

A TEORIA DE *DESSINS D'ENFANTS* DE GROTHENDIECK

GARETH A. JONES

SCHOOL OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON

G.A.Jones@maths.soton.ac.uk

Gareth Jones é professor jubilado da Universidade de Southampton, onde ainda desenvolve o seu trabalho de investigação. Atualmente, prepara um livro sobre *dessins d'enfants*. A convite da *Gazeta de Matemática*, Gareth Jones escreveu um pequeno artigo aflorando as ideias-chave dessa teoria.

Alexander Grothendieck, que faleceu há cerca de um ano, foi um gigante da matemática do séc. XX. Grande parte do seu trabalho, em geometria algébrica e noutras áreas, era altamente abstrata, mas no final da sua carreira matemática (que ocorreu efetivamente em meados dos anos 1980, quando se afastou da carreira académica e, em boa verdade, de grande parte da vida social), esboçou uma teoria [3], a que chamou *dessins d'enfants* (desenhos de crianças), em que objetos muito simples e concretos, nomeadamente grafos em superfícies, fornecem uma ligação explícita e surpreendente entre superfícies de Riemann compactas, entendidas como curvas algébricas complexas, e a teoria de Galois de corpos numéricos algébricos. Durante as últimas três décadas, os matemáticos têm-se mantido ocupados completando os detalhes das ideias de Grothendieck, demonstrando as suas conjecturas e estendendo a sua teoria em várias direções. Este artigo pretende apenas aflorar os aspetos mais elementares. Para outras abordagens, consulte [1, 4, 5, 6].

Um *mapa* é um mergulho de um grafo \mathcal{G} (que assumimos ser conexo e finito, quando nada for dito em contrário), sem cruzamentos, numa superfície \mathcal{S} (conexa, orientada e habitualmente compacta), em que cada face (componente conexa de $\mathcal{S} \setminus \mathcal{G}$) é homeomorfa a um disco. Um *mapa bipartido* \mathcal{B} é um mapa em que o grafo \mathcal{G} é bipartido, ou seja, os vértices podem ser coloridos

a preto e branco, de modo que cada aresta una sempre dois vértices de cores diferentes.

Usando uma ideia que remonta a Hamilton (1856), mas que foi pela primeira vez desenvolvida detalhadamente por Cori em 1975, esse mapa \mathcal{B} pode ser descrito por um par de permutações do seu conjunto E de arestas: x e y respeitam a orientação de \mathcal{S} para rotar as arestas em torno dos seus vértices adjacentes pretos e brancos (atenção: estes, normalmente, não são automorfismos de \mathcal{B} , uma vez que não preservam adjacências.) Os vértices pretos e brancos correspondem, respetivamente, aos ciclos de x e y , com valências iguais ao comprimento dos ciclos. De igual modo, as faces correspondem aos ciclos $z := (xy)^{-1}$, sendo a valência das faces duas vezes o

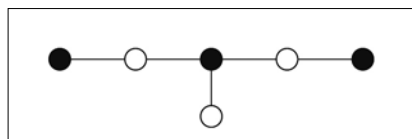


Figura 1: Um mapa bipartido com grupo de monodromia A_5 .

comprimento dos ciclos. Como \mathcal{G} é conexo, o grupo de permutação G gerado por x e y , chamado *grupo de monodromia* de \mathcal{B} , atua transitivamente em E . Por exemplo, na figura 1, entendida como um mapa na esfera, x é um ciclo de comprimento 3 (com dois pontos fixos), y é uma dupla transposição (com um ponto fixo), z é um ciclo de comprimento 5, e G é o grupo alterno A_5 .

Qualquer mapa \mathcal{M} que não seja bipartido pode ser convertido num mapa bipartido \mathcal{B} , colocando um vértice branco no ponto médio de cada aresta, de modo a que as arestas de \mathcal{B} correspondam às arestas dirigidas de \mathcal{M} . Portanto, \mathcal{M} também tem um grupo de monodromia, nomeadamente o de \mathcal{B} .

