

L'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane (*)

Emma Castelnuovo
Scuole Media Tasso — Roma

I programmi attuali di matematica sono evidentemente il frutto di cambiamenti e di rimaneggiamenti che si sono succeduti ormai da un secolo: orari e direttive hanno avuto delle oscillazioni larghe e frequenti in principio, piccole e lente da quasi quaranta anni. Ma le acque non sono tranquille: commissioni ministeriali, inchieste fra il corpo insegnante e le associazioni matematiche, congressi, articoli in riviste specifiche e anche in giornali quotidiani rivelano inquietudini e scontento nella scuola e nella società.

Perchè, come avremo ancora occasione di dire in queste pagine, mai come oggi la società scolastica è cambiata così rapidamente, e la società lavorativa ci richiede ogni giorno di più degli elementi scientificamente preparati per occupare anche i più modesti posti d'impiego. E la scuola deve fare qualche cosa. Ma — ripeto —, fino ad oggi non vi sono sulla carta radicali cambiamenti. I risultati delle inchieste che si conducono sono ancora assai mediocri, e, a distanza di sessanta anni, sono proprio attuali per noi le parole pronunciate da JULES TANNERY a proposito dell'insegnamento francese: «De temps en temps des hommes

graves et compétents, très soucieux des intérêts sur lesquels ils sont consultés, se réunissent pour réviser et discuter les programmes, toujours avec l'intention de les alléger; ils arrivent à déplacer un alinéa, quelque fois à en supprimer ou en ajouter un autre» (1).

Ai nostri programmi sono premesse delle brevi direttive, delle indicazioni sul metodo da seguire, ma i metodi didattici potrebbero essere i più vari, liberi come siamo nella scuola italiana nella funzione del nostro esercizio, liberi nella scelta dei testi scolastici (che possono essere redatti da qualunque professore), liberi di farci un'idea del tutto personale della nostra missione fin dall'inizio dell'insegnamento, dato che la maggioranza delle Università non dà alcuna orientazione didattica ai giovani che si preparano a diventare professori di scuole secondarie.

D'altra parte, chiunque analizzi programmi, direttive e testi scolastici è colpito da alcuni orientamenti, tipici della scuola italiana; è proprio di questi che ci proponiamo di discutere. Divideremo questa relazione in tre parti:

- 1) l'insegnamento della geometria;
- 2) l'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra;
- 3) conclusioni.

(*) Questo articolo riproduce una comunicazione tenuta da EMMA CASTELNUOVO alle «Journées internationales pour l'enseignement des mathématiques» che hanno avuto luogo a Sèvres (Parigi) nel febbraio del 1955, comunicazione che fu pubblicata nella rivista «Il Centro», Firenze, aprile-maggio 1955.

(1) «Les mathématiques dans l'enseignement», Revue de Paris, 1900.

L'insegnamento della geometria

Un rapporto sull'insegnamento della geometria nelle nostre scuole non può fare a meno di portare l'attenzione sulla storia di questo insegnamento nel nostro paese e sull'influenza esercitata su tale insegnamento da parte di alcuni matematici. È di questo che mi propongo di parlare.

Geometria razionale

È ormai quasi un secolo che per l'insegnamento della geometria si segue in Italia la tradizione euclidea. Nel 1867, infatti, sotto l'influenza di matematici come CREMONA, BETTI e BRIOSCHI, si stabilì di abbandonare il corso geometrico-algebrico di LEGENDRE per seguire un insegnamento puramente sintetico sul modello degli «Elementi» di EUCLIDE. «I nostri ginnasi e licei — sono le parole di BRIOSCHI e CREMONA pronunciate nel 1869 — sono destinati a dare una cultura elevata, eccezionale. Importa che in essi i giovani apprendano a ragionare, a dimostrare, a dedurre: non giovano dunque i mezzi celeri nè i libri nei quali la geometria è mescolata con l'aritmetica e con l'algebra; l'EUCLIDE è veramente il testo che meglio serve a questi fini⁽¹⁾».

