3564 — Determinar os pontos comuns aos três planos de equações:

$$x + ay + a^2 z = 1$$
$$ax + a^2 y + z = 0$$
$$a^2 x + y + az = 0 ,$$

sabendo que entre o adjunto e o recíproco do determinante formado pelos coeficientes que afectam as variáveis, existe a relação: $A + R = 0$.

3565 — Averiguar da natureza da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n-1)\cdot(2n)}{2^n \cdot n^n}$$

3566 — Faz-se rodar uma recta r em torno de um dos seus pontos $P(2,1)$. Seja C o centro da circunferência de equação: $x^2+y^2-4x=0$ e A e B os pontos em que r intersecta a circunferência.

a) Determinar a expressão da área do triâgulo variável $[ABC]$;

b) Determinar a equação do lugar do baricentro do triângulo.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 1 de Julho de 1953 — Parte prática.

3567 — Considere-se a representação gráfica da função $y = \dfrac{12x^3+4x^2-3x-1}{x+1}$.

a) Determinar as intersecções com o eixo das abscissas, e os sinais da função nos intervalos de que estes pontos são extremos; *b)* Estudar a sua posição em relação às assíntotas; *c)* Contar e separar os pontos de estacionaridade, averiguando se se trata de máximos ou mínimos, e calcular com um decimal exacto o valor da abscissa de um deles; *d)* Esboçar a representação gráfica.

3568 — *a)* Deduzir a equação da parábola que passa pelos focos da cónica: $16x^2+25y^2-400=0$, e pelo ponto A $(2,-1)$, onde admite a tangente: $y+1=0$; *b)* Calcular a distância do foco da parábola à directriz; *c)* Escrever as equações das tangentes tiradas pelo ponto B (5,0).

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência extraordinário — 3 de Julho de 1953 — Parte prática.

3569 — Dada a função $y = log\,(x^4-8x^3+3x^2+32x-28)$: *a)* Determinar os intervalos em que é definida e os valores que toma nos seus extremos; *b)* Recorrendo ao teorema de Sturm, provar que existe apenas um ponto de estacionaridade; indicar se se trata de um máximo ou de um mínimo, e calcular a sua abscissa com um decimal exacto; *c)* Esboçar a representação gráfica.

3570 — Considere-se a quádrica de equação:

$$4x^2+z^2-8x+2\sqrt{2}\,yz+4z+1=0 .$$

a) Classifica-la; b) Escrever as equações dos seus planos de simetria; c) Indicar precisamente como se poderia calcular o valor de B_{23}, mantendo os outros coeficientes, para que a equação representasse uma quádrica de revolução.

Enunciados dos n.os 3559 a 3570 de F. Alves da Silva

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3650 — Se uma recta, r, tirada do vértice C do triângulo ABC divide ao meio a mediana tirada do vértice A, então essa recta r divide o lado AB na razão $1:2$.

3651 — Determine os pontos comuns a todas as circunferências $(x-a)(x-3)+y(y-4-a)=0$ ·

Secção Média

3652 — Designando por $[x]$ o maior inteiro contido em x, demonstrar que, sendo n um inteiro positivo e x um número real se tem sempre

$$[nx] = [x] + \left[x+\frac{1}{x}\right] + \left[x+\frac{2}{x}\right] + \cdots + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] .$$

3653 — Seja $f(x)$ um polinómio de grau n, de coeficientes inteiros, e α uma raíz da equação $f(x)=0$. Mostre que todo o polinómio $g(\alpha)$ de coeficientes racionais se pode escrever sob a forma $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$, onde $a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$ são números racionais.

Secção Superior

3654 — Mostre que se a e b são elementos do do grupo multiplicativo $\mathfrak{G}$, então existem em $\mathfrak{G}$ elementos x e y tais que $abx=ba$ e $yab=ba$ (comutadores do par a, b). Que relação existe entre os comutadores dos pares $a^{-1}b^{-1}$ e $b^{-1}a^{-1}$?

3655 — Determinar a forma geral das funções $f(x,y,z,p,q)$ para os quais, as equações diferenciais das características da equação $f=0$ admitem a combinação integrável $d\left(\dfrac{q}{p}\right)=0$ $\left(p=\dfrac{\partial z}{\partial z}, q=\dfrac{\partial z}{\partial z}\right)$.

N. R. — No próximo número da «Gazeta» serão publicadas as soluções dos problemas propostos no fascículo anterior.

A Redacção