Comité Nacional Francês de Matemáticas

Profs. J. Hadamard, Presidente de Honra; E. Borel, presidente; H. Béghin, P. Belgodère, R. Brard, M. Brelot, L. de Broglie, H. Cartan, A. Chatelet, J. Chazy, G. Darmois, H. Delange, A. Denjoy, J. Dieudonné, Mme. Dubreil-Jacotin, P. Dubreil, C. Ehresmann, J. Favard, R. Fortet, M. Fréchet, G. Júlia, A. Lamothe, P. Lelong, J. Leray, P. Lévy. A. Lichnerowicz, S. Mandelbrojt. P. Montel, J. Pérès, C. Pisot, H. Poncin, P. Robert, L. Schwartz, G. Valiron, H. Villat, G. Choquet.

Comité de Edição das Obras de Élie Cartan

Profs. P. Montel, Presidente; A Lichnerowicz, Secretário; H. Cartan, A. Chatelet, G. Darmois, J. Leray.

Comité de Honra International

Profs. U. Amaldi, R. T. Bachiller, G. Birkhoff, S. Bochner, E. Bompiani, O. Boruvka, S. S. Chern, C. Chevalley, E. T. Davies, A. Einstein, H. Freudenthal, L. Godeaux, V. Hlavaty, W. V. D. Hodge, H. Hopf, S. Iyanaga, S. Kakutani, A. Kawaguchi, E. Kähler, D. D. Kosambi, C. Kuratowski, T. H. Lepage, D. C. Lewis, M. Morse, L. Nachbin, J. Nielsen, N. E. Nörlund, L. Pontrjagin, A. Pouliot, C. Racine, J. Radon, G. de Rham, F. Riesz, M. Riesz, L. Santaló, E. B. Schieldrop, J. A. Schouten, E. Schrödinger, B. Segre, C. L. Synge, C. De La Vallée-Poussin, O. Veblen, G. Vranceanu, A. Weil, H. Weyl, J. H. C. Whitehead, Sir E. Whittaker, K. Yano, C. L. Siegel, A. Stoïlow, M. H. Stone, W. Süss.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

Resoluções dos n.os 3625 a 3650 do fasc. 54:

3625

R: *É uma indeterminação do tipo* 1^∞. *Tomando o logaritmo neperiano:*

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x^2} \cdot \log(\cos x) = \lim_{x=0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

Temos agora uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando duas vezes a regra de L'Hospital, *vem para valor deste último limite:* $-1/2$. *Portanto, o verdadeiro valor da expressão dada é:*

$$\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3626

R: *Verifica-se imediatamente que a função só existe no intervalo fechado* $(-1, 1)$ *e que é simétrica em relação ao eixo dos* yy.

Com facilidade se deduz para ela esta outra expressão analítica:

$$y = (1 - 4x^2)\sqrt{1 - x^2}$$

que nos mostra que a curva representativa corta o eixo dos xx *nos pontos de abcissas* -1, $-1/2$, $1/2$ *e* 1.

A 1.ª derivada da função tem o valor:

$$y' = \frac{3x(4x^2 - 3)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Esta anula-se para $x = 0$ *e ainda para* $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A segunda derivada tem por valor:

$$y'' = \frac{-3 \cdot (8x^4 - 12x^2 + 3)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

que nos mostra que a função tem um máximo para $x = 0$ *e mínimos para os outros valores de* x *que anulam a 1.ª derivada. Por seu lado, a 2.ª derivada anula-se para* $x = \pm 0,6 \left(\frac{\pm\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2}\right)$ *onde a curva representativa apresenta pontos de inflexão.*

3627

R: *Obrigando a função* w *a tomar os valores indicados para os correspondentes valores de* z, *obtemos o sistema:*

$$\begin{cases} 2a + ci = 0 \\ 5a + 5b = 3c + 3d - 4ci - 4di \\ b + 2di = 0 \end{cases}$$

