ANO XIV – N.º 55 **GAZETA DE MATEMÁTICA** AGOSTO – 1953

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — Telef. 55282 — LISBOA-N

O verdadeiro sentido do princípio da invariância da física moderna

por **Ruy Luís Gomes**

É corrente apresentar a condição da invariância a que satisfazem todas as equações da Teoria da Relatividade Geral como alguma coisa de característico dessa teoria; alguma coisa que a distingue verdadeiramente da Física Clássica ou, num plano mais concreto, da Mecânica de GALILEU-NEWTON. E na base dessas considerações está sempre um raciocínio deste tipo.

A) As equações fundamentais da Mecânica de GALILEU-NEWTON

$$(1) \qquad m\,\frac{d^2 x^i}{dt^2} = F^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

só mantém esta forma quando as coordenadas x^i, t variam segundo o grupo de GALILEU

$$G \qquad \begin{cases} x^i = \sum \alpha_{ik}\, x'^k + \alpha_i\, t' + \beta_i \\ t = t' + \alpha_0 \end{cases}$$

no qual $\| \alpha_{ik} \|$ é uma matriz ortogonal, transformando-se ao mesmo tempo F^i de acordo com

$$F^i = \sum \alpha_{ik}\, F'^k$$

e ficando na mesma o coeficiente m, massa de inércia.

O grupo G corresponde, como se sabe, à passagem de um determinado sistema de coordenadas, onde são aquelas equações que traduzem o essencial das leis do movimento de um ponto material sob a acção de uma força, F^i, para qualquer outro, animado de uma translacção rectilínea e uniforme com relação ao primitivo.

Resulta daqui, isto é, da invariância das equações (1) em G, que só são *equivalentes* (1) *aqueles sistemas de coordenadas*, x^i, t e x'^k, t' *relacionados entre si segundo* G.

B) Pelo contrário, as equações da Relatividade Geral, nomeadamente as que traduzem as leis do movimento de uma partícula de massa infinitamente pequena (test particle) sob a acção de um campo de gravitação, quere dizer, as equações das geodésicas

$$(2) \qquad \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{ds}\,\frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

(de caracter-tempo (2)) da métrica fundamental

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4,$$

são invariantes para qualquer transformação do grupo

$$T \qquad x^\mu = \varphi_\mu\,(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4)$$

no qual φ_μ são quatro funções independentes, contínuas, com derivadas parciais (até à 2.ª ordem) das novas coordenadas x'^j.

E como consequência da invariância das equações (2) em T, tem-se: *equivalência de todos os sistemas de*

---

(1) Subentende-se para a tradução matemática das leis fundamentais da Mecânica Clássica.

(2) Tais que $\sum g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu < 0$, pois a velocidade de uma partícula material é inferior à da luz. Por outro lado, os $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ que ali coincidem com os símbolos de CHRISTOFFEL de 2.ª espécie, $\left\{ {\alpha\beta \atop \mu} \right\}$, da forma quadrática ds^2, transformam-se segundo

$$\Gamma'^{\nu}_{\rho\delta} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta}\,\Gamma^\mu_{\beta\alpha} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\rho\,\partial x'^\delta}.$$

quatro coordenadas obtidos uns dos outros por qualquer transformação de T.

Numa palavra — na Mecânica de GALILEU-NEWTON, invariância restricta, isto é, segundo o grupo restricto G; na Relatividade Geral, invariância ampla, isto é, segundo o grupo T que contém G como sub-grupo muito especial.

E para muitos Físicos, por exemplo, e ainda recentemente para SCHRÖDINGER (1), este princípio de invariância geral «incarna a ideia da Relatividade Geral».

No entanto, o mesmo autor, logo a seguir, acrescenta: «I will not commit myself to calling it unshakable. One has occasionally tried to generalize it, and it is difficult to say whether quantum physics might not at some time seriously dictate its generalization. However, the principle as it stands appears to be simpler than any generalization we might comtemplate and there seems to be no reason to depart from it at the outset.»

