations peut résulter de systèmes d'axiomes différents.

A partir des notions empiriques de géométrie déjà acquises par les élèves et de l'observation de situations adéquates, on mettra en évidence les informations parmi lesquelles on choisira les axiomes.

Une fois les axiomes d'incidence acquis, il importe de les utiliser dans le raisonnement déductif. Or les enfants raisonnent difficilement sur les propriétés d'incidence à partir d'un dessin sur lequel on *voit* d'emblée les réponses aux questions posées. Ici, les diagrammes de Venn viennent utilement en aide. Ils constituent un support intuitif à la structure logique de la géométrie et obligent les enfants à raisonner pour fournir les réponses aux questions posées. Le passage à la représentation graphique usuelle (et vice-versa) est fondamental.

A partir des axiomes d'incidence, on introduit la notion de parallélisme et l'axiome d'Euclide que l'on présentera avantageusement sous forme globale: toute direction est une partition du plan.

A partir du double pliage, s'introduit l'axiome des directions perpendiculaires. La présentation globale de ces axiomes permet d'établir d'emblée toutes les propriétés classiques sur les parallèles et perpendiculaires.

Les élèves familiarisés avec la notion d'ordre reconnaissent volontiers que six ordres totaux peuvent être définis dans tout ensemble de trois objets, et qu'une infinité d'ordres totaux peuvent être définis dans tout ensemble infini. Dans le contexte d'une société possédant un alphabet, tout ensemble de trois lettres est muni de deux ordres totaux réciproques privilégiés: l'ordre alphabétique et l'ordre alphabétique réciproque des trois lettres. Comme toute droite est un ensemble infini, il existe une infinité d'ordres totaux sur chacune d'elles. Dans le contexte de la situation graphique intuitive, il apparaît qu'ici aussi deux de ces ordres totaux (réciproques l'un de l'autre) sont privilégiés. Ces ordres sont appelés ordres naturels. Un axiome consignera cette information: toute droite est munie de deux ordres totaux réciproques appelés ordres natureles de la droite. Orienter une droite, c'est désigner l'un de ces ordres natureles par $\angle$.

A partir des axiomes d'incidence, on aura défini les projections parallèles du plan sur une droite et d'une droite sur une droite.

Par une nouvelle démarche intuitive, on constate que toute projection parallèle d'une droite orientée sur une droite orientée est toujours strictement croissante ou strictement décroissante. Cette information qui sera consignée dans un nouvel axiome est équivalente à l'axiome de Pasch.

Il est possible, à partir des axiomes précédents, d'établir qu'étant données deux droites parallèles orientées, toutes les projections parallèles sont simultanément croissantes ou simultanément décroissautes. Nous suggérons d'admettre ce résultat comme axiome supplémentaire.

A partir des notions d'ordre, s'introduisent tout naturellement celles de segments ouverts, fermés, semi-ouverts, de demi-droites ouvertes ou fermées, de demi-plans fermés ou ouverts.

Disposant de la notion de segment et de celle d'inclusion, nous introduirons de manière extrêmement simple celle d'ensemble convexe. Un ensemble este convexe si et seulement si tout segment joignant deux de ses points est inclus dans l'ensemble. On étudiera de nombreux exemples d'ensembles convexes et non convexes.

Un exercice fécond consiste à construire l'enveloppe convexe de certaines parties du plan.

Ainsi que l'a fait remarquer Gustave Choquet, la trop grande importance accordée par les exposés traditionnels aux propriétés métriques du triangle dissimulait le rôle du parallélogramme.

A partir des notions de parallélisme et d'incidence, on comprend aisément ce qu'il faut entendre par deux couples de points liés par un parallélogramme. Deux couples seront dits équipollents si et seulement s'ils sont liés par un ou deux parallélogrammes. On établit aisément que l'équipollence est réflexive et symétrique. Une nouvelle démarche intuitive révèle la transitivité de l'équipollence (à consigner en axiome).

Certains élèves hésitent à admettre que les projections parallèles de couples équipollents soient équipollents. C'est l'occasion de la première démonstration digne de ce nom, par le nombre des étapes qu'elle comporte. Les bandes dessinées constituent un moyen didactique non verbal qui met en évidence de façon frappante tous les pas de la démonstration. Elles font apparaître aux élèves qu'une démonstration se développe souvent par des éclairages successifs d'une même situation.

A partir du théorème de la projection, on déduit les propriétés affines du parallélogramme et le «petit théorème de Thalès».

Les translations sont définies comme les classes d'équivallence de l'équipollence. On établit que les translations sont des permutations du plan.

Chaque fois, qu'une transformation importante est introduite en géométrie il convient de familiariser les élèves avec celles-ci par des exercices variés choisis de manière à mettre en évidence les aspects intuitifs de la transformation introduite. En ce qui concerne les translations, on demandera notamment de rechercher l'image de certaines parties du plan. Une translation et une partie P du plan étant données, on demandera quel est le plus petit ensemble du plan contenant P et qui soit égal à son image par t, ce qui donne lieu à la notion de frise. Le problème analogue pour une partie du plan et deux translations conduit aux tapisseries.

PROBLEMES

La mathématique est aujourd'hui indispensable dans des domaines de plus en plus nombreux, comme langage, support de la pensée, moyen d'investigation et de résolution.

Tout élève de l'Enseignement Moyen est aujourd'hui susceptible de devoir utiliser et appliquer de la Mathématique au cours de la poursuite de ses études et dans sa profession.

L'enseignement devra, non seulement faire connaître les éléments fondamentaux de la Mathématique actuellement utilisée dans des applications mais encore apprendre à l'appliquer dans les situations les plus diverses.

On se gardera de l'illusion que l'on puisse, même après un cycle complet d'humanités, munir les élèves d'un bagage mathématique, apte a leur fournir automatiquement des solutions toutes faites aux problèmes qui leur seront effectivement posés. Dans la pratique; la difficulté primordiale consiste à mathématiser une situation, et à formuler les problèmes qu'elle pose. Pour les résoudre, on essayera autant que possible de reconnaître l'une ou l'autre des grandes structures de la mathématique.

Les problèmes traditionnels concernant l'intérêt, les mélanges, les robinets, les alliages et les invraisemblables partages d'héritages n'ont aucune portée pratique, et ne familiarisent pas avec les démarches qu'imposent les véritables applications.

Conformément aux conclusions de la réunion de St Andrews, de la Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'Enseignement de la Mathématique, dirigée par GUSTAVE CHOQUET et CALEB GATTEGNO, on préférera aux problèmes stéréotypés à solution unique, des problèmes ouverts qui font passer l'élève à un niveau plus élevé de compréhension.

On abandonnera, en conséquence, les leçons de problèmes artificiels. Au contraire, tout l'enseignement se développera par la mise en évidence progressive des problèmes ouverts, et la recherche de leurs solutions.

On habituera systématiquement les élèves à mathématiser des situations tant dans l'organisation du cours lui-même, que dans des exercices présentant des situations problématiques.

On fera appel, autant que possible, à leurs connaissances dans des domaines variés. Il est clair cependant qu'au niveau de la sixième, on recourra davantage à leurs connaissances communes qu'à un acquis dans d'autres sciences. Ainsi que l'a fait remarquer DIENES, il est indispensable à ce niveau, que le cours de Mathématique trouve en lui-même sa propre motivation, car peu d'applications extérieures impressionnantes sont à ce moment à la portée des élèves.