Fazendo, por exemplo, $c = 2$, *vem para as outras constantes:*

$$a = -i; \; d = i; \; b = 2$$

A função dada pode, pois, escrever-se

$$w = \frac{-i + 2z}{2 + iz} = \frac{2x + (2y - 1)i}{(2 - y) + xi}.$$

Basta mostrar que, para valores de z *de módulo igual à unidade, os valores correspondentes de* w *têm também módulo igual à unidade.*

Como o módulo dum cociente é o cociente dos módulos:

$$\operatorname{mod} w = \frac{\sqrt{4x^2+(2y-1)^2}}{\sqrt{(2-y)^2+x^2}} = \frac{\sqrt{5-4y}}{\sqrt{5-4y}} = 1$$

atendendo a que $x^2+y^2=1$.

3631

R: *Comparando o infinitésimo dado com* x, x^2 *e* x^3 *obtemos sempre um limite igual a zero, como se verifica fàcilmente.*

Mas:

$$\lim_{x=0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x/2 - x^2/2}{x^4} = \left[\frac{\operatorname{sen} 2x - x}{4x^3}\right]_{x=0} =$$

$$= \left[\frac{2\cos 2x - 1}{12x^2}\right]_{x=0} = \left[\frac{-\operatorname{sen} 2x}{3\cdot 2x}\right]_{x=0} =$$

$$= -\frac{1}{3} \neq 0.$$

A ordem de y *em relação a* x *é, pois, igual a* 4.

3632

R: *A expressão analítica da função mostra-nos que a sua imagem geométrica tem duas assíntotas paralelas ao eixo dos* yy $(x=0$ e $x=a)$ *e uma paralela ao eixo dos* xx $(y=0)$.

A 1.ª derivada é igual a $y' = -\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{(a-x)^2}$. *Igualando-a a zero, obtemos uma equação cujas raízes são* $x_1 = \frac{a^2}{a+b}$ *e* $x_2 = \frac{a^2}{a-b}$. *A 2.ª derivada é igual a* $y'' = \frac{2a^2}{x^3} + \frac{2b^2}{(a-x)^3}$. *Por substituição, verifica-se que a 2.ª derivada é positiva em* x_1 *e negativa em* x_2. *A imagem geométrica da função apresenta aí, pois, um mínimo e um máximo, respectivamente.*

Como o eixo dos xx *é uma assíntota, concluímos com facilidade que há um ponto de inflexão, de abcissa maior que* x_2.

3633

R: *Substituindo* z *por* $x+iy$, *vem:* $w = \frac{2x}{(1-y)^2+x^2} + i\,\frac{(1-y^2)-x^2}{(1-y)^2+x^2}$. *Portanto a função* w *toma valores reais para os pontos* (x, y) *tais que:* $x^2+y^2=1$ *que é uma circunferência de raio* 1, *com centro na origem dos eixos. A função* w *toma valores imaginários puros para os pontos* (x, y) *tais que:* $x=0$ *que é o eixo dos* yy.

Dos dois pontos de encontro do eixo dos xx *com a circunferência indicada só serve* $A(0,-1)$ *visto que para* $(0,1)$, w *vem indeterminada.*

Resoluções dos n.os 3625 a 3633 de J. H. Arandes

3637

R: *Para verificar que é um homomorfismo basta que, sendo* n *e* m *dois inteiros e* n' *e* m' *as suas imagens em* $\mathfrak{C}$, *seja* $n+m \longrightarrow n'\cdot m'$, *o que é imediato atendendo à igualdade*

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+m}(1+i)^{n+m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}(1+i)^{n}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m}(1+i)^{m}.$$

Pelo teorema da homomorfia haverá então um invariante $\mathfrak{N}$ *em* R *tal que* $\mathfrak{C}$ *é isomorfo a* $R/\mathfrak{N}$, *este invariante é o conjunto dos inteiros* n *que correspondem ao elemento* 1 *de* $\mathfrak{C}$; *satisfazem por consequência à relação* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\cdot(1+i)^{n} = 1$.