È proprio per l'influenza di questi matematici che negli ultimi trenta anni dell'800 si ebbe una fioritura di testi di geometria con questo indirizzo.

Le prime opere, per esempio quelle di SANNIA e D'OVIDIO (1869) e di FAIFOFER (1878), cominciavano con le nozioni generali di linea e superficie e fra queste fissavano con dei postulati la retta e il piano. Ma i risultati della critica dei principi fecero riconoscere che non era rigoroso partire da nozioni così generali, come la linea e la

superficie, che non si poteva definire. È appunto la critica dei principi che fece nascere dei testi scolastici, come quelli di VERONESE (1897) e di ENRIQUES-AMALDI (1903), in cui si parte dagli enti geometrici più semplici (il punto, la retta, il piano), assunti come enti primitivi, e, dopo averne fissato il significato con degli opportuni postulati, si procede alla costruzione e allo studio di enti meno semplici.

Le differenze che si notano fra un testo e l'altro, tutti dei veri modelli di rigore, si devono alla diversa trattazione di alcuni capitoli. Per esempio, per quanto riguarda l'uguaglianza, vi sono degli autori (ENRIQUES-AMALDI) che, sempre seguendo il trattato euclideo, ne precisano l'esposizione «illuminandolo con delle osservazioni intuitive in cui viene fatto largo uso del movimento»⁽²⁾; altri invece (SEVERI, 1926) preferiscono introdurre il movimento in tutta la sua generalità come corrispondenza fra i piani o gli spazi.

Abbiamo voluto dare sia pur brevemente un'idea delle preoccupazioni che da parecchie decine di anni hanno gli autori dei testi di geometria razionale. Il problema non sembra ancora oggi quello di cambiar di metodo ma quello di trattare questo o quel capitolo seguendo l'uno o l'altro indirizzo, cercando sempre di conciliare un'esposizione rigorosamente deduttiva con l'intuizione psicologica dell'ente o della proprietà introdotta.

Si deve insomma riconoscere che non molto è stato cambiato dalla fine del secolo scorso; fra i testi di geometria razionale recentemente pubblicati molti si sono ispirati ai due classici: quello di ENRIQUES-AMALDI e quello di SEVERI.

(2) F. ENRIQUES: «Les modifications essentielles de l'enseignement mathématique dans les principaux pays depuis 1910». L'enseignement mathématique, Genève, 1929, pag. 16.

(1) Giornale di Matematiche, 1869.

La geometria intuitiva

Tuttavia, in questo regime di rigore a cui si è ispirato da tempo l'insegnamento della geometria in Italia, vi è qualcosa che colpisce l'attenzione di chi esamina i programmi, anche quelli della fine del secolo scorso. Infatti, nel 1881, in un'epoca cioè in cui si guardava più dalla parte della cattedra che da quella dei banchi, più al maestro che all'allievo, in un'epoca in cui si considerava più la materia in sé che il modo di rendere accessibile questa materia ai ragazzi, si comprese che un insegnamento euclideo non era indicato per la prima adolescenza. Una legge del 1881 prescrive di dividere l'insegnamento della geometria in due cicli: un primo ciclo di tre anni (cioè per i bambini dagli 11 ai 14 anni) dedicato alla geometria sperimentale o costruttiva o intuitiva (quest'ultima denominazione è quella del 1881 ed è l'attuale) e un secondo ciclo in cui si segue l'indirizzo euclideo.

L'insegnamento della geometria intuitiva risale dunque in Italia a circa 80 anni fa.

Ma l'influenza delle disposizioni primitive di Cremona era così grande che anche i testi di geometria intuitiva seguirono e seguono generalmente anche ora la linea euclidea, senza fermarsi sulle dimostrazioni, senza spiegare agli allievi il collegamento dei teoremi e il perchè della linea seguita, e dando invece una grande importanza alla parte sperimentale.

Vi sono oggi due tendenze opposte nei riguardi di questo insegnamento: l'una vorrebbe smorzare il più possibile il salto fra l'intuitivo e il razionale sostituendo i due cicli con un unico corso in cui venga ad attuarsi a poco a poco la progressività del rigore matematico; l'altra tendenza invece vorrebbe staccarsi decisamente dalla linea tradizionale sottolineando sempre di più la differenza fra i due cicli.