Ora, do nosso ponto de vista, as perspectivas de generalização do princípio em causa, que ressaltam tão claramente daquelas palavras, diminuem o valor da afirmação primeira — de que a invariância «incarna a ideia da Relatividade Geral». E só nos parece possível esclarecer o verdadeiro sentido do *princípio de invariância,* retomando o problema *ab initio*, por confronto das duas teorias — clássica e relativista — o que levará necessàriamente à conclusão oposta de que um tal princípio não contém nada de característico da Relatividade Geral. Ao mesmo tempo, a possibilidade de generalizações, sustentada por SCHRÖDINGER, não oferecerá nenhuma dificuldade de princípio.

Voltemos, então, às equações fundamentais (1) e (2); e para que as situações sejam de facto comparáveis, suponhamos que F^i são as componentes da força exercida sobre uma partícula de massa da inércia m num campo de gravitação.

Tem-se, então,

$$F^i = - m_g \; grad \; \Phi$$

designando por Φ o potencial (escalar) de gravitação e por m_g a massa ou carga da gravitação da partícula. E as equações (1) tomam a forma

$$(1') \qquad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - K \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

sendo $K = \dfrac{m_g}{m}$ — cociente da massa de gravitação pela massa da inércia — independente da natureza e massa m da partícula, quere dizer, uma *constante universal.*

(1) Space — Time Structure, ed. Cambridge University Press, 1950, p. 2.

É este sistema que devemos comparar com (2); e a conclusão a que chegámos acima formula-se assim:

«(1′) é invariante no grupo G, (2) no grupo T.»

Na parte comum, que é precisamente G, os dois sistemas de equações e portanto as duas teorias — clássica e relativista — comportam-se da mesma maneira, *são ambas invariantes.*

Este resultado pode parecer em flagrante contradição com uma das mais conhecidas propriedades da Teoria da Relatividade, logo na sua forma restricta.

Na verdade, todos sabem que a Relatividade Restrita admite como grupo da invariância não G mas sim L — grupo de LORENTZ —

$$L \qquad \begin{cases} x^i = \sum \alpha_{ik} x'^k + \alpha_{io} t' + \alpha_i \\ t = \sum \alpha_{ok} x'^k + \alpha_{oo} t' + \alpha_o , \end{cases}$$

cujos coeficientes estão ligados pelas equações

$$\sum \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} + \frac{\alpha_{io} \alpha_{jo}}{c^2}$$

$$\sum \alpha_{ik} \alpha_{ok} + \frac{\alpha_{io} \alpha_{oo}}{c^2} = 0, \qquad i, j, k, = 1, 2, 3$$

$$- c^2 \sum \alpha_{ok}^2 + \alpha_{oo}^2 = 1$$

Como desfazer, então, o aparente absurdo? Muito simplesmente — não esquecendo a diferença que há entre coordenadas matemáticas, puramente convencionais e coordenadas com autêntico significado físico.

Assim, se nos colocarmos na Mecânica Clássica e admitirmos que x^i, t são respectivamente distâncias euclideanas tais como as medíamos habitualmente com réguas e tempo medido por um relógio (1), então, só conservam esse mesmo significado físico as coordenadas x'^k, t' ligadas às primeiras por uma transformação do grupo G.

Pelo contrário, se nos colocarmos em Relatividade Restrita, só mantêm um tal significado físico, coordenadas x'^k, t' deduzidas de x^i, t por uma transformação de L (e não de G).

Mas se fizermos uma transformação G, isso, mesmo em Relatividade, continua a exprimir a passagem de um sistema de coordenadas para outro, ambos matemàticamente admissíveis, apenas haverá que salientar: dos dois sistemas só um, e nunca os dois, podem ter aquele mesmo significado físico natural (em termos de réguas e relógios).

Por outras palavras: ambas as teorias são invariantes segundo G; mas só numa, na Mecânica Clássica, é que G transforma entre si coordenadas com significado físico.

(1) Esse relógio é fundamentalmente o movimento da rotação da Terra.

Não há, portanto, absurdo algum. Além disso a resolução deste pseudo-absurdo é, só por si, uma indicação de que o princípio da invariância não contém em si mesmo nada de característico da Relatividade Geral, pois que, reduzidas as duas teorias a um denominador comum, que é G, são ambas invariantes. Mas podemos até alargar esse denominador comum, isto é, passar de G para um grupo mais amplo, inclusivé T, que nada de essencial se modificará.