Passando o primeiro membro da igualdade anterior à forma trigonométrica resulta a igualdade equivalente

$$\cos\left(n\frac{\pi}{4}+2j\pi\right) + i\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{4}+2j\pi\right) = 1$$

que equivale por sua vez a $n\frac{\pi}{4} = 2k\pi$ (k *inteiro arbitrário*) *ou seja,* $n = 8k$ *com* k *arbitrário. O conjunto* $\mathfrak{N}$ *é formado pelos múltiplos de* 8.

3638

R: *Basta provar que a relação*

$$\lambda\cdot(4,-2,-4) + \mu\cdot(6,-3,1) = (0,0,0)$$

implica $\lambda = 0$ *e* $\mu = 0$, *o que equivale a demonstrar que o sistema homogéneo*

$$\begin{cases} 4\lambda + 6\mu = 0 \\ -2\lambda - 3\mu = 0 \\ -4\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

é determinado. De facto o determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

3642

R: *Suponhamos que* α *é limite inferior do conjunto dos números* η; *então* α *satisfaz às condições:*

$$1\begin{cases} \text{a) } \alpha \leqslant \eta \text{ qualquer seja } \eta \\ \text{b) se } \beta \leqslant \eta \text{ qualquer seja } \eta \text{ é } \beta \leqslant \alpha. \end{cases}$$

Vamos provar que as condições 1) *implicam*

$$2\begin{cases} \text{a) } \alpha \geqslant \xi \text{ qualquer seja } \xi \\ \text{b) se } \beta \geqslant \xi \text{ qualquer seja } \xi \text{ é } \beta \geqslant \alpha \end{cases}$$

que definem α *como limite superior do conjunto dos números* ξ. *Comecemos por observar que para cada* ξ *é* $\xi \leqslant \eta$, *qualquer seja* η; *por isso, atendendo a* 1. b) *resulta* 2. a). *Por outro lado, dado* $\beta \geqslant \xi$, *se fosse* $\beta < \alpha$

os números do intervalo (α, β), *que não são números* ξ *teriam de ser números* η *o que contradiz* 1. a). *É por conseguinte* $\beta \geqslant \alpha$. *De modo análogo se provaria que as condições* 2) *implicam as condições* 1). *As duas definições são portanto equivalentes.*

3643

R: a) *Pondo* $\mathfrak{G}'_1 \cap \mathfrak{H} = (\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{G}'_1$, *reconhece-se que* $\mathfrak{H}'_1 = \mathfrak{G}'_1 \cap \mathfrak{H}$ *é a intersecção do sub-grupo* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$ *com o invariante* $\mathfrak{G}'_1$ *em* $\mathfrak{G}_1$, *é por isso invariante no sub-grupo* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$.

b) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}'_1$ *é identico a* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}/(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{G}'_1$ *que pelo primeiro teorema da isomorfia é isomorfo a* $(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}) \cdot \mathfrak{G}'_1/\mathfrak{G}'_1$. *Ora* $(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}) \cdot \mathfrak{G}'_1/\mathfrak{G}'_1$ *é a imagem homomorfa de* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$ *no homomorfismo* $\mathfrak{G}_1 \sim \mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}'_1$ *e e por isso sub-grupo de* $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}'_1$.

3647

R: *De modo análogo a* **3642**.

3648

R: *Pondo* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_i = (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}) \cap \mathfrak{G}_i$ *e, notando que* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}$ *e* $\mathfrak{G}_i$ *são respectivamente um sub-grupo e um invariante de* $\mathfrak{G}_i$, *conclui-se que* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_i$ *é invariante em* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}$ *e por isso* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G} \trianglerighteq \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_n = \mathfrak{E}$ *é uma série normal.*

Tomemos agora o factor desta serie

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_i = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}/(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}) \cap \mathfrak{G}_i ;$$

aplicando o primeiro teorema da isomorfia reconhece-se que o segundo membro daquela igualdade é isomorfo a $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}) \cdot \mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_i$ *que é um sub-grupo do factor da primeira série* $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$. *Tal sub-grupo é precisamente a imagem do sub-grupo de* $\mathfrak{G}_{i-1}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}$, *no homomorfismo canónico de* $\mathfrak{G}_{i-1}$ *sobre* $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$.