Vi sono evidentemente più modi per

sviluppare un primo insegnamento della geometria senza attenersi alla linea euclidea: quello che seguiamo personalmente fa ripercorrere al bambino, a grandi linee, lo sviluppo delle idee matematiche nel corso della storia, una storia della matematica non nel senso di cronaca ma un succedersi dei principali argomenti di geometria secondo un certo ordine reso necessario da una logica degli avvenimenti; potremo in breve chiamarla una storia sociale della geometria. Questo metodo, che viene sperimentato da una decina di anni da alcuni insegnanti, rende la classe di geometria una vera fucina d'attività e dà al bambino, con l'inquietudine della ricerca e la gioia della scoperta, il vero senso del coraggio intellettuale.

Qualche considerazione sull'insegnamento della geometria razionale

Abbiamo esposto finora, per l'insegnamento della geometria razionale, il metodo freddo che viene dalla lettura dei programmi, delle direttive, dei testi scolastici. Ma anche i libri nascondono sempre qualche cosa di vivo e di umano.

Chercherò di rompere questa barriera facendovi entrare in una classe: vi farete allora l'idea di un altro metodo che è dovuto all'influenza esercitata nell'ambiente scolastico da FEDERIGO ENRIQUES. L'influenza che questo matematico ha avuto ed ha ancora nelle nostre scuole non è dovuta solamente ai suoi testi scolastici, fra i quali gli «Elementi di geometria», di cui abbiamo ora parlato. Abbiamo detto che ha voluto dare con questa opera un modello di perfezione logica; questo trattato ha un carattere deduttivo, dunque statico. Si sono prese alla lettera le parole di BRIOSCHI e CREMONA «ciò che importa di più è che i giovani apprendano a ragionare, a dimostrare, a dedurre».

Ora, questo indirizzo statico non era certo nelle idee di ENRIQUES; ENRIQUES che nei suoi lavori riguardanti sia la storia della matematica che la critica dei principi, o nelle sue opere di pura matematica, come la «Teoria geometrica delle equazioni», scriveva: «Alla base delle aspirazioni puriste resta l'antico modello classico del trattato che si riattacca alla venerabile tradizione dell'EUCLIDE: l'idea di una scienza razionale logicamente ordinata come teoria deduttiva, che debba apparire in ogni sua parte chiusa e perfetta, che discendendo dai concetti più generali alle applicazioni particolari, respinga da sè le incerte e mutevoli suggestioni del concreto, tutto quanto ricordi il passato oscuro della ricerca o scopra nuove difficoltà, rompendo l'armonia del sistema.

Ma questo ideale del sistema contrasta d'altra parte colla generale filosofia della scienza, frutto della critica moderna. Infatti la critica logica e gnoseologica..., approfondendo la veduta della scienza nel suo divenire, oltrepassa l'opposizione fra metodo deduttivo e metodo induttivo, giungendo a considerare la deduzione stessa come fase di un processo unico che sale dal particolare al generale per ridiscendere al particolare...

La comprensione storica della scienza mira a scoprire nel possesso l'acquisto, e si vale di quello per chiarire il cammino dell'idea, e concepisce questo come prolungantesi oltre ogni limite provvisoriamente raggiunto⁽¹⁾.

Per ENRIQUES questo metodo era non solo ricco di conseguenze nella ricerca pura ma anche suscitatore di entusiasmi in un insegnamento di qualunque grado. Questo metodo conduceva a darsi una ragione dello sviluppo storico della matematica, a comprendere gli errori classici, a mettere in luce i problemi non risolti e quelli non risolubili con gli

elementi e le premesse che erano invece sufficienti alla chiarificazione e alla risoluzione di problemi più semplici. Il numero degli elementi e delle premesse doveva allargarsi, eravamo obbligati ad allargare questo numero se volevamo risolvere quei tali problemi. Questo continuo ampliarsi del mondo matematico, questa considerazione della scienza nella sua evoluzione e non nella sua verità statica, questo desiderio vivo e continuo verso la ricerca, ENRIQUES l'ha trasmesso con le sue opere di storia e di critica non solo ai suoi allievi diretti ma anche a dei maestri che non l'hanno mai conosciuto, alla Scuola italiana tutta.

