GAZETA DE MATEMATICA
N.º 100 — Julho-Dezembro 1965

Ensino da matemática para outras ciências

Yasuo Akizuki
Toquio

SUMÁRIO

Actualmente, devido ao progresso da matemática, das outras ciências e da engenharia, as aplicações da matemática aumentaram numa escala muito vasta, sofrendo ao mesmo tempo uma modificação essencial, mesmo em qualidade. Nasceram muitos ramos novos da ciência matemática. O novo estilo do pensamento matemático permitiu novas e numerosas aplicações. O computador electrónico, por exemplo, revolucionou os processos de cálculo. Por todas estas razões devemos reformar o ensino matemático actual.

Por outro lado, a estreita relação existente entre a matemática e as outras ciências teóricas, tal como existia no princípio deste século, desapareceu. O progresso principal realiza-se, em cada campo, independentemente do outro. Mas parece que já vão aparecendo pessoas, não muitas, que pretendem o regresso ao estado harmónico anterior e a construção da nova «ciência matemática». Com este objectivo também, é urgente reformar o ensino da matemática.

Assim, todos reconhecem de boa vontade a necessidade de uma tal reforma. Mas sobre o modo de realizá-la actualmente as opiniões não coincidem e quase sempre uma delas está em oposição com as outras. A dificuldade pode ter origem no facto de os cientistas não conhecerem suficientemente a matemática moderna e de os matemáticos não conhecerem suficientemente o desenvolvimento da ciência e da engenharia, tão vasto é o progresso em cada um destes campos.

Examinemos em primeiro lugar os reparos e as aspirações dos cientistas a respeito do ensino da matemática. Eu reuni opiniões de alguns destacados físicos e engenheiros japoneses.

Os bons físicos teóricos reconhecem plenamente a eficácia dos métodos matemáticos aplicados à sua ciência e apreciam a exacta formulação matemática das suas teorias, como objectivo final da investigação. Reconhecem plenamente também, como muito eficazes, as poderosas influências da matemá-

---

* «High school level» designa os dois últimos graus do ensino secundário.

tica moderna, tais como os conceitos de matriz-S, de observável, etc.. Mas afigura-se-lhes que esta formulação matemática moderna se apresenta demasiadamente abstracta e formal e lamentam que a verdadeira feição da natureza possa dissimular-se detrás da teoria matemática. Alguns deles perguntam-se porque os matemáticos chegaram a raciocinar de uma maneira tão abstracta. E desejam ardentemente compreender a essência de tal pensamento e a substância de conceitos tão abstractos. Por exemplo, o notável físico YUKAWA disse-me que, para os físicos, é mais fácil compreender uma estrutura em termos de números reais do que em termos de números complexos.

Há naturalmente muitos físicos que consideram a matemática mero instrumento dos seus estudos especializados, como meio auxiliar ou acabamento dos resultados dos seus trabalhos. Eles dizem: se compararmos um matemático com a pessoa que projecta um automóvel, então o físico deve ser comparado com o condutor. Anàlogamente, a formulação muito elaborada de um conceito e a prova extremamente rigorosa de um teorema não lhes parecem de modo algum necessárias. E acrescentam: nas classes habituais de matemática encontramos meras cadeias de demonstrações e um tal ensino não é conveniente para nós.

Deve notar-se que existem físicos, muito poucos, que afirmam: «A matemática moderna é absolutamente inútil à física porque não conduziu a nenhum progresso essencial desta. A contribuição actual dos matemáticos contemporâneos à física reduz-se à invenção dos computadores!». Por outro lado existem físicos, também muito poucos, com opiniões como esta: «No ensino da matemática, mesmo ao nível universitário, é mais importante permitir aos estudantes que adquiram o espírito matemático e o sentido da matemática moderna. Não devemos contar com um efeito imediato sobre as aplicações actuais!».

Parece que quase todos os cientistas desejam que haja, no ensino da matemática, a preocupação de ser mais intuitivo e um contacto mais estreito com as outras ciências.

Devia haver muita discussão acerca destes temas entre os quais nós, matemáticos, temos muitos pontos a considerar. Contudo, se estamos de acordo com a opinião de que o ensino da matemática deve ser diferente para os que a utilizam e para os matemáticos, também é verdade que a principal matéria a ministrar é ainda a própria matemática.