3649

R: *Representando por* x', *a imagem de* $x \in \mathfrak{S}$ *teremos* $1 \cdot x \longrightarrow 1' \cdot x$ *visto que o endomorfismo é operatório e* $\mathfrak{S}$ *é considerado como módulo com operadores à direita em* $\mathfrak{S}$. *Como* $1 \cdot x = x$ *resulta então*

$$x' = e \cdot x \qquad e = 1' \in \mathfrak{S}.$$

Por outro lado é fácil reconhecer que a igualdade $x' = e \cdot x$ *define um endomorfismo* $-\mathfrak{S}$, *de* $\mathfrak{S}$ *considerado como módulo com operadores à direita de* $\mathfrak{S}$.

Os endomorfismos considerados obtêm-se portanto multiplicando à esquerda os elementos $x \in \mathfrak{S}$ *por um elemento arbitrário* $\rho \in \mathfrak{S}$.

3650

R: *Cada elemento* $x \in \mathfrak{S}$ *tem a forma*

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_\mu = \sum_{i=1}^{\mu} x_i$$

em que $x_i \in \mathfrak{B}_i$ *sendo os* $\mathfrak{B}_i$ *ideais direitos simples e distintos de* $\mathfrak{S}$. *Em particular resulta para o elemento* 1,

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

e podemos supor todos os e_i *não nulos.*

Desta relação tira-se

$$\mathfrak{S} = e_1\mathfrak{S} + \cdots + e_i\mathfrak{S} + \cdots + e_n\mathfrak{S}.$$

Ora $e_i\mathfrak{S}$ *é o ideal direito gerado por* $e_i \in \mathfrak{B}_i$ *e como não é nulo identifica-se com* $\mathfrak{B}_i$ *porque este ideal é simples.* $\mathfrak{S}$ *toma então a forma* $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \cdots + \mathfrak{B}_n$ *que é uma soma directa porque as parcelas são simples e distintas.*

Resoluções dos n.os 3637 a 3650 de S. Guerreiro.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame ordinário — 13 de Março de 1953 — Parte prática.

3559 — Determinar a equação binómia de coeficientes reais e grau mínimo que admite como raízes os dois números:

$$z_1 = \cos 5\pi/13 + i \cdot \operatorname{sen} 5\pi/13$$
$$z_2 = \cos 7\pi/9 - i \cdot \operatorname{sen} 7\pi/9 .$$

z_1 e z_2 são raízes primitivas? Justificar.

3560 — Calcular a e b de modo que os planos de equações:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= b \\ 7x + ay + z &= 8 \\ -5x + ay + 2z &= 0 \end{aligned}$$

pertençam ao mesmo feixe.

3561 — Averiguar da natureza da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, b^n}{(b+a_1)\cdot(2b+a_2)\cdots(nb+a_n)},$$

sabendo que a sucessão de termo geral a_n tende para $A > 1$, e b é positívo e menor que 1.

3562 — Dadas as rectas

$$r_1) \begin{cases} y = 1/2 \cdot (-x-3) \\ z = 1/2 \cdot (5x+1) \end{cases}$$

$$r_2) \begin{cases} 3x + y - z + 6 = 0 \\ -2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$r_3) \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{5}$$

a) provar que são as arestas duma superfície prismática triangular;

b) escrever as equações do lugar dos pontos do espaço que distam igualmente das três rectas.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame extraordinário — 16 de Março de 1953 — Parte prática.

3563 — Resolver o sistema: $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - z = 0 \\ x - z^2 = 0, \end{cases}$

apresentando as soluções na forma trigonométrica.

3564 — Determinar os pontos comuns aos três planos de equações:

$$x + ay + a^2 z = 1$$
$$ax + a^2 y + z = 0$$
$$a^2 x + y + az = 0\,,$$

sabendo que entre o adjunto e o recíproco do determinante formado pelos coeficientes que afectam as variáveis, existe a relação: $A + R = 0$.