Sotto l'influenza di FEDERIGO ENRIQUES qualche professore, invece di seguire il testo di geometria mettendo in evidenza la perfezione logica e l'armonia delle connessioni, interpreta i diversi argomenti come una fase della scienza in divenire e quei postulati come delle premesse di quella particolare costruzione.

La libertà d'insegnamento di cui si gode in Italia fa sì che si possono avere nella stessa scuola due corsi paralleli di geometria, affidati ciascuno ad un professore, che risultano molto diversi l'uno dall'altro: due concezioni opposte che, tenendo conto dello sviluppo psicologico del bambino, danno luogo a due corsi di geometria intuitiva; e due concezioni opposte che, riattaccandosi alla filosofia della scienza, danno luogo a due corsi di geometria razionale.

L'insegnamento dell'aritmetica e dell'algebra

Chi legge i nostri programmi di matematica è colpito dal fatto che l'insegnamento dell'aritmetica viene svolto solo nei primi due anni della «Scuola media», e non vi si ritorna, da un punto di vista razionale, nella maggior parte degli istituti.

(1) «Teoria geometrica delle equazioni», vol. I, Prefazione. Bologna, Edizione Zanichelli, 1915.

L'insegnamento dell'aritmetica ha dunque un carattere del tutto pratico data l'età degli allievi; questo insegnamento dovrebbe dare una visione generale delle applicazioni della matematica nei campi più vari, portando il bambino a riflettere sulla vita di ogni giorno a casa, negli uffici, nelle fabbriche, e dandogli un'idea, sia pur modesta e vaga, della vita dei laboratori scientifici dove la prima osservazione qualitativa si traduce poi in dati quantitativi, si traduce «nel numero». Un corso d'aritmetica, dovrebbe dare poi, sia pur da un punto di vista molto elementare, un'idea dell'estensione del concetto di numero, e far rivivere le crisi attraversate dall'umanità nel passaggio da numero intero a numero frazionario, a numero irrazionale.

Ma, come abbiamo detto prima, non esiste un secondo corso di aritmetica, un corso cioè in cui la materia venga riordinata da un punto di vista razionale, mettendo in luce il valore costruttivo delle proprietà formali. È solo nell'Istituto Magistrale (l'istituto per formare i maestri elementari) che lo studio dell'aritmetica viene ripreso sotto il nome di aritmetica razionale; ma, allora, numeri interi, frazioni e loro operazioni sono analizzati soprattutto da un punto di vista didattico, facendo considerare ai giovani le varie metodologie che potranno applicare un giorno quando diverranno insegnanti di scuola elementare.

Algebra

Da una ventina di anni l'insegnamento dell'algebra si svolge in due cicli, come quello della geometria. Il primo ciclo ha la durata di un anno (la terza classe della Scuola media) ed è dedicato a dei ragazzi di 13 anni.

Nell'idea dei legislatori questo primo ciclo aveva un significato ben preciso: si voleva dare agli allievi che terminano i loro studi

dopo le tre classi della scuola media uno strumento per la risoluzione di problemi pratici di 1.° grado; si voleva anche che qualche elemento di calcolo letterale portasse i ragazzi a comprendere l'importanza della costruzione di formole generali.

Bisogna però confessare che questo indirizzo non è generalmente seguito nell'insegnamento; ciò è dovuto al fatto che gli autori dei libri di testo di questo primo corso di algebra si sono attenuti strettamente allo spirito che informa i libri di algebra dei corsi superiori, e hanno quindi riprodotto in forma abbreviata e semplificata i testi dei licei.