Devem ser debatidos os problemas: «raciocínio intuitivo e dedução lógica», «rigor e evidência intuitiva», «abstracto e concreto». Deve ser debatida, em particular, a forma de introduzir o sistema dedutivo e o raciocínio abstracto e como iniciar o aluno no tratamento rigoroso dos assuntos.

A matemática é, naturalmente, uma teoria abstracta. Até mesmo uma operação primária como a contagem $1, 2, 3, \cdots$, tem já essencialmente este caracter. Mas neste nível a abstracção é *inconsciente*. O primeiro curso de álgebra é também considerado abstracto, mas de uma abstracção comparável à da linguagem. Esta abstracção inconsciente deveria ser bem diferenciada da que caracteriza a matemática moderna.

A primeira teoria que se tornou *consciente*, na própria matemática, foi a geometria euclidiana. Construiu-se a teoria *dedutivamente*, configurando o espaço físico como uma entidade harmónica, isenta de contradição. Podemos afirmar que esta atitude é fundamental nas matemáticas aplicadas e na ciência em geral, o que deveria ser posto em destaque já no ensino elementar.

NEWTON prosseguiu com a edificação da teoria do universo dinâmico, introduzindo a massa e o tempo no espaço euclidiano estático. Pode considerar-se que a teoria de NEWTON configurou a natureza no mesmo espírito que animou EUCLIDES. Com a análise infinitesimal conseguiu interpretar as relações funcionais dissimuladas na matéria. Filosòficamente falando, como KANT afirmou, a mecânica newtoniana não é ontológica mas construtiva. Contudo, a teoria é categórica e fundada na noção intuitiva de contínuo.

Após NEWTON numerosos continuadores, por exemplo EULER, estudaram a determinação dos valores das funções desenvolvendo-as em série, mas deparámos mais tarde com perigos que geraram a crítica do último século. Constatámos além disso que certas formulações consideradas intuitivamente claras nem sempre oferecem uma representação suficientemente exacta do objecto, como no caso da curva de PEANO.

Assim, foram vivamente reclamadas a formulação exacta e a fundamentação rigorosa dos objectos matemáticos. O conceito de número real foi primeiramente clarificado por DEDEKIND, independentemente da sua base intuitiva. Seguidamente, por intermédio da teoria dos conjuntos de CANTOR, atingimos os fundamentos da matemática de HILBERT.

Estas manifestações críticas podem ser divididas em duas tendências, segundo creio: a primeira procura ser rigorosamente exacta e a segunda construtiva; como é natural, por vezes encontram-se as duas tendências estreitamente relacionadas.

Recentemente, já no século actual, descobriu-se que existem teorias matemáticas desenvolvidas que podem ser construídas, sem dificuldade, a partir de poucos postulados fundamentais simples. O método axiomático adquiriu assim um carácter não categórico e metodológico, em vez de categórico e de fundamento. Com este carácter provou já a sua eficiência e unificou muitos domínios aparentemente diferentes e a matemática moderna tornou-se muito mais acessível do que a clássica. Além disso, permitiu realizar grandes desenvolvimentos em cada direcção da matemática e das suas aplicações. A razão pela qual este método é tão poderoso reside, creio eu, em que ele penetra na própria essência do pensamento matemático; nomeadamente, ele trouxe-nos a auto-consciência da abstracção, actividade primordial da matemática que existiu, ainda que inconscientemente, desde o princípio, na própria operação de contagem $1, 2, 3, \cdots$.

Posto que seja desejável introduzir o método axiomático moderno (não categórico) tão depressa quanto possível, considero que no ensino deveria ter prioridade o método dedutivo clássico (categórico), porque doutro modo o estudante pode não saber onde aplicar os métodos modernos aprendidos. Na minha opinião, a geometria dedutiva é preferível ao iniciar o ensino do método axiomático, porque mostra claramente quais os factos fundamentais da intuição que devem ser formulados como base das deduções lógicas. Em todos os graus de ensino do método dedutivo ou do método axiomático deveríamos insistir na interacção da intuição geométrica com a dedução lógica, nunca deixando o aluno pensar erradamente que intuição e dedução são independentes uma da outra.

Seguidamente, deveríamos introduzir os sistemas dedutivos não categóricos, permitindo ao aluno tomar consciência do processo e compreender como se abstrai da aparência exterior do objecto. Naturalmente, isto deveria ser ilustrado, a princípio, com diversos exemplos simples.

