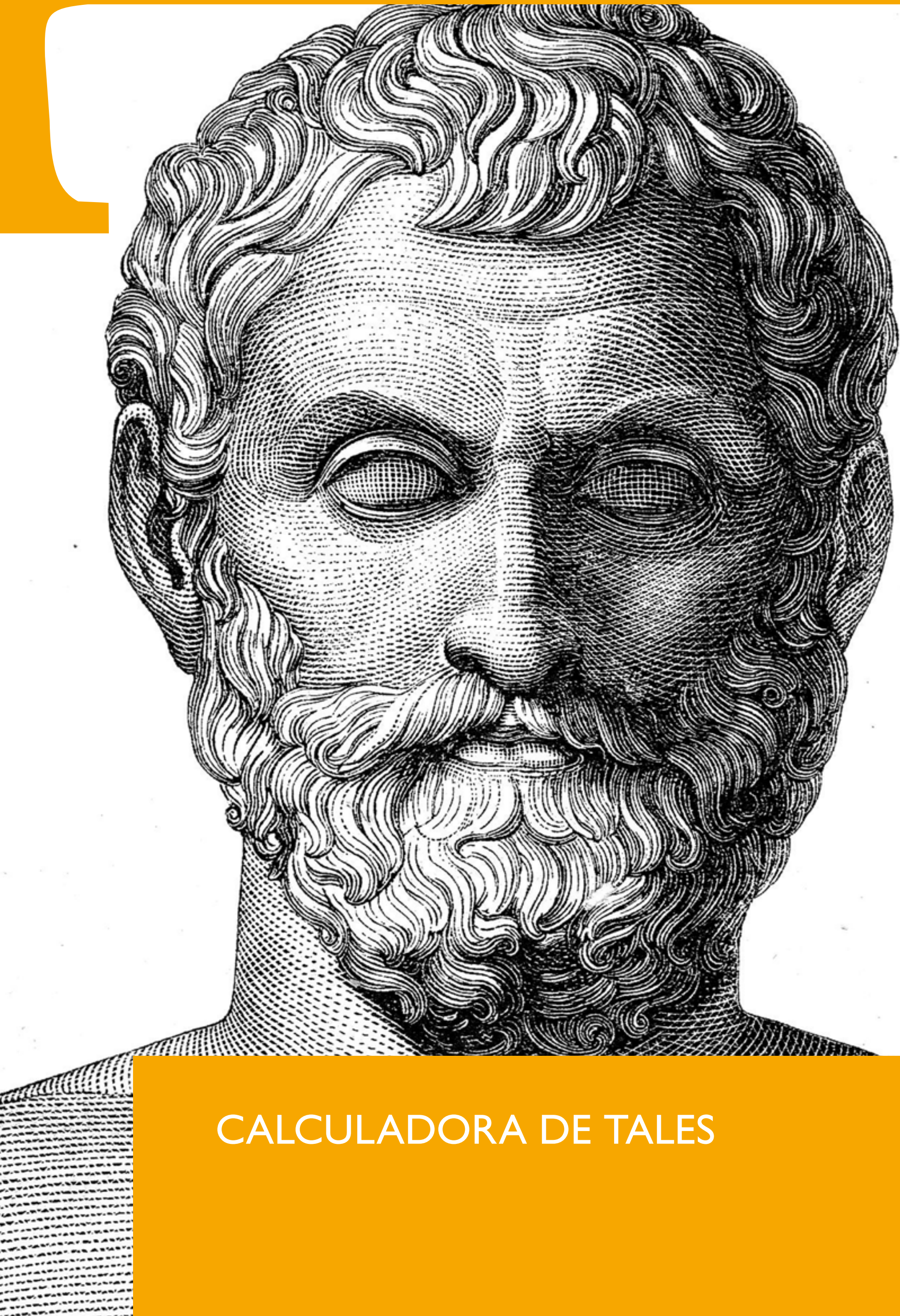


CALCULADORA DE TALES

Luís Bernardino[1] e Juan Carlos Sánchez Rodriguez[2]

Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres[1] e Universidade do Algarve/ IST-UL[2]

bernluis@gmail.com[1] e jsanchez@ualg.pt[2]

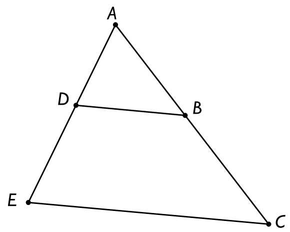
Sobre a importância da obra de Tales de Mileto, gostaríamos de referir o livro [3], onde o autor afirma: "O trabalho de sistematização em geometria iniciado por Tales é continuado nos séculos posteriores, nomeadamente pelos pitagóricos".