3565 — Averiguar da natureza da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n-1)\cdot(2n)}{2^n \cdot n^n}$$

3566 — Faz-se rodar uma recta r em torno de um dos seus pontos $P(2\,,1)$. Seja C o centro da circunferência de equação: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e A e B os pontos em que r intersecta a circunferência.

a) Determinar a expressão da área do triâgulo variável $[ABC]$;

b) Determinar a equação do lugar do baricentro do triângulo.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 1 de Julho de 1953 — Parte prática.

3567 — Considere-se a representação gráfica da função $y = \dfrac{12x^3 + 4x^2 - 3x - 1}{x+1}$.

a) Determinar as intersecções com o eixo das abscissas, e os sinais da função nos intervalos de que estes pontos são extremos; *b)* Estudar a sua posição em relação às assíntotas; *c)* Contar e separar os pontos de estacionaridade, averiguando se se trata de máximos ou mínimos, e calcular com um decimal exacto o valor da abscissa de um deles; *d)* Esboçar a representação gráfica.

3568 — *a)* Deduzir a equação da parábola que passa pelos focos da cónica: $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$, e pelo ponto A $(2, -1)$, onde admite a tangente: $y + 1 = 0$; *b)* Calcular a distância do foco da parábola à directriz; *c)* Escrever as equações das tangentes tiradas pelo ponto B (5,0).

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência extraordinário — 3 de Julho de 1953 — Parte prática.

3569 — Dada a função $y = \log(x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 32x - 28)$: *a)* Determinar os intervalos em que é definida e os valores que toma nos seus extremos; *b)* Recorrendo ao teorema de Sturm, provar que existe apenas um ponto de estacionaridade; indicar se se trata de um máximo ou de um mínimo, e calcular a sua abscissa com um decimal exacto; *c)* Esboçar a representação gráfica.

3570 — Considere-se a quádrica de equação:

$$4x^2 + z^2 - 8x + 2\sqrt{2}\,yz + 4z + 1 = 0\,.$$

a) Classifica-la; b) Escrever as equações dos seus planos de simetria; c) Indicar precisamente como se poderia calcular o valor de B_{23}, mantendo os outros coeficientes, para que a equação representasse uma quádrica de revolução.

Enunciados dos n.os 3559 a 3570 de F. Alves da Silva

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3650 — Se uma recta, r, tirada do vértice C do triângulo ABC divide ao meio a mediana tirada do vértice A, então essa recta r divide o lado AB na razão $1:2$.

3651 — Determine os pontos comuns a todas as circunferências $(x-a)(x-3) + y(y-4-a) = 0$.

Secção Média

3652 — Designando por $[x]$ o maior inteiro contido em x, demonstrar que, sendo n um inteiro positivo e x um número real se tem sempre

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{x}\right] + \left[x + \frac{2}{x}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right].$$

3653 — Seja $f(x)$ um polinómio de grau n, de coeficientes inteiros, e α uma raíz da equação $f(x) = 0$. Mostre que todo o polinómio $g(\alpha)$ de coeficientes racionais se pode escrever sob a forma $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$, onde $a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$ são números racionais.

Secção Superior

3654 — Mostre que se a e b são elementos do do grupo multiplicativo $\mathfrak{G}$, então existem em $\mathfrak{G}$ elementos x e y tais que $abx = ba$ e $yab = ba$ (comutadores do par a, b). Que relação existe entre os comutadores dos pares $a^{-1}b^{-1}$ e $b^{-1}a^{-1}$?

3655 — Determinar a forma geral das funções $f(x, y, z, p, q)$ para os quais, as equações diferenciais das características da equação $f = 0$ admitem a combinação integrável $d\left(\dfrac{q}{p}\right) = 0$ $\left(p = \dfrac{\partial z}{\partial z}, q = \dfrac{\partial z}{\partial z}\right)$.

N. R. — No próximo número da «Gazeta» serão publicadas as soluções dos problemas propostos no fascículo anterior.

A Redacção