No que concerne à iniciação ao ensino da análise matemática, acho preferível introduzir os conceitos, numa primeira etapa, com recurso à intuição geométrica, só entrando numa formulação mais rigorosa quando encontrarmos um problema que não podemos analisar sem uma tal formulação. É importante, mesmo para aqueles que aplicam a matemática, apresentar alguns contra-exemplos, porque isso contribuirá para torná-los cuidadosos neste e naquele ponto, mas aprofundá-los demais poderia ser nocivo. De toda a maneira, o raciocínio geométrico deveria ser encorajado no curso de análise, penso eu.

Como acima se disse, é muito desejável que a significação do método dedutivo (ou método axiomático) seja esclarecida relativamente à aplicação às ciências. E pelo estudo do sistema dedutivo deve-se compreender de que modo propriedades diversas estão lógica e estreitamente relacionadas entre si, formando uma arquitectura. O ensino não deve nunca conduzir ao erro de que a dedução matemática é uma cadeia linear de proposições.

Cada novo conceito deveria ser introduzido de maneira que o aluno pudesse apreendê-lo naturalmente. Deveríamos fazer por explicar tão claramente quanto possível a essência do conceito, para além da sua definição formal. Deveríamos esclarecer também o motivo pelo qual o conceito é definido de uma certa maneira, mostrando a eficiência desta por meio de vários exemplos.

Deste modo, o ensino da matemática deve ter em vista permitir aos alunos compreender correctamente a matemática e a essência do pensamento matemático.

Na realidade, contudo, ela não tem sido ensinada desta maneira. Parece que o ensino matemático no passado consistiu principalmente na manipulação de técnicas de cálculo. Certamente, as técnicas são muito importantes na matemática, porque sem elas nada poderíamos fazer. Entendeu-se durante muito tempo que a matemática aplicada é o estudo das aplicações da matemática pròviamente elaborada ou o estudo de artifícios de cálculo necessários às aplicações práticas. Os antigos professores de engenharia costumavam interrogar os alunos, a respeito dos conhecimentos matemáticos adquiridos, tendo em vista ùnicamente a perícia em técnicas (mecânicas) de cálculo.

Mas hoje existem computadores muito rápidos. Podemos deixar os cálculos ao computador. A matemática aplicada tornou-se agora uma ciência na qual se estuda a maneira de aplicar o raciocínio matemático. Os jovens engenheiros de hoje não pensam como os antigos. Mesmo assim, um jóvem engenheiro, com excelente preparação matemática, foi de opinião que os engenheiros poderiam estudar matemática sòmente no âmbito da sua especialidade e que as chamadas matemáticas puras não têm utilização. E acrescentou: «eu não encontro interesse na matemática desde que os matemáticos façam dela brinquedo». Ora a matemática é algo que se faz e não algo que se sabe. É muito bom que os engenheiros estudem matemática no âmbito do seu próprio trabalho. Devemos de preferência ensinar os engenheiros de modo que se tornem aptos a trabalhar com matemática dessa maneira. Mas isto não significa que é suficiente para um estudante de engenharia estudar matemática resolvendo sòmente problemas práticos eventuais. Ao pretender que ele seja um matemático, não quero aqui tomar a palavra «matemático» no sentido de profissional, mas refiro-me a um cidadão capaz de pensar matemàticamente. Nomeadamente, deveria permitir-se ao aluno compreender o pensamento matemático e aprender a formular matemàticamente objectos ainda não formalmente definidos. A matemática não é qualquer coisa para se contemplar. Mas para se utilizar correctamente a matemática é necessário ter em vista o que se está a estudar e o que já foi estudado.

Seria muito importante permitir ao aluno compreender o sentido da matemática moderna antes de entrar nos seus estudos especializados, posto que o motivo pelo qual o método matemático se tornou recentemente tão poderoso reside em que, como já se explicou, o moderno pensamento matemático atinge a própria essência da matemática. Hoje os engenheiros consideram a teoria dos grupos como um dos ramos mais úteis da matemática. Mas existiam há trinta anos engenheiros que discordavam, dizendo: «Teoria dos grupos! Tal como a teologia, essa matemática é completamente inútil para os engenheiros».

Certamente, há muitos pontos que devem ser especialmente tomados em consideração no ensino da matemática àqueles que a utilizam. Em muitos casos, a significação de um teorema sómente pode ser aclarada depois de bem compreendida a demonstração. Contudo, há também teoremas dos quais se pode omitir a demonstração sem prejuizo para as aplicações (por exemplo, o teorema de TITSCHMARSH, no cálculo operacional de MIKUSINSKI). Nestes casos seria preferível omitir a prova e em alguns poderá ser suficiente esquematizá-la.

