PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

SECÇÃO ELEMENTAR

3822 — Considere um triângulo equilátero $[ABC]$ de lado a. Sejam Q um ponto do interior do $\overline{AB}$ tal que $\overline{QA} = a:n$, e P um ponto do prolongamento de $\overline{BC}$ de modo que C fica entre B e P e tal que $\overline{CP} = a$. Seja ainda R o ponto de encontro das rectas $\overline{AC}$ e $\overline{PQ}$. Calcule a área do quadrilátero $[QRCB]$.

3823 — Verificar a identidade

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

SECÇÃO MÉDIA

3824 — Prove que é $\operatorname{sen} x > \frac{2x}{\pi}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3825 — O número de números de FIBONACCI compreendidos entre n e $2n$, é ou 1 ou 2.

Resoluções dos problemas do concurso propostos no n.º 55

3669 — (N.º errado 3650). Apresentaram soluções correctas os Srs. Fernando de Jesus e Vinha Novais, publicando-se a deste último:

R: *Seja* P *o ponto médio do lado* BC; O *o ponto médio de* AP *e* Q *o ponto de intersecção de* $r \equiv CO$ *com* AB. *Pelo vértice* B *tracemos* $r'//r$; *seja* R *o ponto de intersecção de* r' *com* AP. *Os triângulos* BRP *e* COP *são iguais* $(CP = BP, \sphericalangle B = \sphericalangle B, \sphericalangle BPR \sphericalangle CPO)$ *e, portanto,* $RP = OP$; *mas* $OP = OA$ *(hipótese) e portanto* $OA/OR = 1/2$. *Por outro lado tem-se* $AO/OR = AQ/QB$. *Atendendo a estas duas relações vem* $AQ/QB = 1/2$.

3670 — (3651). Apresentou solução correcta o Sr. Vinha Novais a qual se publica:

R: *Do simples exame da equação dada resulta que o ponto* $P_1\,(x=3, \mu=0)$ *é comum a todas as circunferências da família dada. Notando agora que o lugar geométrico dos centros dessas circunferências é uma recta de equação* $r \equiv \mu = \varphi + \frac{1}{2}$, *as circunferências passarão igualmente pelo ponto* P_2 *simétrico de* P_1 *em relação a* r. *Determinando as coordenadas desse ponto obtém-se* $P_2\left(\varphi = -\frac{1}{2}, y = \frac{7}{2}\right)$. *Não poderá haver mais pontos comuns pois três pontos determinam uma circunferência e uma só.*

3671 — (3652) Não foram apresentadas soluções.

3672 — (3653) Não foram apresentadas soluções.

3673 — (3654) Apresentou solução correcta que se publica, o Sr. Vinha Novais:

R: 1. *Da igualdade* $ab \cdot x = ba$ *resulta multiplicando à esquerda pelo inverso de* ab, $x = (ab)^{-1} \cdot ba = b^{-1}a^{-1}ba$; *multiplicando ambos os membros da igualdade* $y \cdot ab = ba$, *à direita por* $(ab)^{-1}$ *vem* $y = ba\,(ab)^{-1} = ba\,b^{-1}a^{-1}$. *Ficam assim determinados os comutadores do par* ab *e, portanto, demonstrada a sua existência.*

2. *Representemos por* x *e* y *os comutadores do par* $a^{-1}b^{-1}$; *então* $a^{-1}b^{-1} \cdot x = b^{-1}a^{-1}$ *e* $y\,a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. *Multiplicando a primeira igualdade à direita por* x^{-1} *e a segunda, à esquerda, por* y^{-1} *vem* $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1} \cdot x^{-1}$ *e* $a^{-1}b^{-1} = y^{-1}b^{-1}a^{-1}$, *o que mostra que o comutador à direita (esquerda) do par* $b^{-1}a^{-1}$ *é o elemento inverso do comutador à direita (esquerda) do par* $a^{-1}b^{-1}$.

3674 — (3655) Não foram apresentadas soluções.

Errata ao n.º 57 da G. M.: A resolução n.º 3781 deve ser 3651.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

104 — REIDT, WOLFF — **Die Elemente der Mathematik (Arithmetik, Algebra und Analysis),** Oberstufe-Bard 3, Hermann Schroedee Verlag, Hannover, 348 páginas (1953).

Contém este livro a matéria comummente ensinada nos últimos 3 anos dos liceus científicos alemães. Uma 1.ª parte («Problemas de Aritmética») trata de progressões aritméticas e geométricas e da teoria dos números (naturais, reais e complexos), construída com particular meticulosidade. Uma 2.ª parte («Algebra») é dedicada ao estudo de equações algébricas, especialmente à equação de 3.º grau (métodos numéricos e gráficos) e inclui mais dois capítulos, um sobre nomografia e outro sobre a fórmula do binómio. Em tudo o resto, trata-se de cálculo infinitesimal: depois de construída a teoria dos limites para sucessões e para funções, introduz-se o cálculo diferencial e em seguida o cálculo integral (para funções duma só variável); finalmente é feito um estudo das séries numéricas e das séries de potências.

Na orientação didáctica predomina o carácter intuitivo e genético, com abundância de evocações históricas (descurando por vezes a estruturação lógica).

O livro é ricamente provido de bons exercícios sobre todos os assuntos e apresenta-se com óptimo aspecto gráfico.

J. Sebastião e Silva.