Nelle classi superiori il fine dell'insegnamento dell'algebra è la «messa in equazione», cioè la traduzione in termini algebrici dei problemi più vari di 1.° e 2.° grado. Questo studio ha dunque un carattere statico. Prima di arrivare alla messa in equazione viene svolto un insegnamento molto particolareggiato di calcolo letterale, dando forse qualche volta all'allievo l'impressione che tutta l'algebra consista nello sviluppo algebrico. Per conseguenza, tale insegnamento è spesso assai freddo, il «meccanismo» non potendo portare nè calore nè vita.

Analisi

Un'altra cosa che colpisce l'attenzione del lettore dei nostri programmi è che i concetti fondamentali dell'analisi (limite, derivata, integrale) sono trattati oggi solamente in due ordini di scuole: il Liceo Scientifico e l'Istituto Tecnico Industriale.

L'insegnamento dell'analisi in queste scuole risale a una cinquantina di anni fa; si era introdotto questo insegnamento sia al fine di dare rilievo alle relazioni fra i diversi rami della matematica, sia allo scopo di far cadere le barriere fra matematiche elementari e matematiche superiori. Ma bisogna riconoscere che questo corso di analisi si stacca in

modo assai netto dal precedente corso di algebra, il fine dell'insegnamento dell'algebra essendo solamente — come abbiamo detto — la «messa in equazione». Per realizzare una continuità fra i due corsi bisognerebbe mettere a base del corso di algebra il concetto di funzione, idea che dei matematici, fra i quali ENRIQUES, avevano suggerito da molto tempo, e che avrebbe reso questo studio più vivo e reale.

Ora, è proprio qui un punto delicato che divide i matematici: ve ne è ancora un certo numero — a dir vero sempre più esiguo — che sostiene che un insegnamento della matematica è tanto più formativo quanto più è sintetico, e che non è quindi opportuno mettere nelle mani degli allievi uno «strumento» che permetta di risolvere i problemi con i metodi generali dell'analisi.

Ma bisogna confessare che queste idee che potevano essere discutibili e forse apprezzabili fino a qualche decina di anni fa non si possono più ammettere ai giorni nostri quando le grandiose scoperte nel campo della fisica e della tecnica trascinano anche le persone meno colte a interessarsi dei lavori scientifici e quindi di matematica. E il giovane, tenuto lontano dalle matematiche del Rinascimento, dà l'impressione dell'artigiano che si applica da solo a un'opera di cesello quando, vicino, il rumore delle fabbriche attesta il lavoro e il progresso della comunità.

Si deve però anche riconoscere che non potremo attuare un ampliamento di programmi fino a che l'orario per il corso di matematica nelle scuole secondarie sarà così limitato.

Conclusione

Cercherò di riassumere quanto ho espresso nei riguardi dell'insegnamento dell'algebra e della geometria con delle considerazioni di

carattere generale sull'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie italiane.

Vorrei far cogliere il senso della classe di matematica nel liceo classico e in quello scientifico dando una veduta d'insieme che ha per centro non il maestro ma l'allievo.

In generale la matematica appare all'allievo del liceo classico alla fine dei suoi studi secondari come una disciplina con la quale ha appreso, secondo le parole di Brioschi e Cremona, a «ragionare, a dimostrare, a dedurre» sulle delle questioni così strettamente legate fra loro in modo deduttivo che la sua curiosità è del tutto soddisfatta. Il giovane non ha dei problemi nei riguardi del suo corso di matematica.

Per avere una veduta d'insieme della situazione voglio darvi un esempio di tutt'altro genere: il giovane, alla fine del liceo classico, prova la stessa impressione che si ha guardando la facciata del Palazzo Farnese a Roma (quel palazzo del Rinascimento dell'inizio del sedicesimo secolo dove ha sede l'Ambasciata di Francia). Questo palazzo, con le sue linee severe e misurate, dà una profonda sensazione di calma e di serenità; e gli importanti rapporti matematici ai quali si deve appunto questa armonia, il lavoro d'idee e di studi che vi si nascondono, sfuggono a coloro che guardano la facciata, proprio per il fatto che è troppo equilibrata. Sembra che non sia possibile costruire nulla di più perfetto.