Se os exemplos que ilustram os textos e os exercícios práticos forem tomados de aplicações *reais* interessantes, em vez de formais, poderiam ser atraidos e estimulados para outras ciências muitos estudantes.

Deste modo e em minha opinião, o objectivo do nosso ensino, tanto para os matemáticos como para aqueles que aplicam a matemática, deve ser o Renascimento da Ciência Matemática.

Nas regiões subdesenvolvidas é normal pretender-se veementemente perseguir e alcançar tão depressa quanto possível o progresso industrial dos países mais avançados. Nesta situação pode correr-se o perigo de se acelerar sòmente a aprendizagem das técnicas sem se estudar o fundamental. Nós, japoneses, tivemos essa experiência nos últimos oitenta anos. Parece que fomos bem sucedidos em perseguir e de algum modo alcançar os países avançados. Mas estamos ainda, certamente, atrasados em relação a estes, o que se pode inferir do facto seguinte: no Japão, a relação entre o número de estudantes de ciências e de engenharia é presentemente 3/17, enquanto que na Inglaterra é 4/3.

Contudo, nós no Japão atribuímos grande importância ao ensino da matemática desde o início da era Meiji, particularmente com a modernização do Japão, estando a matemática presentemente tão desenvolvida como nos países mais evoluídos.

Esperamos que os países africanos considerem também importante, entre todos, o ensino da matemática, posto que a nossa era é por excelência a da ciência matemática.

Para terminar eu desejava insistir em mais um ponto. Qualquer pessoa deve especializar-se, mas como ser humano que ainda é, não deve tornar-se um mero especialista. Hoje em dia a ciência está especializada em diversos ramos e tornar-se-á, rápida e intensamente, cada vez mais automatizada. Existe o perigo de os seres humanos se tornarem peças de especialidades. Contra tal tendência científica e social, a matemática tem a faculdade de unificar os diversos ramos num todo. Penso que não se deveria esquecer nunca este carácter unificador da matemática em todo o ensino matemático. Penso que este problema é especialmente sério e importante nas regiões subdesenvolvidas.

II. Ensino nas escolas primária e secundária.

No ensino matemático devia ser lembrado desde o princípio que a matemática não é uma simples técnica de cálculo. Por meio do cálculo digital, em vez de demasiados exercícios de manipulação, a compreensão do algoritmo de cálculo deveria surgir apropriadamente.

Em relação com medições físicas seria possível introduzir o conceito de recta numérica em idade verdadeiramente precoce. Também poderiam ser introduzidos os números negativos e a noção de coordenadas, ainda na escola primária.

É desejável ter sempre em conta a aproximação numérica tanto na apreciação dos resultados dos cálculos como das medidas físicas. Mas esta questão não deve ser tratada com demasiado formalismo, que poderá ser nocivo.

Algumas observações estatísticas e o seu registo adequado deveriam ser efectuadas.

O conceito de conjunto (de conjunto finito naturalmente) deveria ser introduzido muito cedo. Por meio do conceito de conjunto podem ser aclarados alguns elementos de lógica, utilizando exemplos concretos apropriados. Mas seria aconselhável que no ensino elementar os elementos de lógica não fossem dados demasiado formalmente.

Na escola primária é importante aumentar, natural e gradualmente, a actividade matemática dos alunos.

Na escola secundária (7.º ao 12.º grau) é necessário aumentar, também gradualmente, o ritmo de progresso da actividade matemática.

O princípio (7.º e 8.º graus) seria consagrado a um curso introdutório de álgebra e a um curso de geometria semi-formal.

No curso introdutório de álgebra é muito importante exercitar os alunos a compreender e a usar a linguagem algébrica e a exprimir algèbricamente as questões. Esta etapa pode considerar-se como pertencente à linguística. A etapa seguinte consiste em resolver problemas muito simples de equações do 1.º e do 2.º grau, com raízes reais. Aqui é aconselhável considerar simultâneamente os gráficos das funções.

O curso de geometria deste período poderia ser parcialmente físico e parcialmente dedutivo (localmente dedutivo). É aconselhável introduzir a noção de vector (geométrico) e aplicá-la a alguns problemas de geometria plana e de mecânica elementar.

Nos graus 9.º a 12.º, elevando o nível, far-se-ia a introdução ao método dedutivo.