De resto, nos cursos da Mecânica é corrente dar às equações fundamentais da Mecânica a forma chamada de Lagrange, de 2.ª espécie [1]

$$\frac{d^2 x'^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix} \right\}' \frac{dx'^\alpha}{ds} \frac{dx'^k}{ds} = Q^i$$

na qual $\left\{ \begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix} \right\}'$ são os símbolos de Cristoffel da 2.ª espécie da métrica

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum dx'^2 = \sum g_{ik}\, dx'^i\, dx'^k ,$$

forma essa invariante no grupo

$$T_1 \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^i = \varphi_i (x'^1, x'^2, x'^3) \\ t = t' + a \end{array} \right.$$

em que φ_i são três funções quaisquer, independentes contínuas e deriváveis; e os Q^i são os transformados por contravariância de $-K \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^i}$.

Ora, ambas as teorias são invariantes no grupo $T_1 \neq G$ de sentido matemático equivalente a G ou T mas que não conserva o significado físico das coordenadas nem numa teoria nem na outra.

E nenhuma dificuldade pode haver em escrever as equações (1) numa forma invariante com relação ao próprio grupo T mas o que acontecerá é que esse grupo mais amplo T nada acrescentará, do ponto de vista físico, nem numa teoria nem na outra, pois nesse domínio físico os grupos característicos são respectivamente G e L e não T.

Que fica, então, do princípio da invariância? A equivalência dos diferentes sistemas de quatro coordenadas, ligadas entre si pelo grupo T, para a descrição matemática das mesmas leis, sejam elas da Mecânica Clássica ou da Relatividade Geral.

[1] Como é salientado no artigo de Fock adiante citado.

Por outras palavras: como

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \sum \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \left[\frac{d^2 x'^\nu}{ds^2} + \right.$$
$$\left. + \Gamma'^\nu_{\rho\delta} \frac{dx'^\rho}{ds} \frac{dx'^\delta}{ds} \right],$$

se tivermos no sistema x^μ

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \tag{3}$$

será

$$\frac{d^2 x'^\nu}{ds^2} + \Gamma'^\nu_{\rho\delta} \frac{dx'^\rho}{ds} \frac{dx'^\delta}{ds} = 0, \tag{3'}$$

que tem a mesma forma geral (3), noutro qualquer sistema x'^ν, relacionado com x^μ por meio de T, visto ser $\neq 0$ o jacobiano dos x^μ em ordem aos x'^ν.

A invariância é, pois, e apenas, uma maneira sugestiva, clara, de patentear que as equações que traduzem as mesmas leis, nos diferentes sistemas de coordenadas ligadas por T, são todas *equivalentes entre si*.

Podemos dizer isto mesmo assim: *a invariância e uma condição suficiente de equivalência. Mas não constitue, de modo nenhum, uma condição necessária.*

Portanto, é possível, generalizar o princípio de invariância, como transparece daquela citação de Schrödinger; mas há de respeitar-se sempre, sob risco de absurdo, o princípio mais geral de equivalência das equações que descrevem a mesma lei em mais do que um sistema de coordenadas.

É neste mesmo sentido, perfeitamente delimitado, que se deve interpretar esta passagem de V. A. Fock: «Toute théorie physique — à moins d'être visiblement absurde — doit être covariante» [1].

Fica, assim, parece-nos, esclarecido nos termos precisos o verdadeiro valor do princípio da invariância que nada traduz de peculiar à Relatividade Geral. E ao mesmo tempo chama-se a atenção dos estudiosos da Física Moderna para a diferença, essa, sim, essencial, entre coordenadas ligadas entre si apenas por condições de correspondência biunívoca e contínua — coordenadas matemáticas — e coordenadas que, *além disso*, têm significação física. E este ponto é da maior importância para compreender a própria Relatividade Geral.

[1] Em — *Le système de Ptolomée et le système de Copernic à la lumière de la Théorie Général de la Relativité* (Questions Scientifiques, Physique, tome., 1 1952, pp. 151).

Covariância, no sentido aqui utilizado, coincide, no que respeita às equações em cada sistema de coordenadas, com *invariância de forma*.