Coberturas e isomorfismos de mapas bipartidos \mathcal{B} correspondem a epimorfismos e isomorfismos dos grupos correspondentes G , preservando os pares geradores. Em particular, o grupo de automorfismos $A = \text{Aut } \mathcal{B}$ de \mathcal{B} , que preserva a orientação e as cores dos vértices, é o centralizador de G no grupo simétrico, ou seja, o grupo de todas as permutações de E que comutam com G . Na figura 1, A é o grupo identidade, mas se \mathcal{B} for um cubo, então G e A são isomorfos a A_4 , e atuam regularmente em cada caso.

Os mapas bipartidos com mais simetrias são os ma-

pas regulares, aqueles (como o cubo) em que A atua transitivamente nas arestas. Neste caso, A e G podem ser identificados com as representações regulares à esquerda e à direita do mesmo grupo, sendo portanto isomorfos (embora habitualmente distintos como grupos de permutação). Todo o mapa bipartido \mathcal{B} é o quociente de um mapa regular $\tilde{\mathcal{B}}$ por um subgrupo $H \leq \text{Aut } \tilde{\mathcal{B}}$. Existe um único destes mapas $\tilde{\mathcal{B}}$ que é a cobertura regular mínima de \mathcal{B} . Por exemplo, se \mathcal{B} for o mapa da figura 1, então $\tilde{\mathcal{B}}$ é o dodecaedro, tornado bipartido como acima indicado, com grupo de automorfismos $\text{Aut } \tilde{\mathcal{B}} \cong A_5$ e $H \cong A_4$.

As permutações x e y determinam \mathcal{B} a menos de isomorfismo. Na verdade, elas fazem mais do que isso: impõem em \mathcal{S} a estrutura de uma superfície de Riemann, com coordenadas locais complexas. O Teorema da Existência de Riemann afirma que se x_1, \dots, x_k forem permutações geradoras de um grupo transitivo de grau n , com $x_1 \dots x_k = 1$, e p_1, \dots, p_k forem pontos distintos da esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, então existe uma superfície de Riemann \mathcal{S} com uma cobertura de n folhas $\beta: \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, ramificada nos pontos p_i , com permutações de monodromia x_i (estas são as permutações das folhas dadas pelo levantamento de pequenos caminhos fechados em redor dos pontos p_i de $\hat{\mathbb{C}}$ para \mathcal{S} .) Se tomarmos $x_i = x, y$ e z , com $p_i = 0, 1$ e ∞ , então o mapa bipartido trivial \mathcal{B} em $\hat{\mathbb{C}}$, com um vértice preto em 0, um vértice branco em 1 e uma aresta ao longo do intervalo unitário, é levantado, via β , para um mapa bipartido $\mathcal{B}' = \beta^{-1}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{B}$ numa superfície de Riemann homeomorfa a \mathcal{S} .

Existe um forma alternativa de obter, partindo de \mathcal{B} , a estrutura da superfície de Riemann em \mathcal{S} . O mapa bipartido universal \mathcal{B}_∞ é um mapa no semiplano superior $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$, com vértices pretos e brancos nos pontos $a/b \in \mathbb{Q}$ (na forma reduzida) com b ímpar e a respeti-

vamente par ou ímpar. Entre os vértices a/b e c/d existe uma aresta (uma geodésica hiperbólica) se e só se $ad - bc = \pm 1$.

O grupo de automorfismos $\text{Aut } \mathcal{B}_\infty$ é um grupo livre F_2 de dimensão 2, gerado pelas transformações de Möbius

$$X: t \mapsto \frac{t}{-2t+1} \quad \text{e} \quad Y: t \mapsto \frac{t-2}{2t-3}$$

fixando o vértice preto em 0, o vértice branco em 1 e rotando ciclicamente as suas arestas adjacentes (este é o subgrupo principal de congruência $\Gamma(2)$ de nível 2 no grupo modular $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, o núcleo da redução de $\Gamma \text{ mod } (2)$.)

O epimorfismo $\theta: F_2 \rightarrow G$, $X \mapsto x, Y \mapsto y$ determina uma ação transitiva de F_2 em E , portanto, seja M o subgrupo de F_2 que fixa uma aresta de \mathcal{B} (único a menos de conjugação). Então \mathcal{B}_∞/M é um mapa bipartido isomorfo a \mathcal{B} , numa superfície de Riemann (com estrutura complexa herdada de \mathbb{H}) homeomorfa a \mathcal{S} .