Em minha opinião, a geometria dedutiva é ainda a melhor matéria para este fim, porque é o primeiro modelo fundamental de matemática aplicada. É essencialmente importante permitir que o aluno compreenda como o espaço físico é configurado matemàticamente. Também é importante facultar ao estudante a compreensão do que é uma estrutura matemática. A este respeito devemos recordar que estas noções devem ser ministradas deixando o aluno compreendê-las por ele próprio, por meio de experiências pessoais. Mas como as aquisições deste género são muito difíceis para os alunos, é conveniente rever todo o curso depois de exposto, voltando atrás à primeira página do primeiro capítulo.

No curso de álgebra, assente na intuição da recta numérica, os postulados de domínio de integridade, de corpo e de ordem dos números reais seriam aclarados explìcitamente. E então seria introduzido o conceito de número complexo. Polinómios e funções racionais seriam tratados no mesmo espírito.

Seguidamente deve introduzir-se o conceito de espaço vectorial a 2 e a 3 dimensões e a sua estrutura algébrica com produto interno, aplicando depois às funções trigonométricas e aos números complexos. Assim se pode evidenciar este carácter da álgebra moderna: uma estrutura algébrica é um padrão comum de vários objectos aparentemente diferentes.

No último grau deveriam introduzir-se elementos de análise matemática. Seria aconselhável, em minha opinião, insistir na intuição dos números reais, quando muito apresentando o axioma de ARQUIMEDES e o axioma da continuidade sob a forma: uma sucessão monótona limitada de pontos tem um limite. Também é aconselhável conduzir o curso mais geomètricamente do que lògicamente. Mas é muito importante insistir nas discussões acerca de propriedades qualitativas, sem cair em meros cálculos técnicos. É absolutamente desejável introduzir equações diferenciais simples pelas quais se tem um exemplo de como a natureza pode ser expressa matemàticamente (Apêndice III).

Elementos de probabilidades e estatística seriam dados e com muito mais espírito matemático que presentemente. Este curso pode ser apontado como um dos melhores modelos de matemáticas aplicadas, que permite nomeadamente mostrar, se for exposto de modo insinuante, como é possível matematizar materiais toscos.

III. Curso preparatório universitário («College level»).

Os assuntos principais a este nível seriam ainda análise matemática (cálculo integral e diferencial, equações diferenciais), geometria analítica e álgebra linear. Naturalmente, todos estes assuntos seriam um tanto modernizados.

I. Análise matemática.

É de esperar que elementos de análise (de uma variável) tenham sido adquiridos, ainda que numa base intuitiva, na «high school» (11.º e 12.º graus do ensino secundário). Entrar-se-ia agora numa formulação mais exacta mas, de um modo geral, ter-se-ia sempre presente que o pensamento geométrico nunca deveria ser enfraquecido, antes reforçado por esta formulação exacta, no processamento de raciocínios rigorosos. É neste sentido, penso eu, que uma noção topológica como a de vizinhança deveria antepor-se à representação formal (ε, δ), porque a primeira é mais qualitativa e natural. Assim, é recomendável começar este curso pelo cálculo diferencial de funções de duas variáveis, definindo com rigor os conceitos fundamentais, do ponto de vista do espaço métrico. Só então, regressando ao caso de uma variável, estudar-se-ia o desenvolvimento da função em série de potências (aqui pôr-se-ia em destaque o carácter de «analiticidade», penso eu).

No curso de cálculo integral poderia ser nocivo tratar com precisão exagerada os exemplos patológicos. É desejável aplicar a diferenciação exterior (em relação com a álgebra exterior no curso de álgebra) aos integrais múltiplos.

Pensamento geométrico e consideração das propriedades qualitativas deviam ser encorajados através de todo o curso, especialmente na parte que trata as equações diferenciais. Um exercício aturado na resolução de equações não seria tão importante. Seria desejável também um mais estreito contacto com a mecânica analítica.

II. Geometria e Álgebra.

Para começar conviria retomar «polinómios e equações», domínios de integridade dos inteiros e dos polinómios e equação de DIOFANTO. Depois os corpos dos números racionais e das funções racionais, como corpos quocientes dos domínios de integridade respectivos. Relativamente às equações de GAUSS citar-se-ia sem demonstração o teorema fundamental. Seria demonstrado o teorema fundamental sobre funções simétricas. Aqui recomenda-se introduzir a composição de permutações e depois o grupo simétrico.