O novo Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico, introduzido em 2013, confere ao Teorema de Tales um papel fundamental do currículo, promovendo estrutura e coesão.

Neste texto consideraremos o enunciado do Teorema de Tales incluído, por exemplo, no livro [4].

TEOREMA DE TALES

Se cortamos os lados dum ângulo (ou os seus prolongamentos) por um feixe de paralelas, os triângulos formados terão os lados proporcionais.



$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{EC}$$

Este teorema assume um papel central no estudo da Matemática no 3.º ciclo. De facto, de acordo com o documento Programa e Metas Curriculares – Matemática, Ensino Básico [1], "o Teorema de Pitágoras (…) é visto, nesta abordagem, como consequência do Teorema de Tales" e este "…permite ainda tratar com rigor os critérios de semelhança de triângulos, que estão na base de numerosas demonstrações geométricas propostas" [1].

O Teorema de Tales vai ser, ainda, importante ao nível do Ensino Secundário, em numerosas situações. A título de exemplo, o Programa e Metas Curriculares – Matemática A, cuja implementação começou em 2015, defende a importância de se "reconhecer, utilizando argumentos geométricos baseados no Teorema de Tales (...) as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$" [2]. Verifica-se também que o seu "corolário", o Teorema de Pitágoras, é essencial para o estudo da distância entre dois pontos e, consequentemente, para a introdução da Geometria Analítica.

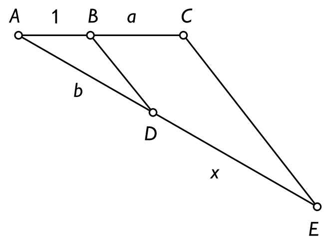
Além de medir a altura de pirâmides, o Teorema de Tales pode também servir para fazer cálculos. Nesta pequena nota apresentamos uma "calculadora de Tales", que opera valores numéricos que são entendidos como a medida de comprimento de segmentos de reta. Assim, fixando uma unidade do plano e partindo de segmentos de reta de medidas de comprimento respetivamente iguais a a e b, vamos apresentar, recorrendo ao Teorema de Tales, a construção de segmentos de reta com medida de comprimento igual ao produto de a por b, ao quociente entre a e b, ao quadrado de a e à raiz quadrada de a. Não apresentaremos a construção da soma e da diferença de a e b por as considerarmos óbvias e, como tal, pouco interessantes.

Em tudo o que segue, dados $a, b > 0$, supomos que se encontra fixado um plano e uma respetiva unidade, assim como segmentos de reta de medidas de comprimento respetivamente iguais a a e a b.

Enquanto docentes que olham para a geometria com um especial carinho, pretendemos, neste artigo, abordar algumas das aplicações de um teorema, batizado com o nome de um dos pais da geometria, na Antiga Grécia: o Teorema de Tales.

PRODUTO

De seguida, mostraremos uma construção geométrica que permite obter um segmento de reta com medida de comprimento igual ao produto de a por b. A ideia subjacente assenta na utilização do Teorema de Tales.



Começamos por construir um segmento $[AC]$ com medida de comprimento igual a $a+1$. Seguidamente, constrói-se um segmento de reta $[AD]$, com comprimento b. Sendo B o ponto de $[AC]$, tal que

[AB] tem uma unidade de comprimento, traça-se a reta BD e a reta r que lhe é paralela e que passa por C. Finalmente, seja E a interseção de r com AD.

Sendo x a medida de comprimento do segmento de reta $[DE]$, então é possível afirmar que

$$x = ab.$$

De facto, pelo Teorema de Tales:

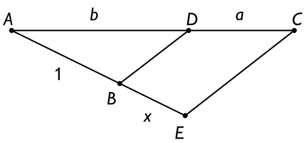
$$\frac{x+b}{b} = \frac{a+1}{1},$$

e portanto $ab + b = x + b$, ou seja, x é igual ao produto de a por b.