Que superfícies de Riemann \mathcal{S} são formadas desta maneira? Claramente, nem todas: a teoria de Teichmüller diz-nos que existe um número não numerável de superfícies de Riemann compactas de género $g \geq 1$ (quando $g = 0$ só existe a esfera de Riemann), mutuamente não isomorfas, enquanto existe apenas um número numerável de pares x, y de permutações de conjuntos finitos.

Para responder a esta questão precisamos de mudar o nosso ponto de vista acerca das superfícies de Riemann compactas. Desde Riemann que sabemos que estas são equivalentes a curvas algébricas complexas projetivas, ou seja, subvariedades de dimensão 1 de espaços complexos projetivos definidos por conjuntos finitos de equações polinomiais. Podemos assim perguntar--nos que superfícies de Riemann estão definidas sobre os vá-

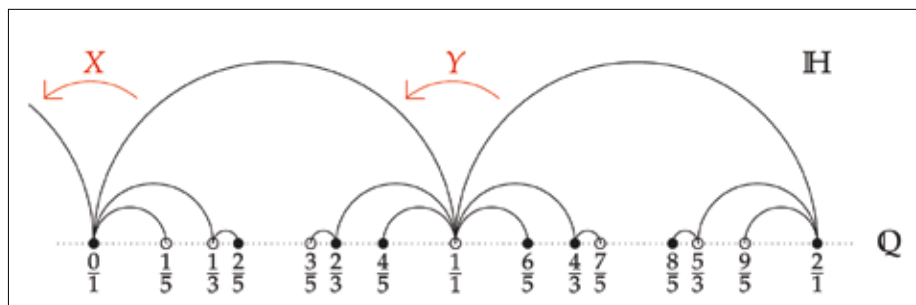


Figura 2: Parte do mapa bipartido universal \mathcal{B}_∞ .

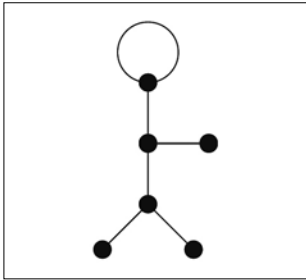


Figura 3: Um mapa \mathcal{M} com grupo de monodromia M_{12} .

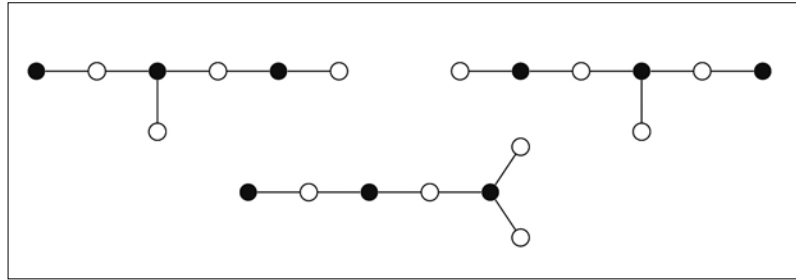


Figura 4: Uma órbita de G em árvores planas.

rios subcorpos de \mathbb{C} , no sentido em que os polinómios podem ser escolhidos de modo que os seus coeficientes pertençam a esse corpo. O Teorema de Belyĭ (originalmente um lema na Teoria Inversa de Galois, a tentativa de encontrar, para cada grupo finito G , uma extensão finita de \mathbb{Q} cujo grupo de Galois seja G) mostra que uma superfície de Riemann S está definida sobre o corpo $\overline{\mathbb{Q}}$ dos números algébricos se e só se existir uma função meromorfa não constante $\beta : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ramificada, no máximo, em três pontos. Pela tripla transitividade do grupo de automorfismos $PGL_2(\mathbb{C})$ de $\hat{\mathbb{C}}$, podemos tomar esses pontos como sendo os pontos $0, 1$ e ∞ , e, conseqüentemente, como Grothendieck observou, estas superfícies de Riemann S são precisamente aquelas obtidas a partir de mapas bipartidos! Chamamos *função de Belyĭ* a β , e *par de Belyĭ* a (S, β) .