Retomando o espaço vectorial ensinado na escola secundária, tratar primeiramente a dependência linear, equações de planos, ortogonalidade, etc., e tratar depois as transformações lineares no espaço a três dimensões. Aqui deveriam introduzir-se matrizes e representação de transformações lineares sob forma matricial.

Seguidamente introduzir-se-ia a álgebra exterior de dimensão dois e três relacionando com as noções de área e volume, generalizando depois ao caso da dimensão n. Definir-se-ia determinante utilizando a álgebra exterior.

Após esta parte introdutória seria abordada a construção do espaço vectorial de dimensão n e do espaço euclidiano. Seria também estudada a redução das formas quadráticas (matriz simétrica).

Para cultivar o pensamento geométrico deveriam introduzir-se elementos de geometria diferencial, nomeadamente o referencial móvel e rotações infinitesimais do ponto de vista dos grupos e álgebras de LIE.

Além destes cursos principais deveriam ministrar-se os cursos de opção seguintes.

III. Teoria das probabilidades e estatística.

(Ver apêndice).

IV. Análise numérica.

(Ver Student's European Record Booklet, pág. 24).

V. Espaços funcionais.

(Ver Student's European Record Booklet, pág. 30).

VI. Noções básicas.

Grupo, anel, corpo, teoria da representação, topologia geral.
(Ver Student's European Record Booklet, pág. 26).

IV. Curso universitário.

Cada secção, de física, de química, etc., pode ter, se for necessário, cursos especiais de matemática aplicada, ministrados por professores de cada especialidade, tendo em vista as aplicações práticas. Mas além destes cursos especiais é indispensável um curso de matemáticas gerais, que seria dado por professores de matemática.

Este curso geral compreenderia pelo menos a análise funcional superior (espaços funcionais, equações diferenciais, cálculo de variações, distribuições), teoria das probabilidades a nível também superior e análise numérica. O programa das lições normalmente deveria ser decidido por cada professor, pelo que não é necessário resumi-lo aqui.

V. Ensino para técnicos.

(i) *Técnicos sem curso preparatório.*

Além do curso geral secundário, omitindo algumas partes dos últimos graus, se fosse necessário, estudariam elementos de álgebra linear (incluindo matrizes e determinantes), e elementos de análise numérica (incluindo exercícios práticos de computadores).

(ii) *Técnicos de formação universitária.*

(*a*) Técnicos de engenharia:
Tal como foi descrito em III e IV.

(*b*) Técnicos de ciências sociais.

Cada curso de análise, geometria e álgebra referido em III poderá ser dado com caracter intuitivo. Como alternativa poderia dar-se a preferência a um curso de probabilidades e estatística (apêndice I).

É também desejável que haja um curso sobre computadores, incluindo exercícios práticos.

VI. Preparação de professores.

Os professores das escolas secundárias (dos graus 9.º a 12.º especialmente) deveriam ser de formação universitária.

O aluno destinado a professor daqueles graus de ensino secundário estudaria na universidade os seguintes cursos, além do de matemáticas gerais:

1. Conceitos fundamentais da matemática
2. História do pensamento matemático
3. Psicologia da aprendizagem e da invenção.

1. *Conceitos fundamentais da matemática.* (apêndice 2)

É indispensável que compreendam claramente a distinção entre axiomáticas categóricas e não categóricas.

Para isso é muito apropriado construir os números naturais pelos axiomas de PEANO e obter, por extensão, os números inteiros, os números racionais e os números reais. Assim se expõe um modelo de axiomática categórica e se evidencia a firme fundamentação dos números reais.

Demais, no processo de extensão dos números naturais aos inteiros e dos inteiros aos racionais procede-se à construção não-categórica de um grupo a partir de um semi-grupo.

No processo de construção dos números reais por meio de cortes nos números racionais podemos introduzir noções fundamentais de topologia.

Após esta construção de um sistema categórico de números tratar-se-iam os polinómios comutativos (ou livres), destacando o carácter não-categórico dos axiomas do domínio de integridade. Utilizando homomorfismos de aneis introduzir-se-iam aneis e corpos-quocientes. Assim se obtem um corpo de característica p por um lado e a extensão algébrica de um corpo, por outro.

Como corolário temos o corpo dos números complexos, com respeito aos quais é aconselhável examinar a impossibilidade de o tornar um corpo ordenado.