Obviamente, para construir um segmento de reta com comprimento igual ao quadrado de a basta, na construção anterior, fazer b igual a a.

QUOCIENTE

De maneira semelhante, é possível utilizar o Teorema de Tales para construir um segmento de reta com medida de comprimento igual ao quociente de a por b. Seja $[AC]$ um segmento, com medida de comprimento igual à soma de a com b. Seguidamente, constrói-se um segmento de reta $[AB]$, com uma unidade de comprimento. Sendo D o ponto do segmento de reta $[AC]$, tal que $[AD]$ tem medida de comprimento b, traça-se a reta BD e a reta r que lhe é paralela e que passa por C. Finalmente, seja E a interseção das retas r e AB.



Então, sendo x o comprimento do segmento de reta $[BE]$, e tendo em conta que as retas BD e CE são paralelas, podemos concluir que

$$\frac{x+1}{1} = \frac{a+b}{b}.$$

Logo, x é igual ao quociente de a e b:

$$x = \frac{a}{b}.$$

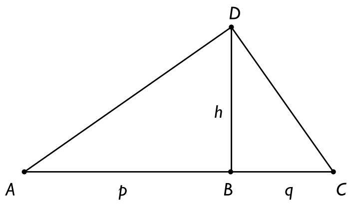
RAIZ QUADRADA

Antes de apresentar a construção de um segmento de reta com medida de comprimento igual à raiz quadrada de a, gostaríamos de chamar a atenção para um conhecido resultado matemático que deriva da semelhança de triângulos. Este resultado é frequentemente referido como teorema da altura.

Seja $[ACD]$ um triângulo retângulo em D e h o comprimento da respetiva altura, cujo pé é o ponto B.

Se p e q são os comprimentos, respetivamente dos segmentos $[AB]$ e $[BC]$, então

$$h^2 = pq.$$



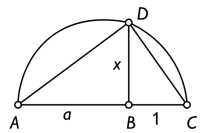
Nas condições do formulado teorema da altura, é um facto bem conhecido que os triângulos retângulos $[ABD]$ e $[BCD]$ são semelhantes. Logo, é possível estabelecer a seguinte relação entre os cumprimentos dos seus catetos:

$$\frac{p}{h} = \frac{h}{q},$$

donde resulta a igualdade desejada.

A construção que de seguida será descrita também assenta noutro conhecido resultado geométrico. Se o segmento $[AC]$ é o diâmetro de uma circunferência, então qualquer triângulo inscrito na semicircunferência AC é rectângulo.

Para construirmos um segmento de reta com medida de comprimento igual à raiz quadrada de a, começamos por construir um segmento de reta $[AC]$, com medida de comprimento igual a $a+1$. Seguidamente, constrói-se uma semicircunferência com diâmetro $[AC]$. Sendo B o ponto do segmento de reta $[AC]$, tal que a seja a medida do comprimento de $[AB]$, traça-se a reta r, perpendicular a AC e que passa por B. Finalmente, o ponto D resulta da interseção da reta r com a semicircunferência.



Sendo x a medida de comprimento do segmento de reta $[BD]$, $x = \sqrt{a}$.

O triângulo $[ACD]$ é retângulo, logo a afirmação é uma consequência do teorema da altura.

Gostaríamos ainda de assinalar que esta construção pode ser realizada com recurso à régua e compasso. O próprio Descartes a inclui no seu livro [6], onde também inclui a construção de segmentos de reta com medida de comprimento igual ao produto de a por b e ao quociente e entre a e b. Também pensamos ser necessário frisar que as ideias acima referidas surgem como propostas no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico, para a demonstração do Teorema de Pitágoras [1].

RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Sem perda de generalidade, iremos considerar as equações de segundo grau com a forma:

$$x^2 - ax + b = 0, \text{com } (a^2 \geq 4b). \tag{1}$$

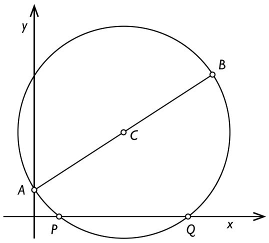
É bem conhecido o facto de que esta equação tem soluções reais se e só se $a^2 - 4b \geq 0$. Nesse caso, as soluções de (1) podem ser obtidas com recurso às operações de cálculo do produto, do quociente e da raiz quadrada.