Por exemplo, se transformarmos o mapa esférico \mathcal{M} da figura 3 num mapa bipartido \mathcal{B} , como anteriormente, então a cobertura regular mínima $\tilde{\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} é um mapa bipartido de género 3601 com grupo de automorfismos isomorfo ao grupo de Mathieu M_{12} , um grupo esporádico simples, 5-transitivo, de grau 12 e ordem 95040, descoberto por Mathieu em 1861. A curva algébrica correspondente está definida sobre o corpo numérico $\mathbb{Q}(\sqrt{-11}) \subset \overline{\mathbb{Q}}$. Impressionado pelo modo como desenhos simples e infantis, como o homem de fósforos da figura 3, podem codificar estruturas matemáticas tão sofisticadas, Grothendieck decidiu chamar-lhes *dessins d'enfants*.

O grupo absoluto de Galois G é o grupo de Galois da extensão $\overline{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{Q}$, ou seja, o grupo de automorfismos do corpo $\overline{\mathbb{Q}}$. Trata-se de um grupo bastante complicado

(não é numerável, por exemplo), mas também muito importante: o grupo de Galois de cada corpo numérico algébrico aparece como um quociente de G , portanto, num certo sentido, este grupo codifica toda a teoria de Galois de corpos numéricos algébricos. Existem muitos problemas abertos relacionados com este grupo.

Há uma ação natural de G nos pares de Belyĭ (atuando nos coeficientes das funções polinomiais e racionais que os definem) que induz uma ação nos *dessins* correspondentes \mathcal{B} . Ainda que os elementos de G (excluindo a identidade e a conjugação complexa) atuem de forma altamente descontínua, eles preservam muitas das propriedades dos *dessins*, tais como o número e a valência dos vértices pretos e brancos, a valência das faces, o género e o grupo de automorfismos (que preservam a orientação). Por exemplo, os três *dessins* esféricos na figura 4 formam uma órbita de G , definida sobre o corpo de decomposição do polinómio $25t^3 - 12t^2 - 24t - 16$ e permutada por G como o seu grupo de Galois S_3 .

Apesar da invariância dos parâmetros, pode mostrar-se que a ação de G é fiel nas classes de isomorfismo dos *dessins*, mesmo quando restrita a 'pequenas' classes de *dessins*, tais como árvores planas, permitindo que possamos 'ver' toda a teoria de Galois de corpos numéricos finitos através destes objetos muito simples. Talvez o desenvolvimento recente mais entusiasmante tenha sido a prova, por Gabino González-Diez e Anfrei Jaikin-Zapirain [2], da conjectura (de longa data) de que G atua fielmente em *dessins* regulares, assim concluindo que estes objetos, mais complexos mas mais simétricos, oferecem também uma contribuição valiosa para compreender o importante grupo G .

BIBLIOGRAFIA

[1] E. Girono and G. González-Diez, *Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants*, London Math. Soc. Student Texts 79, Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

[2] G. González-Diez and A. Jaikin-Zapirain, "The absolute Galois group acts faithfully on regular dessins and on Beauville surfaces", *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) 111 (2015), 775–796.

[3] A. Grothendieck, "Esquisse d'un Programme", in *Geometric Galois Actions 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, pp.5–84, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 242, Cambridge Univ. Press, 1997.

[4] G. A. Jones, "Bipartite graph embeddings", *Riemann surfaces and Galois groups*, *Discrete Math.* 338 (2015), 1801–1813.

[5] G. A. Jones and D. Singerman, "Belyi Functions, Hypermaps and Galois Groups", *Bull. Lond. Math. Soc.* 28 (1996) 561–590.

[6] S. K. Lando and A. K. Zvonkin, *Graphs on Surfaces and their Applications*, *Encyclopaedia Math. Sci.* 141, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

SOBRE O AUTOR

Gareth Jones doutorou-se pela Universidade de Oxford e trabalha, desde 1971, no Departamento de Matemática da Universidade de Southampton, no sul de Inglaterra. É autor de cerca de uma centena de artigos de investigação (quase todos em Teoria de Grupos e suas aplicações) e coautor de três livros.

SIC
RÁDIO
SIC
RÁDIO
SIC
RÁDIO

isto é

TEMPORADA
08
MATEMÁTICA

Fundação
Vodafone
Portugal