Seguidamente seria interessante aplicar a existência de um corpo com p^f elementos à prova da existência de um polinómio irredutível no corpo dos números racionais, para cada grau f dado. Este seria um bom exemplo de aplicação da teoria local (pensamento abstracto) à teoria global (problema clássico). E então, indagando se existe um polinómio irredutível de grau >1 no corpo dos números complexos, obtem-se o teorema fundamental de GAUSS sobre as equações.

A distinção entre axiomáticas categóricas e não-categóricas seria bem ilustrada também expondo os axiomas da geometria projectiva e da geometria euclidiana. Seria muito instrutivo confrontar as geometrias euclidiana e não-euclidianas.

2. *História do pensamento matemático.*

Para uma sã e perfeita educação matemática é extremamente desejável que os professores tenham um bom conhecimento de como o pensamento matemático se desenvolveu através da história.

É muito importante saber como a matemática se desenvolveu em relação com as outras ciências e como foi aplicada. É também importante apreciar o progresso da matemática em diferentes épocas, estudar as características da matemática surgida em cada época e as razões pelas quais essa matemática surgiu. De toda a maneira é absolutamente desejável que os professores obtenham uma boa perspectiva, ainda que resumida, da história da matemática. Isto não significa, de modo algum, que devam estudar em que ano foi descoberto tal ou tal teorema.

3. *Psicologia da aprendizagem e da invenção.*

É muito difícil encontrar um psicologista que tenha um conhecimento suficiente da matemática moderna. Mas quem não apreendeu o sentido da matemática moderna não pode encontrar solução para o problema psicológico actual da pedagogia da matemática e muito menos da invenção. Entretanto, o aspecto psicológico é naturalmente muito, muito importante no ensino da matemática.

Por conseguinte os professores de matemática devem estudar tais problemas por eles próprios, nas suas práticas de ensino futuras. Para isso é necessário facultar-lhes elementos de psicologia no âmbito aqui considerado, durante o seu curso. Mas deve notar-se bem que qualquer sucesso no estudo de tais problemas não pode ser obtido senão pela prática corrente de cada professor, guiado pelo sentido agudo da matemática moderna.

APÊNDICE I

Teoria das probabilidades e estatística (Curso preparatório universitário).

(Proposto pelo Prof. S. FURUYA em Setembro de 1964).

I. Curso de um ano.

1. *Estatística descritiva*

Dados estatísticos, curvas de frequência, ordem, mediana, média, dispersão, momentos, correlação, regressão.

2. *Probabilidade*

Combinações e permutações, probabilidade, probabilidade condicional, teorema de BAYES, população, números aleatórios, amostragem aleatória.

3. *Funções de distribuição*

Caso discreto, caso contínuo, variáveis aleatórias, distribuições multivariadas, momentos, distribuições binomial e de POISSON, distribuição normal.

4. *Distribuições de amostragem*

Estatística, distribuição da média (da amostra), lei dos grandes números, teorema limite central, distribuições t e F.

5. *Inferência estatística*

Testes de hipótese estatística, estimativas pontuais e por intervalos, máxima verosimilhança, testes χ^2, uso das distribuições t e F.

6. *Aplicações da inferência estatística*

Controle de qualidade, inspecção por amostragem, planeamento de experiências.

Enquanto que os aspectos respeitantes aos conceitos e às aplicações são tratados cuidadosamente, os teoremas mais difíceis são apresentados sem demonstração.

II. Curso de dois anos.

Primeiro ano (30 semanas, 2 horas por semana).

1. *Introdução*

Combinações e permutações, fórmula do binómio, fórmula de STIRLING.

2. *Espaço das amostras*

Exemplos, acontecimentos, probabilidade, definições e regras.

3. *Problemas combinatórios*

Subpopulações e partições, problemas de ocupação, sequências, passeios ao acaso, lançamentos de moeda, lei do arc sen.

4. *Intersecção de acontecimentos, probabilidade condicional*

União de acontecimentos, aplicações, probabilidade condicional, independência, modelos de urnas, regra de BAYES, tiragens repetidas, amostragem com e sem reposição.

5. *Distribuições*

Distribuições binómia e de POISSON, distribuição multinómia, distribuição normal, teorema limite central.

6. *Variáveis aleatórias*

Média, variância, covariância, exemplos e aplicações, desigualdade de TCHEBYCHEV, lei dos grandes números.

7. *Variáveis (aleatórias) inteiras, funções geradoras*

Convoluções, desenvolvimento em fracções simples, distribuições compostas.

8. *Acontecimentos recorrentes*

Definições, exemplos, equações de renovação.

9. *Cadeias de Markov*

Definições, exemplos, classificação de estados.