Invece, il mondo matematico dell'allievo alla fine del liceo scientifico è molto più esteso, e ricche sono le connessioni ch'egli intravede, ma alla sua mente troppo forzata a cogliere i dettagli sfugge forse la vera essenza della materia studiata.

Per FARVI entrare nello spirito di questo giovane alla fine del suo corso di studi secondari continuerò con la mia analogia di prima facendovi pensare ad un altro palazzo di Roma: la Villa Medici (quel palazzo dell'inizio del diciassettesimo secolo dove ha

sede l'Accademia di Francia). Qui, in questo palazzo, l'austera solennità delle linee è mitigata, non accresciuta, dalla costruzione di due torri che dominano la facciata; perchè queste torri non sono armoniosamente inserite al resto della costruzione. Inoltre l'attenzione di chi guarda è attirata più dalle sculture e dai bassorilievi, che in gran numero ornano la facciata, che dall'insieme: l'occhio si sperde nei dettagli e non riesce a sintetizzare.

Tornando all'insegnamento della matematica dei licei scientifici si comprende come sarebbe essenziale, almeno nell'ultimo anno del corso, un lavoro di sistemazione della materia, lavoro che dovrebbe essere dato con la visione unificatrice offerta dalle matematiche moderne.

Comunque, fino ad oggi, per le tendenze letterarie e storiche che formano per tradizione la caratteristica della cultura italiana, il liceo che sembra avere più qualità formative appare ancora il liceo classico.

Ma, troppo spesso, legati come siamo alla tradizione, se si deve parlare di metodi d'insegnamento, si considerano più i licei delle scuole tecniche. Si deve riconoscere che da noi l'insegnamento della matematica in questo tipo di scuole è svolto da un punto di vista troppo astratto, mettendo in primo piano la struttura deduttiva della geometria e poco fermandosi sulle applicazioni concrete, tanto che la differenza di metodologia con i corsi liceali non è grande. L'esigenza che si nota oggi in questo genere di scuole era stata sottolineata vigorosamente dal matematico GUIDO CASTELNUOVO, già nel 1912: «Se le attitudini del giovane lo portano verso le questioni concrete, egli si ribellerà contro l'eccessivo spirito astratto dei nostri corsi, e non comprenderà l'interesse di una teoria finchè non ne avrà vista qualche pratica conseguenza. Ora è questo il torto precipuo dello spirito dottrinario che invade la nostra scuola. Noi vi insegniamo a diffidare dell'ap-

prossimazione, che è realtà, per adorare l'idolo di una perfezione che è illusione» (1).

Queste parole, pronunciate una cinquantina di anni fa, hanno trovato un ambiente che era allora poco maturo per comprenderle. Oggi queste parole sono ascoltate, ripetute, commentate; non si vuole — si sostiene dovunque nell'ambiente tecnico — che la scienza divenga sempre più aristocratica e che essa faccia astrazione dal lavoro dell'uomo: perchè è lì, nel lavoro umano, che essa trova la sua concretizzazione e, divenendo accessibile a tutti, può accrescere la sua forza e la sua vitalità.

Abbiamo detto all'inizio della relazione che la quasi immobilità dei nostri programmi non significa certo la soddisfazione della Scuola e della Società Italiana.

Infatti, oggi come mai, l'insegnamento matematico e in generale tutto l'insegnamento scientifico nelle scuole secondarie è in crisi in Italia: il contrasto fra il progresso scientifico e le nuove condizioni della società da una parte e, dall'altra, la tradizione culturale che è da noi prevalentemente letteraria, vuole essere attenuato. La società chiede oggi un giusto equilibrio fra gli insegnamenti letterari, filosofici, scientifici; ma la società chiede anche che, proprio col mezzo dell'insegnamento della matematica, la scuola s'inserisca nella vita del paese e che la vita entri nella scuola. E noi siamo convinti personalmente che questo equilibrio e queste aspirazioni sono troppo sentite perchè siano lontane da essere realizzate.

Emma Castelnuovo

(1) «La scuola nei suoi rapporti colla vita e colla scienza moderna»; Atti del III Congresso della Mathesis, 1912.