Isto é, utilizando as ideias acima descritas, podemos construir com régua e compasso segmentos cujas medidas coincidem com o valor numérico das soluções da equação (1). Não obstante, gostaríamos de apresentar outra construção legada pelos gregos que também permite determinar geometricamente as raízes de uma equação do segundo grau acima referida.

Para simplificar a exposição, vamos considerar o plano munido de um referencial cartesiano e começamos por construir a circunferência de diâmetro AB, tal que

$$A = (0, 1) \text{ e } B = (a, b).$$

O próximo passo será mostrar que, se P e Q são os pontos interseção (quando existem) da circunferência com o eixo das abcissas, então as abcissas desses pontos são as raízes da equação (1).



Sendo C o centro da circunferência de diâmetro AB é possível afirmar que as coordenadas cartesianas do ponto C são:

$$C\left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

e o raio da circunferência coincide com a metade do comprimento do segmento $[AB]$, ou seja

$$r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Assim, a equação que define a circunferência será

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Obviamente, para que a circunferência intersete o eixo das abcissas, o seu raio não pode ser inferior à ordenada de C:

$$r \geq \frac{b+1}{2}.$$

Logo,

$$\frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4} \geq \frac{(b+1)^2}{4}$$

e, após algumas simplificações, podemos concluir que a circunferência corta o eixo das abcissas se e só se $a^2 \geq 4b$.

Finalmente podemos obter uma condição para as abcissas dos pontos P e Q, quando $a^2 \geq 4b$. Fazendo $y = 0$ na equação da circunferência:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Esta última igualdade, após simplificações, é equivalente à equação (1).

Ainda gostaríamos de frisar que foi considerado o caso em que a e b são positivos, os outros casos, com as devidas adaptações, levam a uma construção geométrica, obtida a partir da analisada, por reflexão nos eixos coordenados.

REFERÊNCIAS

[1] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira e M.ª C. Timóteo. "Programa e Metas Curriculares – Matemática, Ensino Básico". MEC, 2013.

[2] A. Bivar, C. Grosso, F. Oliveira, L. Loura e M.ª C. Timóteo. "Programa e Metas Curriculares – Matemática A". MEC, 2014.

[3] A. J. Franco de Oliveira. *Geometria Euclidiana*. Universidade Aberta. ISBN: 972- 674-155-6, 1995.

[4] D. Pacheco de Amorim. *Compêndio de Geometria*. Biblioteca Básica de Textos Didácticos de Matemática, Vol. I, SPM, ISBN: 972-99521-3-4.

[5] L. Bernardino. *Temas Escolhidos de Geometria do Triângulo* – Tese para obtenção do grau de mestre. Universidade do Algarve, 2008 acessível em *http://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/490/1/LBernardino-Mestrado-Matematica06-05-2008.pdf*

[6] R. Descartes. *A Geometria*. Editorial Prometeu. Lisboa. 2001.

SOBRE OS AUTORES

Luís Bernardino é mestre em Matemática, com especialização em Matemática para o Ensino, pela Universidade do Algarve, e licenciado em Matemática, ramo de Formação Educacional, pela mesma instituição. Tem-se dedicado à resolução de problemas e à geometria euclidiana, nomeadamente à sua aplicação em contexto de sala de aula.

Juan Carlos Sánchez Rodríguez é mestre em Ciências Físico Matemáticas da Universidade de Kharkov, Ucrânia, e doutorado em Matemática, especialidade de Análise Matemática, pela Universidade do Algarve. Tem-se dedicado à investigação de algumas classes de operadores integrais singulares, a tópicos da teoria dos problemas de contorno das funções analíticas e a certos problemas de fatorização de funções matriciais. A geometria euclidiana é um tópico que lhe é muito caro, desde os tempos em que, enquanto concorrente, participava em olimpíadas matemáticas. Tem orientado várias teses de mestrado nessa área. Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve, é também membro do Centro de Investigação CEAFEL - IST.