10. *Elementos de teoria da informação*

Entropia, teorema de codificação.

Segundo ano (30 semanas, 2 horas por semana).

1. *Distribuições contínuas*

2. *Distribuições de amostragem*

Estatística, distribuição da média da amostra, distribuições t, x^2 e F, aplicações.

3. *Inferência estatística*

Testes de significância para parâmetros, testes χ^2, testes de bondade de ajustamento, estimativas, eficiência, método da máxima verosimilhança, intervalos de confiança.

4. *Aplicações*

Análise de variância, controle estatístico de qualidade, inspecção por amostragem, método de Monte-Carlo.

5. *Jogos (de duas pessoas)*

Definições, estratégias pura e mista, valor de um jogo, estratégias óptimas, teorema minimax, solução extrema.

6. *Programação linear*

Exemplos, método do simplex, caso degenerado, teorema de dualidade, relação entre jogos e programação linear, problemas de transporte, fluxos em circuitos.

APÊNDICE II

Conceitos fundamentais (Curso preparatório universitário e curso de preparação de professores).

(Sistemas de números, por S. LYANAGA e Y. AKISUKI, Setembro de 1964).

1. *Conjuntos e aplicações*

Conjuntos, subconjuntos, reunião e intersecção, produto cartesiano de dois conjuntos, aplicações, injecções, sobrejecções e bijecções.

2. *Números naturais*

Axiomas de PEANO, noções de grupo (comutativo) ordenado, semi-grupo e semi-anel, N como semi-anel comutativo.

3. *Inteiros*

Extensão de um semi-grupo (semi-anel) comutativo, com lei do corte, a um grupo (anel) comutativo.
Noções de grupo, anel e domínio de integridade (ordenados, comutativos).
Z como domínio de integridade ordenado e comutativo.

4. *Números racionais*

Extensão de um domínio de integridade comutativo a um corpo comutativo.
Noção de corpo (ordenado, comutativo).
Q como corpo ordenado (comutativo).

5. *Teoria elementar dos números*

Noção de ideal em aneis comutativos.
Teorema fundamental da teoria elementar dos números.
Z_p como corpo finito.

6. *Extensões de corpos*

Anel dos polinómios numa variável sobre um corpo.
Analogia com Z.
Polinómios irredutíveis.
Corpo de decomposição de um polinómio.
Existência de polinómio irredutível de grau dado sobre Z_p e Q.

7. *Números reais*

Topologia de Q (Noções topológicas: conjuntos abertos e fechados, pontos interiores e exteriores a um conjunto, fronteira, aplicações contínuas, conexão, compacidade e compacidade local).
Não-conexão e não-compacidade local de Q.
Completação de Q em R.
Densidade de Q em R.
Conexão e compacidade local de R.

8. *Números complexos*

Teorema fundamental da álgebra.

9. Polinómios livres, existência de álgebras de GRASSMANN, álgebras de GRASSMANN.

10. Z^n e grupos geradores abelianos finitos.

11. R^n como espaço métrico completo.
Noção de espaço métrico (completo).

APÊNDICE III

Conceito de função no ensino secundário (11.º e 12.º graus).
Função exponencial.

Na «high school» (11.º e 12.º graus) o conceito de função seria introduzido como uma aplicação $f: x \to f(x)$. No princípio deve ser dito que esta aplicação pode ser definida analìticamente por uma expressão analítica em x, geomètricamente por uma curva (gráfico), ou por uma certa regra (relação funcional).

As funções trigonométricas (seno e coseno) seriam definidas como aplicações de pontos da circunferência unidade na recta real.

É recomendável, em minha opinião, introduzir a função exponencial como uma aplicação contínua que faz corresponder a multiplicação à adição. Porque segundo esta definição pode-se compreender a razão pela qual a função exponencial deve ser considerada a mais importante função elementar. Além disso, se admitirmos a existência da função, podemos estabelecer fácil e naturalmente a lei dos expoentes. Põe-se também muito naturalmente o problema de saber se uma tal função existe, nomeadamente o problema da existência no sentido moderno. E pode-se demonstrar a existência compreensivamente com base no axioma da continuidade sob a forma: uma sucessão monótona limitada tem um limite.

Ainda com respeito à função exponencial, é desejável que se estude a sua convexidade, podendo assim o estudo incidir nas propriedades qualitativas. Posteriormente aplicar-se-ão estes resultados à diferenciação da função exponencial.